高三数学期末试题汇编：

圆锥曲线

一、单选题

1.（23-24 高三上·辽宁葫芦岛·期末）已知点 F 是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的左焦点，点 P 是双曲线上在第一象限内的一点，点 Q 是双曲线渐近线上的动点，则 $|PF|+|PQ|$ 的最小值为（　）

A．8　　B．5　　C．3　　D．2

2.（23-24 高三上·辽宁大连·期末）已知曲线“$C:(\log_a 2024)x^2+(\log_b 2024)y^2=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”的一个充分非必要条件是（　）

A．$0<a<b$　　B．$1<a<b$

C．$\frac{3}{2}<a<b$　　D．$1<b<a$

3.（23-24 高三上·辽宁抚顺·期末）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2.过 F_2 作其中一条渐近线的垂线，垂足为 P，则 $|PF_1|=$（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．2　　D．4

4.（23-24 高三上·辽宁沈阳·期末）圆锥曲线的发现与研究起源于古希腊，阿波罗尼奥斯（前 262-前 190）的《圆锥曲线论》全书 8 篇，共 487 个命题. 16 世纪天文学和物理学揭示了圆锥曲线是自然界物体运动的普遍性形式. 17、18 世纪随着射影几何学和解析几何学的创立发展，18 世纪 40 年代瑞士数学家欧拉给出了现代形式下圆锥曲线的系统阐述. 现有圆锥 PO' 顶点为 P，底面圆心为 O'，母线与底面直径的长度相同. 点 A 在侧面上，点 B 在底面圆周上，MN 为底面直径，二面角 $A-MN-B$ 为 $30°$. 已知平面 AMN 与圆锥 PO' 侧面的交线是某椭圆的一部分，则该椭圆的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

二、多选题

5.（23-24 高三上·辽宁抚顺·期末）直线 $x=ty+3$ 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点，且与 C 交于 M，N 两点，则（　）

A．$p=3$　　B．$p=6$

C．$|MN|$ 的最小值为 6　　D．$|MN|$ 的最小值为 12

6．（23-24 高三上·辽宁大连·期末）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 左焦点 F，左顶点 C，经过 F 的直线 l 交椭圆于 A,B 两点（点 A 在第一象限），则下列说法正确的是（　）

A．若 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则 l 的斜率 $k=\frac{\sqrt{6}}{2}$

B．$|AF|+4|BF|$ 的最小值为 $\frac{27}{4}$

C．以 AF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=4$ 相切

D．若直线 AC,BC 的斜率为 k_1,k_2，则 $k_1\cdot k_2=-\frac{9}{4}$

7．（23-24 高三上·辽宁沈阳·期末）已知点 A，B 在双曲线 C：$x^2-y^2=1$ 上，点 $M(x_0,y_0)$ 是线段 AB 的中点，则（　）

A．当 $x_0^2-y_0^2>1$ 时，点 A，B 在双曲线的同一支上

B．当 $x_0^2-y_0^2<0$ 时，点 A，B 分别在双曲线的两支上

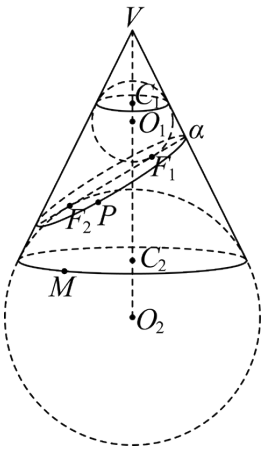
C．存在点 A，B，使得 $x_0^2-y_0^2=0$ 成立

D．存在点 A，B，使得 $0<x_0^2-y_0^2<1$ 成立

三、填空题

8．（23-24 高三上·辽宁葫芦岛·期末）已知 F 为抛物线 $C:y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点，过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 A，B，抛物线在点 A,B 处的切线分别为 l_1 和 l_2，若 l_1 和 l_2 交于点 P，则 $|PF|^2+\frac{25}{|AB|}$ 的最小值为_____.

9．（23-24 高三上·辽宁大连·期末）如图所示，在圆锥内放入两个球 O_1,O_2，它们都与圆锥相切（即与圆锥的每条母线相切，切点圆分别为 $\odot C_1,\odot C_2$.这两个球都与平面 α 相切，切点分别为 F_1,F_2，丹德林（*G.Dandelin*）利用这个模型证明了平面 α 与圆锥侧面的交线为椭圆，F_1,F_2 为此椭圆的两个焦点，这两个球也称为 *G.Dandelin* 双球.若圆锥的母线与它的轴的夹角为 $30°$，$\odot C_1,\odot C_2$ 的半径分别为 2，5，点 M 为 $\odot C_2$ 上的一个定点，点 P 为椭圆上的一个动点，则从点 P 沿圆锥表面到达 M 的路线长与线段 PF_1 的长之和的最小值是_____.



10．（23-24 高三上·辽宁沈阳·期末）点 A 在圆$(x-3)^2+y^2=2$上，点 B 在抛物线 $y^2=4x$ 上，则线段 AB 长度的最小值为____.

四、解答题

11．（23-24 高三上·辽宁葫芦岛·期末）已知椭圆 $G:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过 $D\left(1,\frac{3}{2}\right),E(2,0)$ 两点.作斜率为$\frac{1}{2}$的直线与椭圆 G 交于 A,B 两点（A 点在 B 的左侧），且点 D 在直线 l 上方.

(1)求椭圆 G 的标准方程；

(2)证明：$\triangle DAB$ 的内切圆的圆心在一条定直线上.

12．（23-24 高三上·辽宁大连·期末）已知抛物线 $G:x^2=2py(p>0)$ 经过点 $(2,1)$，经过点 $(0,2)$ 的直线 l 与抛物线 G 交 A,B 两点，过 A,B 两点作抛物线 G 的切线相交于点 P，Q 为线段 AB （A,B 两点除外）上一动点，直线 PQ 与抛物线 G 交 C,D 两点.

(1)若 $\triangle PAB$ 的的面积为 $12\sqrt{3}$，求直线 l 方程；

(2)求证：$\frac{|PC|}{|CQ|}=\frac{|PD|}{|DQ|}$.

13．（23-24 高三上·辽宁抚顺·期末）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过点 F_1 作 x 轴的垂线，并与 C 交于 A，B 两点，过点 F_2 作一条斜率存在且不为 0 的直线与 C 交于 M，N 两点，$|AB|=3$，$\triangle F_1MN$ 的周长为 8.

(1)求 C 的方程.

(2)记 A_1，A_2 分别为 C 的左、右顶点，直线 A_1M 与直线 AB 相交于点 P，直线 A_2N 与直线 AB 相交于点 Q，$\triangle PA_1A_2$ 和 $\triangle QA_1A_2$ 的面积分别为 S_1，S_2，试问 $\frac{S_1}{S_2}$

是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由.

14.（23-24 高三上·辽宁辽阳·期末）在平面直角坐标系 xOy 内，已知定点 $F(2,0)$，定直线 $l:x=\frac{3}{2}$，动点 P 到点 F 和直线 l 的距离的比值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，记动点 P 的轨迹为曲线 E.

(1)求曲线 E 的方程.

(2)以曲线 E 上一动点 M 为切点作 E 的切线 l'，若直线 l' 与直线 l 交于点 N，试探究以线段 MN 为直径的圆是否过 x 轴上的定点．若过定点．求出该定点坐标；若不过，请说明理由.

15.（23-24 高三上·辽宁沈阳·期末）在平面直角坐标系中，已知点 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，点 P 满足 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{6}$．记 P 的轨迹为 C.

(1)求 C 的方程；

(2)已知点 $A(\sqrt{3},1)$，设点 M，N 在 C 上，且直线 MN 不与 x 轴垂直，记 k_1，k_2 分别为直线 AM，AN 的斜率.

（ⅰ）对于给定的数值 λ（$\lambda\in R$ 且 $\lambda\neq\frac{1}{3}$），若 $k_1k_2=\lambda$，证明：直线 MN 经过定点；

（ⅱ）记（ⅰ）中的定点为 Q，求点 Q 的轨迹方程.

参考答案：

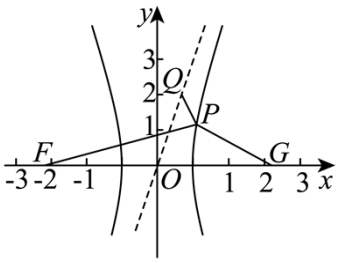
1．B

【分析】设右焦点为G，根据双曲线的定义可得$|PF|+|PQ|=|PG|+|PQ|+2$，再根据三角形性质结合点到线的距离求解即可.

【详解】设右焦点为$G\left(\sqrt{10},0\right)$，又由对称性，不妨设$Q$在渐近线$3x-y=0$上.

根据双曲线的定义可得$|PF|+|PQ|=|PG|+|PQ|+2\geq|GQ|+2$，当且仅当$P,G,Q$三点共线时取等号.

又当GQ与渐近线垂直时取最小值，为$|GQ|=\dfrac{|3\sqrt{10}|}{\sqrt{3^2+1^2}}=3$，故$|PF|+|PQ|$最小值为5.



故选：B

2．C

【分析】若$C:\left(\log_a2024\right)x^2+\left(\log_b2024\right)y^2=1$表示焦点在$y$轴上的椭圆，得出对应$a$、$b$关系，结合充分条件与必要条件的性质即可得.

【详解】若$C:\left(\log_a2024\right)x^2+\left(\log_b2024\right)y^2=1$表示焦点在$y$轴上的椭圆，

则有$\begin{cases}\log_a2024>0\\ \log_b2024>0\\ \log_a2024>\log_b2024\end{cases}$，即$\begin{cases}a>1\\ b>1\\ a<b\end{cases}$，即$1<a<b$，

故A、D选项为既不充分也不必要条件，B选项为充要条件，

C选项为充分非必要条件，故C选项符合要求.

故选：C.

3．B

【分析】

根据余弦定理即可求解.

【详解】

双曲线的渐近线方程为$ay\pm bx=0$，其中$a=\sqrt{2},b=2$，

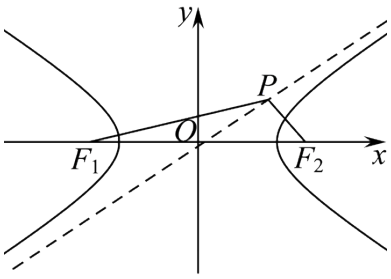
所以$F_2\left(c,0\right)$到$ay\pm bx=0$的距离为$\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，因此$\left|PF_2\right|=b$，

$\left|OF_2\right|=c$，$\left|PF_2\right|=b=2$，则$\left|OP\right|=\sqrt{\left(F_2O\right)^2-\left(PF_2\right)^2}=a$，

由$\frac{|OP|^2+\left|OF_1\right|^2-\left|PF_1\right|^2}{2\left|OP\right|\cdot\left|OF_1\right|}+\frac{|OP|^2+\left|OF_2\right|^2-\left|PF_2\right|^2}{2\left|OP\right|\cdot\left|OF_2\right|}=0$，

得$\left|PF_1\right|^2+\left|PF_2\right|^2=2\left(|OP|^2+\left|OF_1\right|^2\right)=2\times(2+6)=16$，解得$\left|PF_1\right|=2\sqrt{3}$.

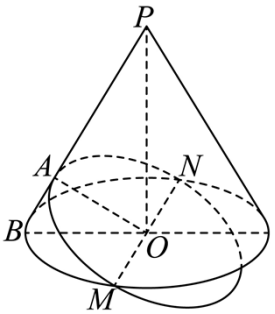
故选：B



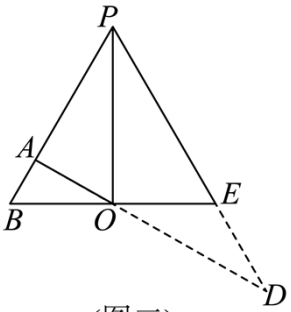
4．B

【分析】根据条件，确定椭圆的长轴长和椭圆上一点，求出b再求c，可得椭圆的离心率.

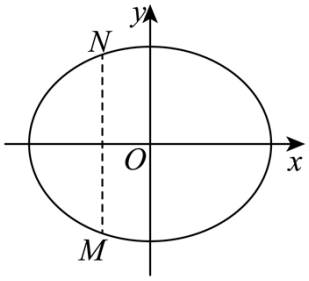
【详解】



(图一)



(图二)



(图三)

如图：

（图一）为空间几何体的直观图，（图二）为平面POB

截空间几何体的剖面图，（图三）为以椭圆长轴所在直线为x轴，长轴中垂线为y轴的平面图形.

易得(图二)中线段AD的长为椭圆长轴长，不妨设圆锥底面半径为2，则$|PB|=4$由题意可知$\triangle PBE$为正三角形，$\angle AOB=30^{\circ}$，$\angle PBO=60^{\circ}$，

所以$PB\perp AD$，所以$|AB|=1,|AO|=\sqrt{3}$，所以$|AP|=3$，所以$|AD|=3\sqrt{3}=2a$

所以在（图三）中$N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$，将$N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$中解得$b=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{27}{4}-\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}$，所以$\mathrm{e}=\frac{c}{a}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选：B

5．BD

【分析】先根据题意及直线$x=ty+3$过定点$(3,0)$即可判断A，B；再根据抛物线的性质知直线垂直于x轴，$|MN|$取得最小值，进而即可判断C，D.

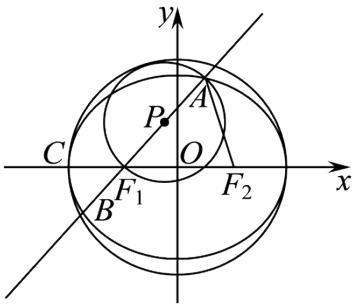
【详解】对于A，B，由直线$x=ty+3$与x轴的交点坐标为$(3,0)$，则$\frac{p}{2}=3$，即$p=6$，故A错误，B正确；

对于C，D，当直线垂直于x轴，即$t=0$时，$|MN|$取得最小值，且最小值为$2p=12$．故C错误，D正确.

故选：BD.

6．BCD

【分析】对于A，联立直线l的方程与椭圆方程，结合韦达定理以及$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$即可验算；对于B，由弦长公式、韦达定理可得$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}$为定值，结合基本不等式之“乘1法”即可判断；对于C，结合椭圆定义以及两点间距离公式即可判断C；对于D，由韦达定理以及斜率公式即可判断D.

【详解】

易知：$F_1(-1,0),F_2(1,0)$，对于 A，若 $\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$，显然直线 l_1 的斜率存在且大于 0，

设直线 $l_1:x=my-1,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立椭圆方程 $\begin{cases}x=my-1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，

化简整理得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，显然 $\Delta>0,y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，

又 $\overrightarrow{AF_1}=(-1-x_1,-y_1),\overrightarrow{F_1B}=(x_2+1,y_2)$，故 $y_1=-2y_2$，

由 $\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}\\ y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}\\ y_1=-2y_2\end{cases}$，解得 $m^2=\dfrac{4}{5}$，又 $k>0$，故 $k=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，A 错误；

对于 B，由点 A 在 x 轴的上方，显然 $y_1>0,y_2<0$，

又 $|AF_1|=\sqrt{1+m^2}\cdot y_1,|BF_1|=-\sqrt{1+m^2}\cdot y_2$，

$$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}\cdot y_1}-\frac{1}{\sqrt{1+m^2}\cdot y_2}=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{1+m^2}\cdot y_1\cdot y_2}$$

$$=\frac{-\sqrt{\left[(y_2+y_1)^2-4y_1\cdot y_2\right]}}{\sqrt{1+m^2}\cdot y_1\cdot y_2}=\frac{\dfrac{12(1+m^2)}{3m^2+4}}{\dfrac{9(1+m^2)}{3m^2+4}}=\frac{4}{3},$$

故 $|AF_1|+4|BF_1|=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{|AF_1|}+\dfrac{1}{|BF_1|}\right)\left(|AF_1|+4|BF_1|\right)$

$$=\frac{3}{4}\left(5+\frac{4|BF_1|}{|AF_1|}+\frac{|AF_1|}{|BF_1|}\right)\geq\frac{3}{4}\left(5+2\sqrt{\frac{4|BF_1|}{|AF_1|}\cdot\frac{|AF_1|}{|BF_1|}}\right)=\frac{27}{4},$$

当且仅当 $\dfrac{4|BF_1|}{|AF_1|}=\dfrac{|AF_1|}{|BF_1|}$，即 $|AF_1|=2|BF_1|$ 时取等，B 正确；

对于 C，设 $A(x_1,y_1)$，AF_1 的中点为 P，则 $P\left(\dfrac{x_1-1}{2},\dfrac{y_1}{2}\right)$，

又 $|OP|=\sqrt{\dfrac{(x_1-1)^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{4}}=\dfrac{|AF_2|}{2}$，由椭圆定义知：$\dfrac{|AF_2|}{2}+\dfrac{|AF_1|}{2}=2$，

即 $|OP|=2-\dfrac{|AF_1|}{2}$，又 $x^2+y^2=4$ 的圆心为 $O(0,0)$，半径为 2，

故以 AF_1（AF）为直径的圆与圆 $x^2+y^2=4$ 相切，C 正确；

对于 D，$y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}, y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}, x_1+x_2=\frac{-8}{3m^2+4}, x_1x_2=\frac{-12m^2+4}{3m^2+4}$，

$k_{AC}\cdot k_{BC}=\frac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\frac{\frac{-9}{3m^2+4}}{\frac{-12m^2+4}{3m^2+4}+2\cdot\frac{-8}{3m^2+4}+4}=-\frac{9}{4}$，D 正确.

故选：BCD.

【点睛】关键点睛：判断 B 选项的关键是首先得出$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_1|}$为定值，判断 C 选项的关键是结合椭圆定义以及圆相切的条件，从而即可顺利得解.

7．ABC

【分析】分类谈论，对直线 AB 是否存在斜率的时候，讨论弦的中点问题.

【详解】若直线 AB 不存在斜率，设直线方程为：$x=x_0$，代入 $x^2-y^2=1$ 得：$y^2={x_0}^2-1$，

当 $x_0>1$ 或 $x_0<-1$ 时，$M(x_0,0)$ 是弦 AB 的中线，此时 A，B 关于 x 轴对称，且在双曲线的同一支上，$x_0^2-y_0^2>1$；

若直线 AB 存在斜率，设直线方程：$y-y_0=k(x-x_0)\Rightarrow y=kx+(y_0-kx_0)$ 代入 $x^2-y^2=1$ 得：

$x^2-\left[kx+(y_0-kx_0)\right]^2-1=0$，整理得：$(1-k^2)x^2-2k(y_0-kx_0)x-(y_0-kx_0)^2-1=0$.

因为直线 AB 与双曲线有两个不同的交点，所以：

$1-k^2\neq 0$ 且 $\Delta=\left[2k(y_0-kx_0)\right]^2-4(k^2-1)\left[(y_0-kx_0)^2+1\right]>0$

所以：$k^2-1-k^2x_0^2+2kx_0y_0-y_0^2<0$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{2k(y_0-kx_0)}{1-k^2}$，

由 $x_1+x_2=2x_0\Rightarrow\frac{2k(y_0-kx_0)}{1-k^2}=2x_0\Rightarrow k=\frac{x_0}{y_0}$，所以：

$\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2-1-\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2\cdot x_0^2+2\cdot\frac{x_0}{y_0}\cdot x_0y_0-y_0^2<0\Rightarrow(x_0^2-y_0^2)\left[(x_0^2-y_0^2)-1\right]>0$

$\Rightarrow x_0^2-y_0^2<0$ 或 $x_0^2-y_0^2>1$.故 D 不成立；

又 $x_1x_2=\frac{(y_0-kx_0)^2+1}{k^2-1}=\frac{(y_0-x_0)^2+y_0^2}{x_0^2-y_0^2}$

当 $x_0^2-y_0^2<0$ 时，$x_1x_2<0$，A，B 两点分别在双曲线的两支上；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/268012114026006053