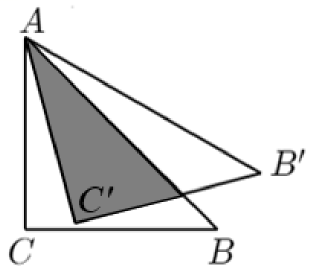
专题34 旋转综合题中的面积问题

【题型演练】

一、单选题

1．（2020·广西玉林·九年级期中）将直角边长为3cm的等腰直角ΔABC绕点A逆时针旋转$15°$后得到$\triangle AB'C'$，则图中阴影部分的面积(　)

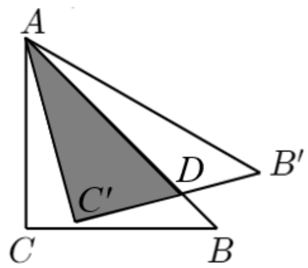


A．$\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$　　B．$3\sqrt{3}\text{cm}^2$　　C．$2\sqrt{3}\text{cm}^2$　　D．6cm^2

【答案】A

【分析】根据旋转的性质，旋转角$\angle CAC'=15°$，则$\angle BAC'=45°-15°=30°$，可见阴影部分是一个锐角为30°的直角三角形，且已知直角边$AC'=3$厘米，根据勾股定理或者三角函数求出另一直角边即可解答．

【详解】解：设AB与$B'C'$交于D点，



根据旋转性质得$\angle CAC'=15°$，而$\angle CAB=45°$，

$\therefore \angle C'AD=\angle CAB-\angle CAC'=30°$，

又$\because AC'=AC=3cm$，$\angle C'=\angle C=90°$，

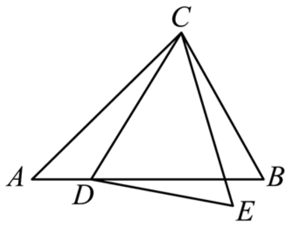
$\therefore C'D=AC'\bullet\tan 30°=\sqrt{3}$，

$\therefore$阴影部分的面积$=\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$．

故选：A．

【点睛】本题考查旋转的性质和解直角三角形．旋转变化前后，对应点到旋转中心的距离相等以及每一对对应点与旋转中心连线所构成的旋转角相等．要注意旋转的三要素：①定点·旋转中心；②旋转方向；③旋转角度

2．（2022·广东·广州天省实验学校九年级阶段练习）如图，Rt△ABC 中，∠ACB＝90°，AB＝5，BC＝3，点 D 是斜边上任意一点，将点 D 绕点 C 逆时针旋转 60°得到点 E，则线段 DE 长度的最小值为（　　）



A．$\frac{12}{5}$　　B．$\frac{6}{5}$　　C．$\frac{5}{2}$　　D．3

【答案】A

【分析】由旋转的性质可证△CDE 为等边三角形，当 DE 最短，CD 最短，CD⊥AB 时，CD 最短，由直角三角形等面积法，即可求得.

【详解】解：由旋转的性质得，CD＝CE，∠DCE＝60°，

∴△CDE 为等边三角形，

∴CD＝CE＝DE，

当 DE 最短，CD 最短，

当 CD⊥AB 时，CD 最短，

此时 $S_{\triangle}ABC$＝$\frac{1}{2}AC\bullet BC$＝$\frac{1}{2}AB\bullet CD$，

即 $AC\bullet BC$＝$AB\bullet CD$，

在 Rt△ABC 中，∠ACD＝90°，AB＝5，BC＝3，

由勾股定理得，AC＝4，

∴3×4＝5CD，

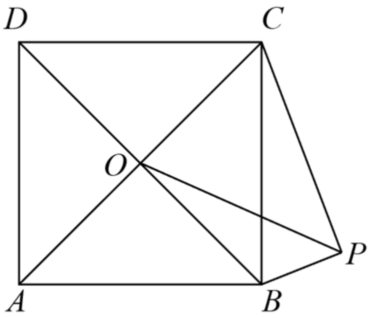
∴CD＝$\frac{12}{5}$，

∴线段 DE 长度的最小值是 $\frac{12}{5}$，

∴故选：A.

【点睛】本题主要考查了旋转以及等边三角形，熟练等面积法是解决本题的关键.

3．（2022·新疆·乌鲁木齐市第 126 中学九年级期末）如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 O 为对角线的交点，点 P 为正方形外一点，且满足∠BPC＝90°，连接 PO．若 PO＝4，则四边形 $OBPC$ 的面积为（　　）

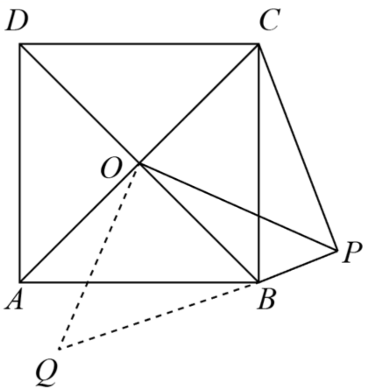


A．6　　　　　　　B．8　　　　　　　C．10　　　　　　　D．16

【答案】B

【分析】先画出将△OCP顺时针旋转90°到△OBQ的位置的图形，再证Q、B、P在同一条直线上，再利用旋转的性质和正方形的性质，证△POQ是直角三角形，求出$S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}OP\bullet OQ=\frac{1}{2}\times4\times4=8$，最后由$S_{四边形OBPC}=S_{\triangle OCP}+S_{\triangle OBP}=S_{\triangle OBQ}+S_{\triangle OBP}=S_{\triangle POQ}$求解．

【详解】解：如图，



∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$OC=OB$，$\angle BOC=90°$，

∴将△OCP顺时针旋转90°，则到△OBQ的位置，

则△OCP≌△OBQ，

∵$\angle BPC=90°$，

∴$\angle OCP+\angle OBP=360°-90°-90°=180°$，

∴$\angle OCP=\angle OBQ$，

∴$\angle OBQ+\angle OBP=180°$，

∴Q、B、P在同一条直线上，

∵$PO=4$，△OCP≌△OBQ，

∴$QO=PO=4$，$\angle COP=\angle BOQ$，

∴$\angle QOP=\angle BOC=90°$，

∴$\triangle POQ$ 是直角三角形，

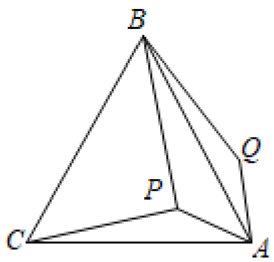
∵$S_{\triangle}POQ=\frac{1}{2}OP \bullet OQ=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$，

∴$S_{四边形}OBPC=S_{\triangle}OCP+S_{\triangle}OBP=S_{\triangle}OBQ+S_{\triangle}OBP=S_{\triangle}POQ=8$，

故选：B．

【点睛】本题属旋转综合题目，考查了旋转的性质，正方形的性质，利用旋转性质和数形结合思想得出 $S_{四边形}OBPC=S_{\triangle}OCP+S_{\triangle}OBP=S_{\triangle}OBQ+S_{\triangle}OBP=S_{\triangle}POQ$ 是解题的关键．

4．（2021·新疆农业大学附属中学九年级期末）如图，P 是等边三角形 ABC 内一点，将△ACP 绕点 A 顺时针旋转 60°得到△ABQ，若 $PA=2$，$PB=4$，$PC=2\sqrt{3}$，则四边形 $APBQ$ 的面积为（　）

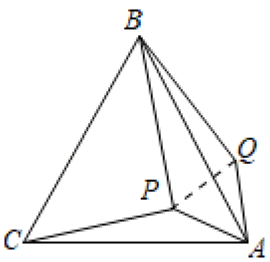


A．$2\sqrt{3}$　　　　B．$3\sqrt{3}$　　　　C．$4\sqrt{3}$　　　　D．$5\sqrt{3}$

【答案】B

【分析】如图，连接 PQ．由题意△PQA 是等边三角形，利用勾股定理的逆定理证明∠$PQB=90°$即可解决问题．

【详解】解：如图，连接 PQ．



∵△ACP 绕点 A 顺时针旋转 60°得到△ABQ，

∴$AP=AQ=2$，$PC=BQ=2\sqrt{3}$，$\angle PAQ=60°$，

∴△PAQ 是等边三角形，

∴$PQ=PA=2$，

$\because PB=4$，

$\therefore PB^2=BQ^2+PQ^2$，

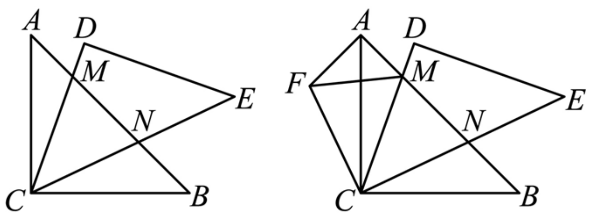
$\therefore \angle PQB=90°$，

$\therefore S_{四边形APBQ}=S_{\Delta PBQ}+S_{\Delta APQ}=\frac{1}{2}\bullet PQ\bullet QB+\frac{\sqrt{3}}{4}\bullet PA^2=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4=3\sqrt{3}$，

故选：B．

【点睛】本题主要考查了等边三角形的性质，旋转的性质以及勾股定理的逆定理，熟练掌握相关内容是解题的关键．

5．（2022·天津·塘沽二中九年级期中）将两块斜边长度相等的等腰直角三角形板如图①摆放，如果把图①中的$\triangle BCN$绕点C逆时针旋转$90°$得$\triangle ACF$，连接MF，如图②．下列结论错误的是（　）



图①　　图②

A．$\triangle ABC\cong\triangle CED$　B．$\triangle BCN\cong\triangle ACF$　C．$\triangle AMC\cong\triangle BCN$　D．$\triangle MFC\cong\triangle MNC$

【答案】C

【分析】根据三角形全等的判定方法一一进行判断即可得到答案．

【详解】解：$\because \triangle ABC$和$\triangle CED$是等腰直角三角形，且斜边相等，

$$\therefore \begin{cases}\angle E=\angle A=45°\\ CE=AB\\ \angle DCE=\angle B=45°\end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle CED\,(\text{ASA})$，

故选项A正确；

根据旋转的性质可得$\triangle BCN\cong\triangle ACF$，

故选项B正确；

$\because AB=BC$，$\angle A=\angle B$，$\angle ACM,\angle BCN$并不一定相等，

$\therefore \triangle AMC,\triangle BCN$不一定全等，

故选项C错误；

$\because \angle DCE=45°$，

$\therefore \angle ACD+\angle NCB=45°$，

$\because \angle FCA=\angle NCB$，

$\therefore \angle ACD+\angle FCA=45°$，

$\therefore \angle ACD+\angle FCA=45°$，

$\therefore \angle FCM=45°$，

$\because \begin{cases} FC=BC \\ \angle DCE=\angle FCM \\ MC=MC \end{cases}$，

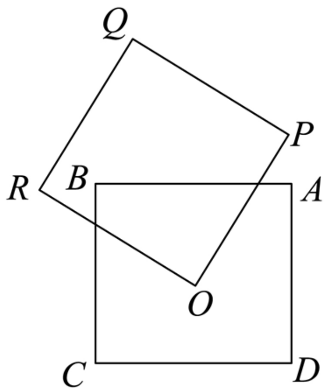
$\therefore \triangle MFC \cong \triangle MNC$，

故选项 D 正确；

故选 C．

【点睛】本题考查等腰直角三角形的性质、旋转的性质和全等三角形的判定，解题的关键是熟练掌握全等三角形的判定方法．

6．（2021·湖北荆州·九年级期中）如图，两个边长都为 2 的正方形 $ABCD$ 和 $OPQR$，如果 O 点正好是正方形 $ABCD$ 的中心，而正方形 $OPQR$ 可以绕 O 点旋转，那么它们重叠部分的面积为(　)

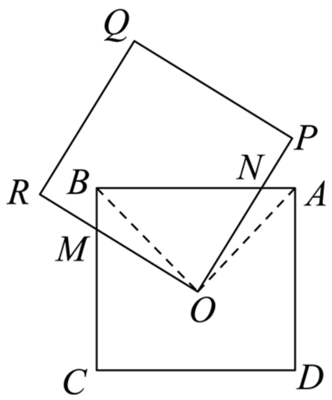


A．4　　　　B．2　　　　C．1　　　　D．$\frac{1}{2}$

【答案】C

【分析】连 OA，OB，设 OR 交 BC 于 M，OP 交 AB 于 N，由四边形 $ABCD$ 为正方形，得到 $OB=OA$，$\angle BOA=90°$，$\angle MBO=\angle OAN=45°$，而四边形 $ORQP$ 为正方形，得$\angle NOM=90°$，所以$\angle MOB=\angle NOA$，则$\triangle OBM \cong \triangle OAN$，即可得到 $S_{四边形}MONB=S\triangle AOB=\frac{1}{4}\times2\times2=1$．

【详解】连 OA，OB，设 OR 交 BC 于 M，OP 交 AB 于 N，如图，



∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴$OB=OA$，$\angle BOA=90°$，$\angle MBO=\angle OAN=45°$，

而四边形 $ORQP$ 为正方形，

∴$\angle NOM=90°$，

∴$\angle MOB=\angle NOA$，

∴$\triangle OBM \cong \triangle OAN$，

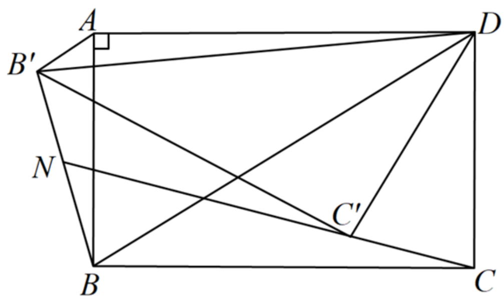
∴$S_{四边形MONB}=S_{\triangle AOB}=\frac{1}{4}\times2\times2=1$，

即它们重叠部分的面积为 1．

故选 C．

【点睛】本题考查了旋转的性质：旋转前后的两个图形全等，对应点与旋转中心的连线段的夹角等于旋转角，对应点到旋转中心的距离相等．也考查了正方形的性质．

7．（2022·重庆一中九年级阶段练习）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABD=60°$，$BD=16$，连接 BD，将$\triangle BCD$ 绕点 D 顺时针旋转 $n°$（$0°<n<90°$），得到 $\triangle B'C'D$，连接 BB'，CC'，延长 CC'交 BB'于点 N，连接 AB'，当$\angle BAB'=\angle BNC$ 时，则$\triangle ABB'$的面积为（　　）

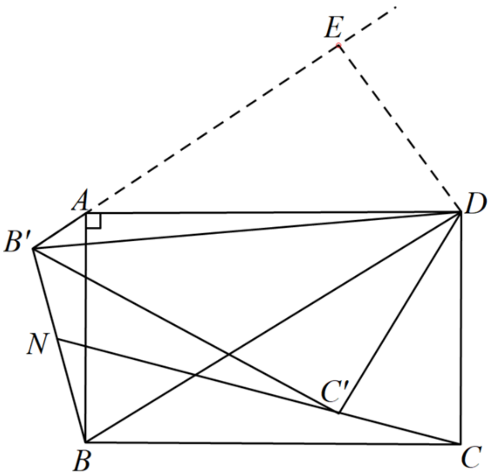


A．$\dfrac{8\sqrt{13}-16\sqrt{39}}{5}$　　B．$\dfrac{21}{10}$　　C．$8\sqrt{39}-24\sqrt{3}$　　D．$\dfrac{9}{4}$

【答案】C

【分析】过点 D 作 $DE\perp AB'$，交 $B'A$ 的延长线于点 E，利用直角三角形的边角关系可得 AD 的长，由旋转可知：$DC=DC'$，$DB=DB'$，$\angle CDC'=\angle BDB'$，得到$\triangle CDC'\backsim\triangle BDB'$，则$\angle DCC'=\angle DBB'$，利用三角形的内角和定理可得$\angle BNC=\angle CDB=60°$，于是$\angle BAB'=60°$；在 $Rt\triangle ADE$ 中利用直角三角形的边角关系可得 AE，DE，在 $Rt\triangle B'DE$ 中，利用勾股定理可求 $B'E$，则 $AB'=B'E-AE$；利用平行线之间的距离相等可得$\triangle ABB'$中 AB'边上的高等于 DE，利用三角形的面积公式结论可求．

【详解】解：过点 D 作 $DE\perp AB'$，交 $B'A$ 的延长线于点 E，如图，



在矩形 $ABCD$ 中，

$\because\angle ABD=60°$，$BD=16$，

$\therefore AD=BC=BD\bullet\sin\angle ABD=16\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}$．

由旋转可知：$DC=DC'$，$DB=DB'$，$\angle CDC'=\angle BDB'$，

$\therefore\dfrac{CD}{C'D}=\dfrac{BD}{B'D}$，

$\therefore\triangle CDC'\backsim\triangle BDB'$．

$\therefore\angle DCC'=\angle DBB'$．

$\therefore\angle BNC=\angle CDB$．

$\because\angle CDB=\angle ABD$，$\angle BNC=\angle BAB'$，$\angle ABD=60°$，

$\therefore\angle BAB'=60°$．

$\because\angle BAD=90°$，

$\therefore\angle EAD=180°-\angle BAB'-\angle BAD=30°$．

$\therefore DE=\dfrac{1}{2}AD=4\sqrt{3}$，

$AE=AD\bullet\cos\angle EAD=8\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12$．

$\therefore B'E = \sqrt{B'D^2 - DE^2} = 4\sqrt{13}$.

$\therefore AB' = B'E - AE = 4\sqrt{13} - 12$.

$\because \angle BAB' = \angle ABD = 60°$,

$\therefore AB' \parallel BD$.

$\therefore \triangle ABB'$中 AB'边上的高等于 DE.

$\therefore S_{\triangle ABB'} = \frac{1}{2} \times AB' \times DE$

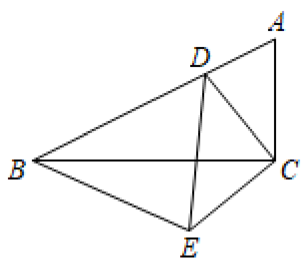
$= \frac{1}{2} \times (4\sqrt{13} - 12) \times 4\sqrt{3}$

$= 8\sqrt{39} - 24\sqrt{3}$.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了矩形的性质，旋转的性质，勾股定理，直角三角形的边角关系，相似三角形的判定与性质，过点 D 作 $DE \perp AB'$，添加适当的辅助线，利用直角三角形的边角关系求得 AB' 的长是解题的关键.

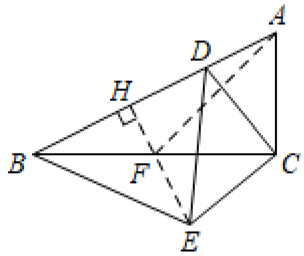
8．(2022·浙江·宁波市镇海区骆驼中学九年级期中）如图，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AC = \frac{1}{2}BC = 2$，点 D 是 AB 上一动点，连接 CD，将线段 CD 绕点 C 逆时针旋转 90°得到线段 CE，连接 DE，BE，当 $\triangle BED$ 面积最大时，AD 的长为（　）



A．2　　　B．$\sqrt{5}$　　　C．$\frac{2}{5}\sqrt{5}$　　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【答案】C

【分析】连接点 A 和 BC 中点 F，过点 F 作 $FH \perp AB$，垂足为点 H，连接 EF，证明点 H、F、E 三点共线，则 EH 为 $\triangle BED$ 的高，根据三角形的面积公式将 $\triangle BED$ 的面积表示出来即可解答.



【详解】

连接点 A 和 BC 中点 F，过点 F 作 $FH\perp AB$，垂足为点 H，连接 EF，

∵点 F 为 BC 中点 F，

$\therefore CF=\frac{1}{2}BC=1$，

$\because \angle ACB=\angle DCE=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ACB-\angle DCF=\angle DCE-\angle DCF$，即 $\angle ACD=\angle FCE$，

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle FCE$ 中，

$$\begin{cases}AC=CF\\ \angle ACD=\angle FCE\\ DC=CE\end{cases}，$$

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle FCE(\mathrm{SSA})$，

$\therefore \angle CFE=\angle CAD$，

$\because FH\perp AB$，

$\therefore \angle ABC+\angle BFH=\angle ABC+\angle CAD=90^{\circ}$，

$\therefore \angle BFH=\angle CAD$，

$\therefore \angle BFH=\angle CFE$，

$\because \angle CFE+\angle BFE=180^{\circ}$，

$\therefore \angle BFH+\angle BFE=180^{\circ}$，则点 H、F、E 三点共线，

故 EH 为 $\triangle BED$ 的高，

设 $AD=x$，则 $EF=x$，

根据勾股定理得：$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore BD=\sqrt{5}-x$，

$\because \angle BFH=\angle CAD$，

$\therefore \triangle BFH\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{BF}{AB}=\dfrac{FH}{AC}$，即 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{FH}{1}$，解得：$FH=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore EH=FH+EF=\dfrac{\sqrt{5}}{5}+x$，

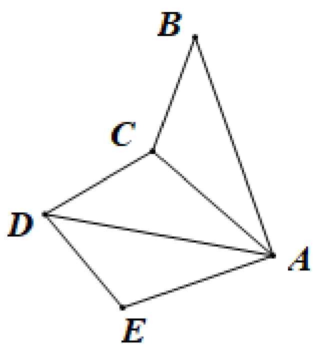
$S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}BD\bullet EH=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-x\right)\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}+x\right)=-\dfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$，

$\therefore$当面积最大时，$x=\dfrac{\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{5}}{5}}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了旋转的性质，勾股定理，全等三角形和相似三角形的判定，以及二次函数的性质，解题的关键是根据题意画出辅助线构造全等三角形.

9.（2020·湖北武汉·模拟预测）如图，将$\triangle ABC$绕点A逆时针旋转60°得到$\triangle ADE$，连接CD．若$\angle CDE=75°$，$AD=6$，则四边形$EACD$面积的最小值是（ ）



A．$9\sqrt{3}-9\sqrt{2}$　　B．$9\sqrt{3}-9$　　C．$9\sqrt{2}-9$　　D．$9\sqrt{3}-9\sqrt{2}+9$

【答案】D

【分析】将四边形的面积转化为$S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BCD}$，再进行分析解答

【详解】由旋转得：$\triangle BAC\cong\triangle DEA$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEA}$，

设四边形$EACD$面积为S，

$\therefore S=S_{\triangle DCA}+S_{\triangle ADE}=S_{\triangle DCA}+S_{\triangle BCA}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BCD}$．

由旋转可知，AB＝AD，而∠DAB＝60°，

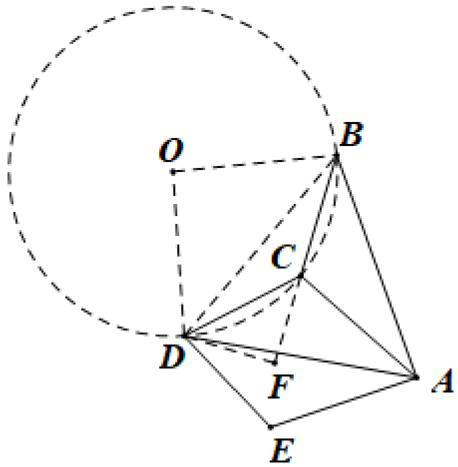
∴△ABD是等边三角形，

$\therefore BD=AD=AB=6$，$\angle ADB=\angle ABD=\angle DAB=60°$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\cdot\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^{2}=9\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle BCD}$ 最大时，S 最小，

作$\triangle DCB$的外接圆O，



易知$\angle DCB=75^{\circ}+60^{\circ}=135^{\circ}$．

$\therefore\angle DOB=90^{\circ}$，$OB=OD=3\sqrt{2}$．

当C为$\overset{\frown}{BC}$中点时，$\triangle DOB$面积最大，

过D作$DF\perp BF$于F，则$\angle DCF=45^{\circ}$．

设$DF=CF=a$，$DC=BC=\sqrt{2}a$．

$\therefore a^{2}+\left(a+\sqrt{2}a\right)^{2}=36$，$a^{2}=18-9\sqrt{2}$．

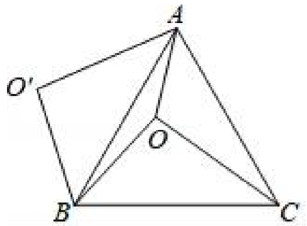
$\therefore S_{\triangle CDB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times a=\frac{\sqrt{2}}{2}a^{2}=9\sqrt{2}-9$．

$\therefore S\geq 9\sqrt{3}-\left(9\sqrt{2}-9\right)=9\sqrt{3}-9\sqrt{2}+9$．

故选 D．

【点睛】本题求面积的最小值，考查的知识点有等边三角形的判定与性质、圆周角定理、旋转的性质、勾股定理等知识，综合性强，难度较大．

10．（2021·广东·广州市第七中学九年级期中）如图，O是正$\triangle ABC$内一点，$OA=3$，$OB=4$，$OC=5$，将线段BO以点B为旋转中心逆时针旋转60°得到线段BO'，下列结论：①$\triangle BO'A$可以由$\triangle BOC$绕点B逆时针旋转60°得到；②点O与O'的距离为4；③$\angle AOB=150^{\circ}$；④$S_{四边形AOBO'}=6+4\sqrt{3}$；⑤$S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}=6+\frac{9}{4}\sqrt{3}$，其中正确的结论是（　　）



A. ①②③⑤　　　B. ①②③④　　　C. ①②④⑤　　　D. ①②③④⑤

【答案】D

【分析】证明△$BO'A$≌△BOC，又∠OBO'=60°，所以△$BO'A$可以由△BOC绕点B逆时针旋转60°得到，故结论①正确；

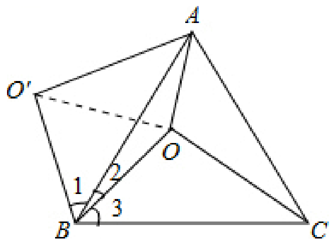
由△OBO'是等边三角形，可知结论②正确；

在△AOO'中，由三边长为3，4，5，得△AOO'是直角三角形；进而求得∠AOB=150°，故结论③正确；

$S_{四边形}AOBO=S_{\triangle}AOO+S_{\triangle}OBO=6+4\sqrt{3}$，故结论④正确；

将△AOC绕A点顺时针旋转60°到△ABO'位置，$S_{四边形}AOBO=S_{\triangle}AOO+S_{\triangle}OBO=6+\frac{9}{4}\sqrt{3}$，故结论⑤正确．

【详解】如图，



由题意可知，∠1+∠2=∠3+∠2=60°，

∴∠1=∠3，

又∵$OB=O'B$，$AB=BC$，

∴△$BO'A$≌△BOC，

又∵∠OBO'=60°，

∴△$BO'A$可以由△BOC绕点B逆时针旋转60°得到，

故结论①正确；

如图，连接OO'，

∵$OB=O'B$，且∠OBO'=60°，

∴△OBO'是等边三角形，

∴$OO'=OB=4$．

故结论②正确；

∵$\triangle BO'A\cong\triangle BOC$，

∴$O'A=5$．

在$\triangle AOO'$中，三边长为3，4，5，这是一组勾股数，

∴$\triangle AOO'$是直角三角形，$\angle AOO'=90°$，

∴$\angle AOB=\angle AOO'+\angle BOO'=90°+60°=150°$，

故结论③正确；

$S_{四边形}AOBO=S_{\triangle}AOO+S_{\triangle}OBO=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=6+4\sqrt{3}$，

故结论④正确；

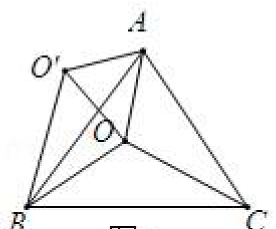


图2

如图2，将$\triangle AOC$绕A点顺时针旋转60°到$\triangle ABO'$位置，

同理可得$S_{\triangle}AOC+S_{\triangle}AOB=S_{四边形}AOBO=S_{\triangle}AOO+S_{\triangle}OBO=6+\frac{9}{4}\sqrt{3}$，故⑤正确；

故选D．

【点睛】本题考查了旋转变换中等边三角形，直角三角形的性质．利用勾股定理的逆定理，判定勾股数3、4、5所构成的三角形是直角三角形，这是本题的要点．

11．（2021·四川内江·一模）一副三角板按图1所示的位置摆放，将$\triangle DEF$绕点$A(F)$逆时针旋转60°后(图2)，测得$CG=10$cm，则两个三角形重叠(阴影)部分的面积为(　　)

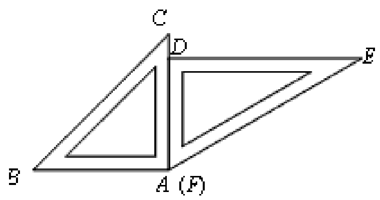


图1

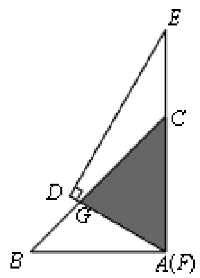


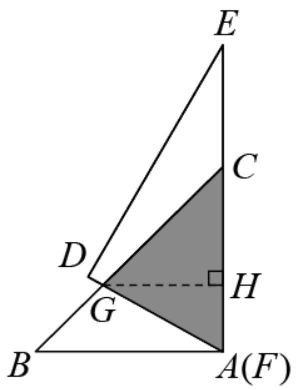
图2

A．$75cm^2$；　　B．$(25+25\sqrt{3})cm^2$；　C．$(25+\frac{25}{3}\sqrt{3})cm^2$；　D．$(25+\frac{50}{3}\sqrt{3})cm^2$

【答案】C

【分析】过点 G 作 $GH\perp AC$，根据题意及三角函数可得 $GH=CH=5\sqrt{2}$，$AH=\frac{5\sqrt{6}}{3}$，结合图形求解即可得出结果.

【详解】解：过点 G 作 $GH\perp AC$，如图所示，



$\angle GAC=60°$，$\angle GCA=45°$，$CG=10$，

在 Rt�GCH 中，

$GH=CH=\frac{\sqrt{2}GC}{2}=5\sqrt{2}$，

在 Rt�AGH 中，

$AH=\frac{\sqrt{3}GH}{3}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore AC=5\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{6}}{3}$，

阴影部分的面积为：$\frac{1}{2}GH\cdot AC=\frac{1}{2}\times 5\sqrt{2}\times\left(5\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)=25+\frac{25\sqrt{3}}{3}$，

故选：C.

【点睛】本题考查旋转、三角形的面积公式，锐角三角函数解三角形等，掌握旋转的特征和三角形的面积公式是解答本题的关键.

12.（2022·福建·厦门市华侨中学九年级期中）如图（1），有两全等的正三角形 ABC，DEF，且 D，A 分别为 $\triangle ABC$，$\triangle DEF$ 的重心.固定 D 点，将 $\triangle DEF$ 逆时针旋转，使得 A 落在 DE 上，如图（2）所示.则图（1）与图（2）中，两个三角形重叠区域的面积比为（　）

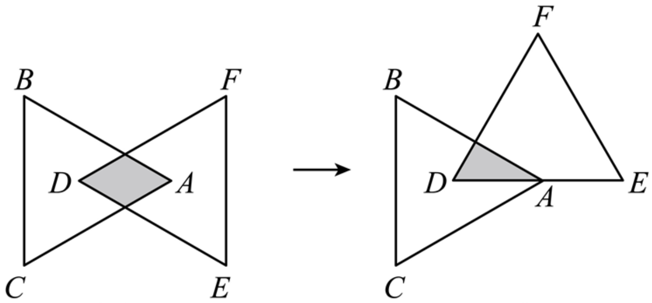


图1　　　　图2

A．2：1　　　B．3：2　　　C．4：3　　　D．5：4

【答案】C

【分析】连接 AD，MN 交于点 O，根据等边三角形的性质及三角形重心的性质得出 $AD=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$\angle ADM=30^\circ$，再结合图形及三角函数计算阴影部分的面积求解即可．

【详解】解：如图所示，连接 AD，MN 交于点 O，

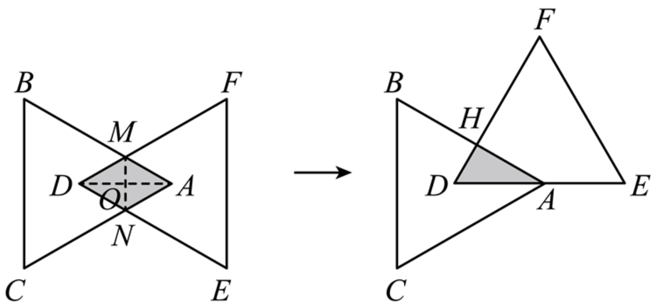
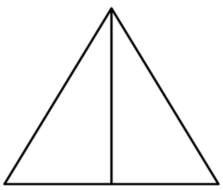


图1　　　　图2

设等边三角形的边长是 x，



则高长为 $\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}x\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，

图（1）中阴影部分为一个内角是 60° 的菱形，

$\therefore AD=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$\angle ADM=30^\circ$，

$\therefore AO=\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt{3}}{6}x$，

$\therefore MO=AO\times\tan30^\circ=\frac{1}{6}x$，

$\therefore MN=\frac{1}{3}x$，

则阴影部分的面积为：$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}x\times\frac{1}{3}x=\frac{\sqrt{3}}{18}x^2$，

图 2 中，$AD=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$\angle DAB=30°$，

$\therefore\angle DHA=90°$，

$\therefore DH=\frac{1}{2}\times AD=\frac{\sqrt{3}}{6}x$，

$\therefore AH=\frac{1}{2}x$，

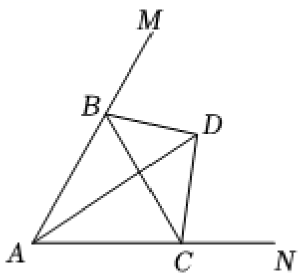
∴阴影部分的面积为：$\frac{1}{2}\times AH\times DH=\frac{\sqrt{3}}{24}x^2$，

两个重叠区域的面积比为：$\frac{\sqrt{3}}{18}x^2:\frac{\sqrt{3}}{24}x^2=4:3$，

故选：C．

【点睛】题目主要考查等边三角形的性质及解三角形的应用，菱形的性质等，理解题意，作出相应辅助线及掌握三角形重心的性质是解题关键．

13．(2021·湖北武汉·九年级期中）如图，∠MAN＝60°，点 B、C 分别在 AM、AN 上，AB＝AC，点 D 在∠MAN 内部、△ABC 外部，连接 BD、CD、AD．下列结论：①$DB+DC\geq DA$；②$S\triangle BDC\leq\frac{1}{2}BD\cdot DC$；③若 DB＝m，DC＝n，则 $S\triangle ADB\leq\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+\frac{1}{2}mn$．其中错误的结论个数为（　　）个．



A．0　　　　　　B．1　　　　　　C．2　　　　　　D．3

【答案】A

【分析】①将△ACD 绕点 A 逆时针旋转 60°得到△ABC'，可证得△$AC'D$ 是等边三角形，再运用三角形三边关系即可判断①正确；

②过点 C 作 $CH\perp BD$ 于 H，则∠BHC＝90°，根据 $S\triangle BDC$＝$\frac{1}{2}BD\cdot CH$，由垂线段最短判断出②正确；

③把△BDC 绕点 B 顺时针旋转 60°得到△ABK，连接 DK，由旋转的性质可证得△BDK 是等边三角形，分 K 落在△ABD 的边上、内部、外部讨论即可判断③正确．

【详解】解：①如图 1，将△ACD 绕点 A 逆时针旋转 60°得到△ABC'，

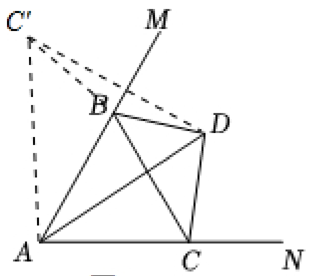


图1

则△ABC'≌△ACD，

∴$AC'=AD$，$BC'=CD$，

∵∠$DAC'=60°$，

∴△$AC'D$ 是等边三角形，

∴$C'D=AD$，

在△$BC'D$ 中，$BC'+BD>C'D$，

∴$CD+BD>AD$，

当∠$ADC=60°$，即∠$AC'B=60°$时，C'、B、D 三点共线，

∴$CD+BD=AD$，

故①正确；

②如图 2，过点 C 作 $CH\perp BD$ 于 H，

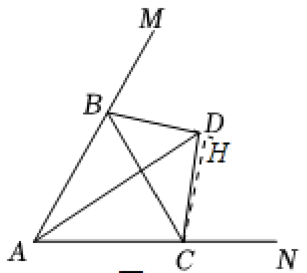


图2

则∠$BHC=90°$，

∴$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BD\cdot CH$，

由垂线段最短知，$CH\leq CD$，

∴$S_{\triangle BDC}\leq\frac{1}{2}BD\cdot CD$，

故②正确；

③把△BDC 绕点 B 顺时针旋转 60°得到△ABK，连接 DK，

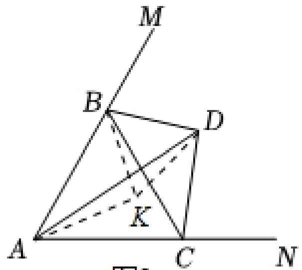
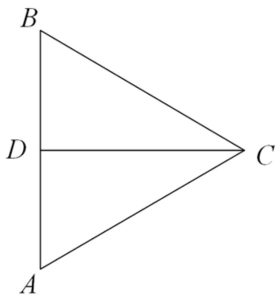


图3

由旋转得：$BD=BK$，$\angle DBK=60°$，

$\therefore\triangle BDK$ 是等边三角形，

（推导等边三角形的面积公式如下：



$S\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AB\cdot\sqrt{BC^2-\left(\frac{1}{2}BC\right)^2}=\frac{1}{2}AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$）

$\therefore S\triangle BDK=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2$，

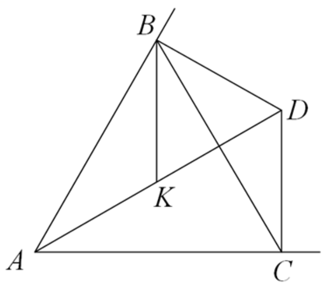
$\because\triangle ABK\cong\triangle BDC$（根据旋转的性质），

当 K 落在 $\triangle ABD$ 外部时，$S\triangle ABK=S\triangle BDC\le\frac{1}{2}BD\cdot CD$，

即 $S\triangle ABK\le\frac{1}{2}mn$，

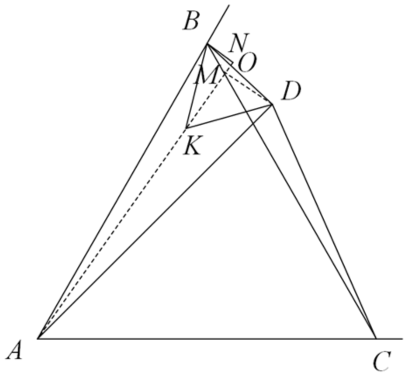
$\therefore S\triangle ABD<S\triangle ABK+S\triangle BDK\le\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+\frac{1}{2}mn$，

当 K 落在 AD 边上时，



$S\triangle ABD=S\triangle ABK+S\triangle BDK\le\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+\frac{1}{2}mn$，

当 K 落在△ABD 内部时，



过点 B、D 分别作 $BN\perp AK$ 于 N，$DM\perp AK$ 于 M，设 AK 与 BD 交于点 O，

$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BDK}+S_{\triangle ABK}+S_{\triangle ADK}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+\frac{1}{2}AK\cdot BN+\frac{1}{2}AK\cdot DM=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+\frac{1}{2}AK（BN+DM）$

$\because BO\geq BN$，$OD\geq DM$，

$\therefore S_{\triangle ABD}\leq\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+\frac{1}{2}AK（OB+OD）=\frac{\sqrt{3}}{4}m^2+\frac{1}{2}mn$

故③正确；

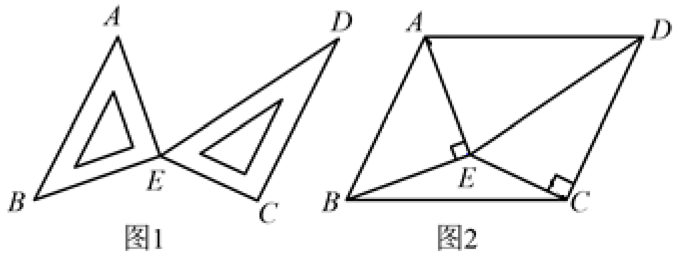
综上所述，正确的结论为 3 个，错误的结论为 0 个，

故选：A．

【点睛】本题考查了等边三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，旋转变换的性质，三角形面积等知识点，解题关键是利用旋转变换构造全等三角形．

二、填空题

14．（2022·浙江宁波·一模）如图，一副三角板如图 1 放置，$AB=CD=\sqrt{6}$，顶点 E 重合，将$\triangle DEC$绕其顶点 E 旋转，如图 2，在旋转过程中，当$\angle AED=75°$，连接 AD，BC，此时四边形 $ABCD$ 的面积是________．



【答案】$2\sqrt{3}+3$

【分析】延长 CE 交 AB 于点 F，先根据特殊直角三角形的性质和$\angle AED=75°$，推出 $AB\parallel CD$，从而可证四边形 $ABCD$ 为平行四边形，再根据等腰直角三角形的性质求出 EF 长，则可求出 CF 长，最后计算平行四边形 $ABCD$ 的面积即可.

【详解】解：如图 2，延长 CE 交 AB 于点 F，

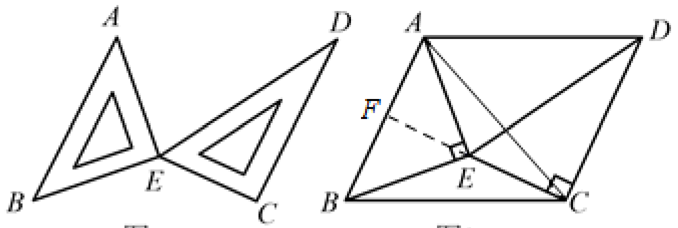


图1　　图2

$\because \angle AED=75°$，

$\therefore \angle EAD+\angle ADE=180°-\angle AED=105°$，

又 $\angle BAE+\angle CDE=45°+30°=75°$，

$\therefore \angle BAD+\angle CDA=\angle BAE+\angle CDE+\angle EAD+\angle ADE=180°$，

$\therefore AB\parallel CD$，

$\because AB=CD$，

$\therefore$四边形是 $ABCD$ 平行四边形，

$\because CE\perp CD$，

$\therefore CE\perp AB$，即 $EF\perp AB$，

$\therefore EF=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$EC=\frac{\sqrt{3}}{3}CD=\sqrt{2}$，

$\therefore CF=EC+EF=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=AB\times CF=\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{6}=2\sqrt{3}+3$.

故答案为：$2\sqrt{3}+3$.

【点睛】本题考查了旋转的性质，平行四边形的判定和平行四边形面积的计算，先证出四边形 $ABCD$ 是平行四边形是解题的关键.

15.（2022·天津市第五十五中学九年级期中）如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，点 D 是 AC 的中点，将 CD 绕着点 C 逆时针旋转，在旋转的过程中点 D 的对应点为点 E，连接 AE、BE，则$\triangle AEB$ 面积的最小值是_______.