排　　队　　论

Queueing Theory

What is Queueing Theory?

- 排队论是研究系统由于随机因素的干扰而出现排队（或拥塞）现象的规律性的一门学科，它适用于一切服务系统，包括通信系统，交通与运输系统，生产与服务系统，存储与装卸系统，管理运筹系统以及在电子计算机系统等等。可以说，凡是出现拥塞现象的系统，都属于随机服务系统。
- (Kleinrock) “We study the phenomena of standing, waiting, and serving, and we call this study Queueing Theory.” “Any system in which arrivals place demands upon a finite capacity resource may be termed a queueing system.”

Why Should We Study This Subject?

- 与生活实际紧密相关，与国家需求紧密相关

- 与数学建模紧密相关，与比赛成绩紧密相关

机场出租车司机综合决策及机场出租车管理模型

摘要

本文针对送客到机场后出租车司机的决策问题，基于排队论、收益与成本博弈，建立了数学模型，为出租车司机提供了选择决策，给出了总乘车效率高时的乘车点安排以及有“优先权”的出租车安排方案。

为了研究出租车司机的选择策略，本文建立了出租车司机选择决策模型。考虑到天气，时间，航班抵达量等因子对决策的影响，建立了乘客抵达量与出租车需求模型，并根据排队论中的生灭过程理论构建了蓄车池等待时间模型。在分析了两种决策各自的收益情况和时间特性并综合订单价格的情况下，从两种决策的成本和收益出发，建立了净收益模型，并通过比较净收益的方式构建决策模型，即司机总会选择净收益大的决策执行。

2019年数学建模竞赛C题

How to Study This Subject?

- 研究问题

(1) 性能分析问题

等待时间、逗留时间、系统人数、服务时间等等.

(2) 统计问题

参数估计问题、分布推断问题等

(3) 优化问题

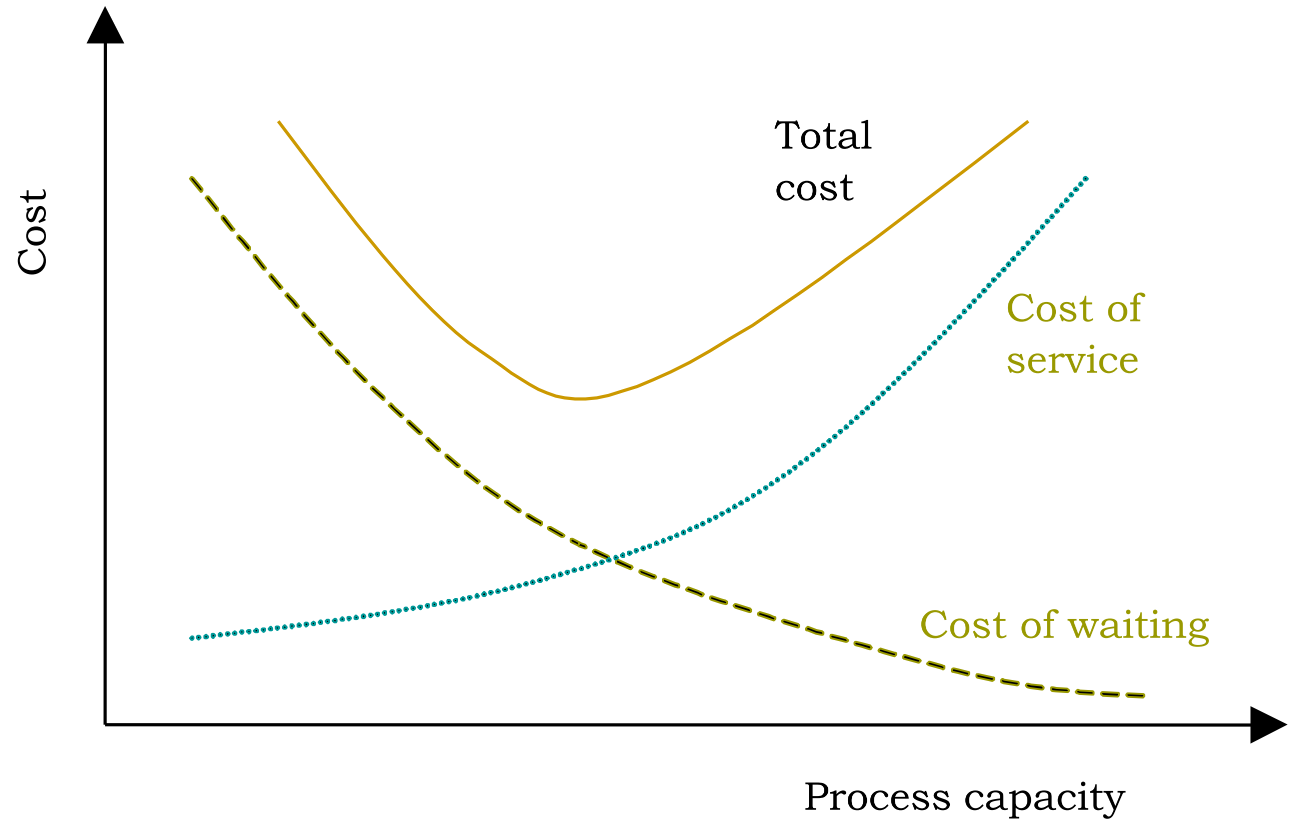
通过理论分析构造相应的优化问题，通过对优化问题的求解反过来对系统参数进行优化等

- 研究方法

建立排队模型，利用递归、差分、母函数等经典方法分析稳态行为

A Cost/Capacity Tradeoff Model

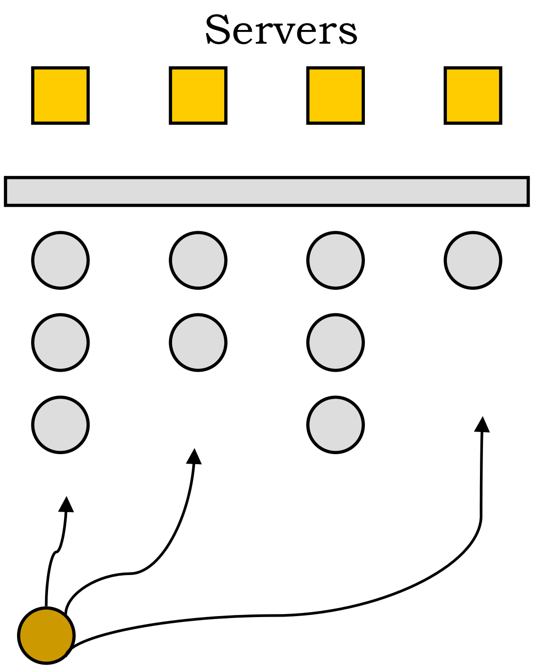
权衡



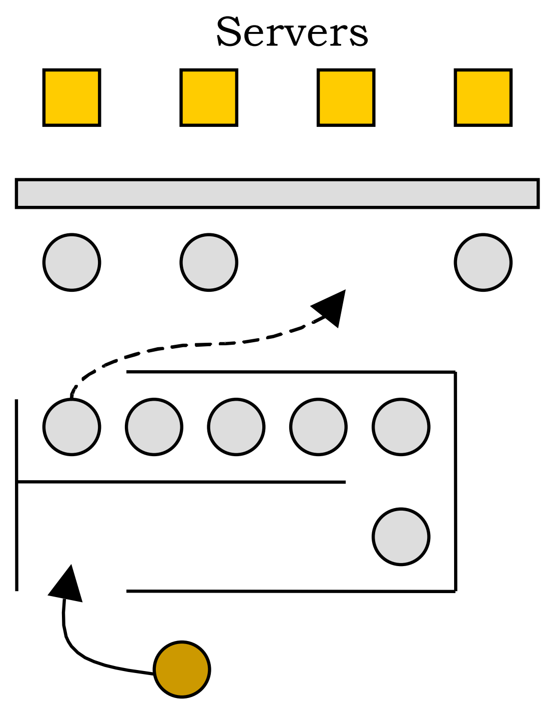
Two Queue Configurations

两种排队方式

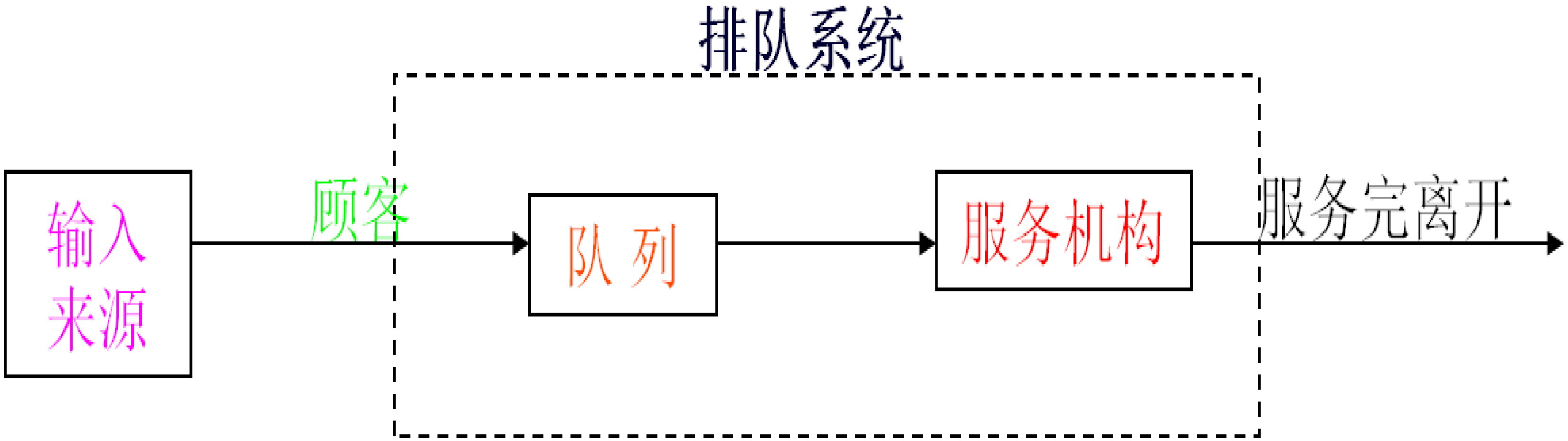
Multiple Queues



Single Queue



排队论中的基本术语(Basic Terminology of Queueing Theory)



Three Main Concepts in Queueing Theory

- Customers（顾客）
- Queues & Queueing Discipline（排队规则）
- Servers (or Service Mechanism) （服务机构）

Customer

- 凡是服务系统为之服务的对象皆称为顾客
- 顾客的数量——有限/无限
- 顾客到达的间隔时间服从某一概率分布

定长分布

Degenerate (or deterministic) distribution

指数分布和爱尔朗分布

Exponential and Erlang distributions

一般分布和一般独立分布

General and general independent distribution

Queue and Queueing Discipline

- 队列容量——有限/无限
- 排队规则

  损失制

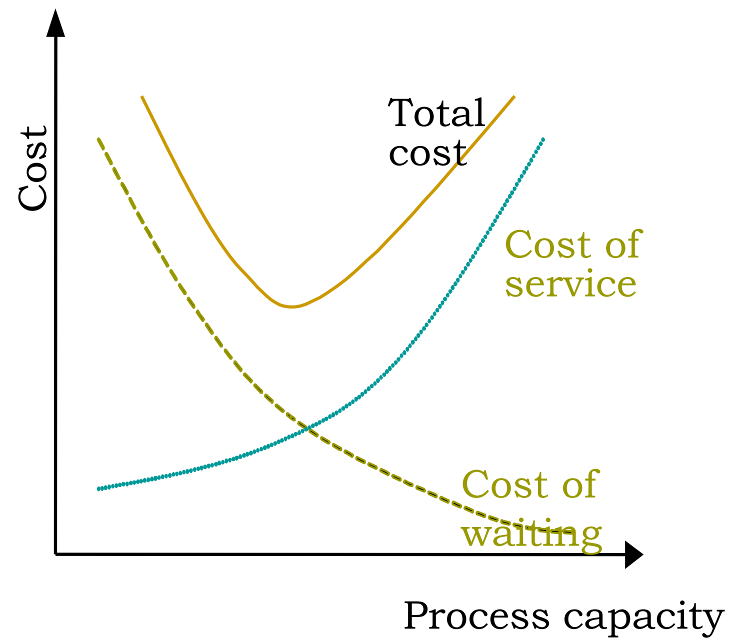
  等待制

  - 先到先服务first-come-first-served (FCFS)
  - 后到先服务last-come-first-served (LCFS)
  - 随机服务random service
  - 优先权服务priority

  混合制

Server

- 服务机构的数量是多少？



- 服务时间服从什么分布？

Kendall’s Notation for Classification of Queue Types(1951)

- A/B/C/X/Y/Z

A: 顾客到达时间间隔分布

B: 服务时间分布

C: 服务台的个数

X: 系统的最大容量

Y: 顾客的规模

Z: 服务规则

- A/B可任取右边分布类型

M	指数分布 Exponential Distribution(Markovian)
D	定长分布 Degenerate (or Deterministic) Distribution
E_k	爱尔朗分布 Erlang Distribution (k = shape parameter)
G	一般分布 General Distribution (arbitrary distribution)

Examples

- M/M/n排队模型表示顾客相继得到系统的时间间隔服从负指数分布，而服务时间也服从负指数分布，系统内设有n个服务窗，系统容量为无限大的等待制排队模型。
- M/M/n/m排队模型表示顾客到达系统的间隔时间和服务时间均为服从负指数分布，有n个服务窗且系统容量为m的损失制模型。
- G/M/1排队模型表示顾客到达的间隔时间为一般分布，服务时间为负指数分布，只设有一个服务窗的等待制排队模型。

Examples (continued)

- G/GI/1排队模型表示间隔时间为一般分布，服务时间为一般独立分布，只设有一个服务窗且系统容量为无限的等待制排队模型。
- M^k/M/1排队模型表示每批有k个顾客到达系统，且批与批到达时间是负指数分布，服务时间为负指数分布，只有一个服务窗，且系统容量为无限的等待制排队模型。
- M/M/n/m/m排队模型表示顾客到达的间隔时间与服务时间均为负指数分布，系统内有n个服务窗，顾客源为m且系统容量也为m 的闭合式排队模型。

其它记号(Other Notation)

- *ELs* 系统平均队长

expected number of customers in the queueing system

- *ELq* 平均等待队长

expected queue length(excludes customers being served)

- *EWs* 平均逗留时间

expected waiting time in system for each customer

- *EWq* 平均等候时间

expected waiting time in queue (excludes service time) for each customer

其它记号(Other Notation)

$N(t)$	在时间 t 排队系统中顾客的数量
$P_n(t)$	在时间t,排队系统中恰好有n个顾客的概率
s	服务台的数目
λ_n	系统有n个顾客时的平均到达率（单位时间平均到达的顾客人数即是平均到达率）(mean arrival rate)
μ_n	系统有n个顾客时的平均服务率(mean service rate)
λ	对任何n都是常数的平均到达率.
μ	对任何n都是常数的平均服务率.
$1/\lambda$	期望到达间隔时间
$1/\mu$	期望服务时间
ρ	服务强度(traffic intensity)， 或称使用因子, $\lambda/(s\mu)$

Little’s Law

设顾客按泊松流到达系统, 平均强度为λ, 而服务窗的服务时间为负指数分布, 平均服务率为μ, 那么Little公式为

$$L_s = \lambda W_s \qquad L_q = \lambda W_q$$

Little’s Law是麻省理工学院的史隆管理学院 (Sloan School of Management) 讲座教授John D. C. Little 於1961年想出來的。他被公认为市场科学 (Marketing Science) 的奠基者。

排队论中用到的一些统计分布(Statistical Distribution Used in Queueing Theory)

- 泊松分布

《Recherches sur la probabilité des jugements en matières criminelles et matière civil》

- 负指数分布
- Erlang分布
- 广义Erlang分布
- 超指数分布

泊松分布(Poisson Distribution)

记$N(t)$为时间区间[0,t]内到达的事件数;令

$$P_n(t_1,t_2)=P\{N(t_2)-N(t_1)=n\} \qquad (t_2>t_1) \qquad n\geq 0$$

倘若它满足下面三个条件:

(a) 不重叠的区间内到达的顾客是彼此独立的

(b) $P_1(t_1,t_1+\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty}P_n(t,t+\Delta t)=o(\Delta t)$

那么就称顾客到来的事件流是一泊松流.简记$P_n(t)=P_n(0,t)$

泊松分布(Poisson Distribution)

- 容易验证：

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\qquad n=0,1,2,3,\cdots\cdots(t>0)$$

- 泊松流的合成与分解

定理：设$\{N_1(t),t\geq 0\}$与$\{N_2(t),t\geq 0\}$分别是参数为λ_1,λ_2的Poisson流,且它们相互独立,则合成流$\{N_1(t)+N_2(t),t\geq 0\}$是参数为$\lambda_1+\lambda_2$的Poisson流。

泊松分布(Poisson Distribution)

- 定理：设$\{N(t),t\geq 0\}$是参数为λ的Poisson流，每一到达顾客以概率p(0<p<1)进入系统,令$\tilde{N}(t)$表示(0,t] 内到达且进入系统的顾客数，则$\{\tilde{N}(t),t\geq 0\}$为参数为λp的Poisson流.

指数分布 (Exponential Distribution)

随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & for \quad x\geq 0\\ 0 & for \quad x<0\end{cases}$$

EX=？ DX=？

指数分布的性质(Properties of Exponential Distribution)

- 无记忆性 $P(T > t + \Delta t \mid T > \Delta t) = P(T > t)$

$$P(T > t + \Delta t \mid T > \Delta t)$$

$$= \frac{P(T > t + \Delta t, T > \Delta t)}{P(T > \Delta t)}$$

$$= \frac{P(T > t + \Delta t)}{P(T > \Delta t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda(\Delta t)}} = \frac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda \Delta t}}{e^{-\lambda \Delta t}} = e^{-\lambda t} = P(T > t)$$

超指数分布(Hyperexponential Distribution)

- 随机变量T的概率密度为

$$f(t)=\sum_{i=1}^{k}\theta_i\mu_i e^{-\mu_i t}$$

其中$\theta_i > 0, \sum\theta_i = 1$

则称T服从k阶超指数分布的随机变量

ET=?　　　DT=?

Erlang分布 (Erlang Distribution)

记各事件到达系统的时间间隔序列为 $T_1, T_2, \cdots T_i, \cdots$ 且它们是同负指数分布的随机变量序列，如令

$$T_1' = \sum_{i=1}^{k} T_i, T_2' = \sum_{i=1}^{k} T_{i+k}, \cdots$$

则称 T_1' T_2' T_3' ……是k阶Erlang流。

记 $T = \sum_{i=1}^{k} T_i$ 则其概率密度为

$$f_T(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \qquad (t > 0, \lambda > 0)$$