第五节

第五章

反常积分的审敛法 Γ函数

反常积分 $\begin{cases}\text{无穷限的反常积分} \\ \text{无界函数的反常积分}\end{cases}$

一、无穷限反常积分的审敛法

二、无界函数反常积分的审敛法

一、无穷限的广义积分的审敛法

不通过被积函数的原函数判定广义积分收敛性的判定方法.

定理 1　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$. 若函数 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界，则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

由定理1，对于非负函数的无穷限的广义积分有以下比较收敛原理.

定理2（比较审敛原理） 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，如果 $0 \le f(x) \le g(x)$ $(a \le x < +\infty)$，并且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛；如果 $0 \le g(x) \le f(x)$ $(a \le x < +\infty)$，并且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

证 设 $a < b < +\infty$，由 $0 \le f(x) \le g(x)$ 及 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，得

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

即 $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有上界

由定理1知 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

如果 $0 \le g(x) \le f(x)$, 且 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散,

则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 必定发散

Q 如果 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，由第一部分

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 也收，这与假设矛盾.

例如, 广义积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\ (a>0) \begin{cases} 当\ p>1\ 时收敛 \\ 当\ P \le 1\ 时发散 \end{cases}$

定理3(比较审敛法 1) 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$ $(a>0)$上连续，且$f(x)\geq 0$. 如果存在常数$M>0$及$p>1$，使得$f(x)\leq \frac{M}{x^p}$ $(a\leq x<+\infty)$,则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛；如果存在常数$N>0$，使得$f(x)\geq \frac{N}{x}$ $(a\leq x<+\infty)$,则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散.

例 1 判别广义积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$的收敛性

解 Q $0<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=\frac{1}{x^{4/3}}$, $p=\frac{4}{3}>1$,

根据比较审敛法 1，

广义积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$收敛

定理4(极限审敛法1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$. 如果存在常数 $p>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 存在，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$ (或 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=+\infty$), 则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

例２ 判别广义积分 $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的收敛性

解 $\because \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}=1$, 所给广义积分收敛.

例３　判别广义积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{3/2}}{1+x^2}dx$的收敛性

解　Q $\lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{x^{3/2}}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{x}}{1+x^2}=+\infty$,

根据极限审敛法１，所给广义积分发散.

例４　判别广义积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{\arctan x}{x}dx$的收敛性

解　$\lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$,

根据极限审敛法１，所给广义积分发散.

定理5 设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上连续，如果$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛；则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$也收敛

证 令$\varphi(x)=\frac{1}{2}(f(x)+|f(x)|)$.

Q $\varphi(x)\geq 0$，且$\varphi(x)\leq|f(x)|$，$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，

$\therefore\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$也收敛. 但$f(x)=2\varphi(x)-|f(x)|$，

$$\therefore\int_a^b f(x)dx=2\int_a^b\varphi(x)dx-\int_a^b|f(x)|dx,$$

即 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=2\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx-\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$. 收敛

.

定义 满足定理5条件的广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$称为绝对收敛

绝对收敛的广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 必定收敛

例5 判别广义积分$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$ (a,b 都是常数$a>0$) 的收敛性

解 Q $\left|e^{-ax}\sin bx\right| \le e^{-ax}$,而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ 收敛.

$\therefore \int_0^{+\infty}\left|e^{-ax}\sin bx\right|dx$ 收敛. 所以所给广义积分收敛.

二、无界函数的广义积分的审敛法

定理6(比较审敛法2) 设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，且$f(x)\geq 0$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.如果存在常数$M>0$及$q<1$，使得$f(x)\leq \dfrac{M}{(x-a)^q}$ $(a<x\leq b)$,则广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛；如果存在常数$N>0$及$q\geq 1$，使得$f(x)\geq \dfrac{N}{(x-a)^q}$ $(a<x\leq b)$,则广义积分$\int_a^b f(x)dx$发散.

定理 7(极限审敛法2)　设函数$f(x)$在区间$(a,b]$上连续，且$f(x)\ge 0$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$. 如果存在常数$0<q<1$，使得$\lim\limits_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)$存在，则广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛；

如果存在常数$q\ge 1$，使得$\lim\limits_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)=d>0$(或$\lim\limits_{x\to a+0}(x-a)^q f(x)=+\infty$)，则广义积分$\int_a^b f(x)dx$发散.