人教A版2019必修第二册

第六章《平面向量及其应用》

6.3.1平面向量基本定理

学习目标

1.理解平面向量基本定理及其意义；■

2.会用基底表示某一向量；

3.通过学习平面向量基本定理，让学生体验数学的转化思想，培养学生发现问题的能力。

环节一：创设情境，引入课题

我们知道,已知两个力,可以求出它们的合力;反过来,一个力可以分解为两个力.如图6.3－1,我们可以根据解决实际问题的需要,通过作平行四边形,将力$\vec{F}$分解为多组大小、方向不同的分力.

由力的分解得到启发,我们能否通过作平行四边形,将向量$\vec{a}$分解为两个向量,使向量$\vec{a}$是这两个向量的和呢?

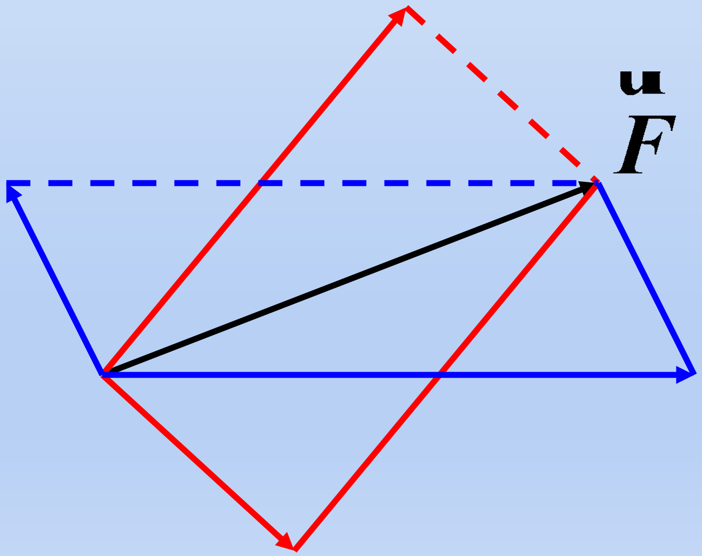


图6.3-1

如图6.3－3，过点C作平行于直线OB的直线，与直线OA交于点M；过点C作平行于直线OA的直线，与直线OB交于点N，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，由$\overrightarrow{OM}$与$\vec{e_1}$共线，$\overrightarrow{ON}$与$\vec{e_2}$共线可得，存在实数$\lambda_1,\lambda_2$，使得$\overrightarrow{OM}=\lambda_1\vec{e_1}$，$\overrightarrow{ON}=\lambda_2\vec{e_2}$，所以$\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$，也就是说，与$\vec{e_1},\vec{e_2}$都不共线的向量$\vec{a}$都可以表示成$\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$的形式.

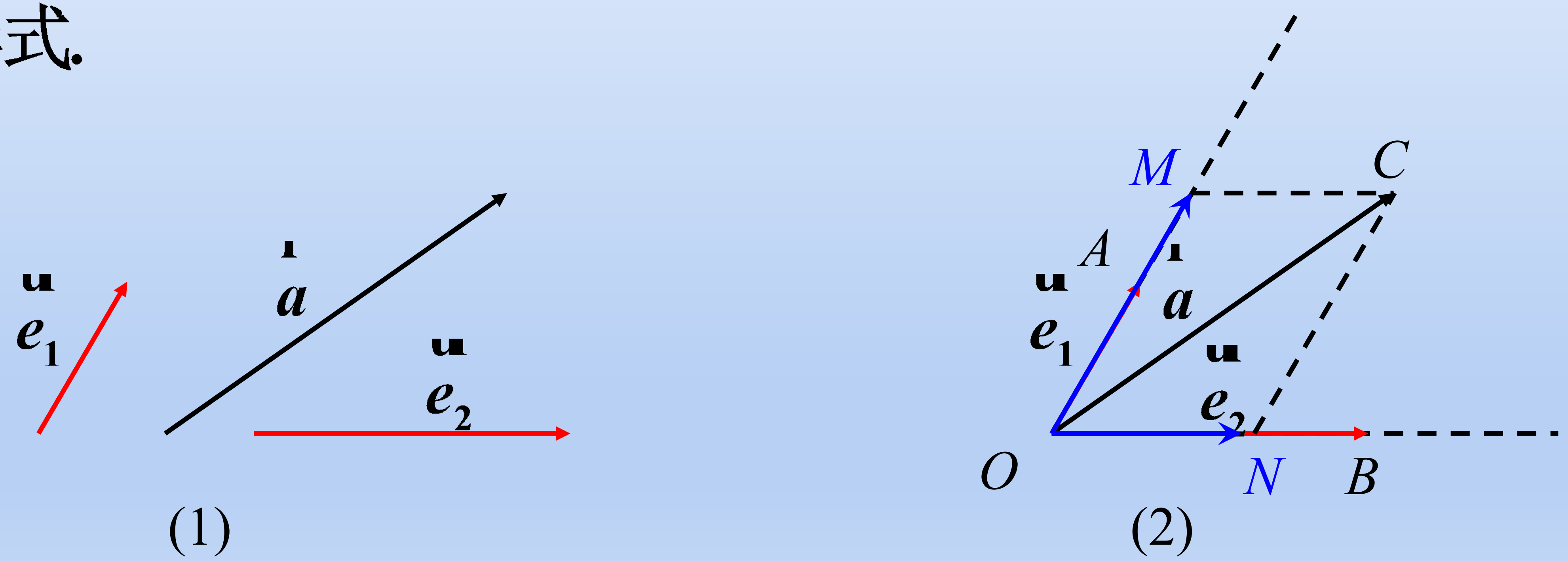
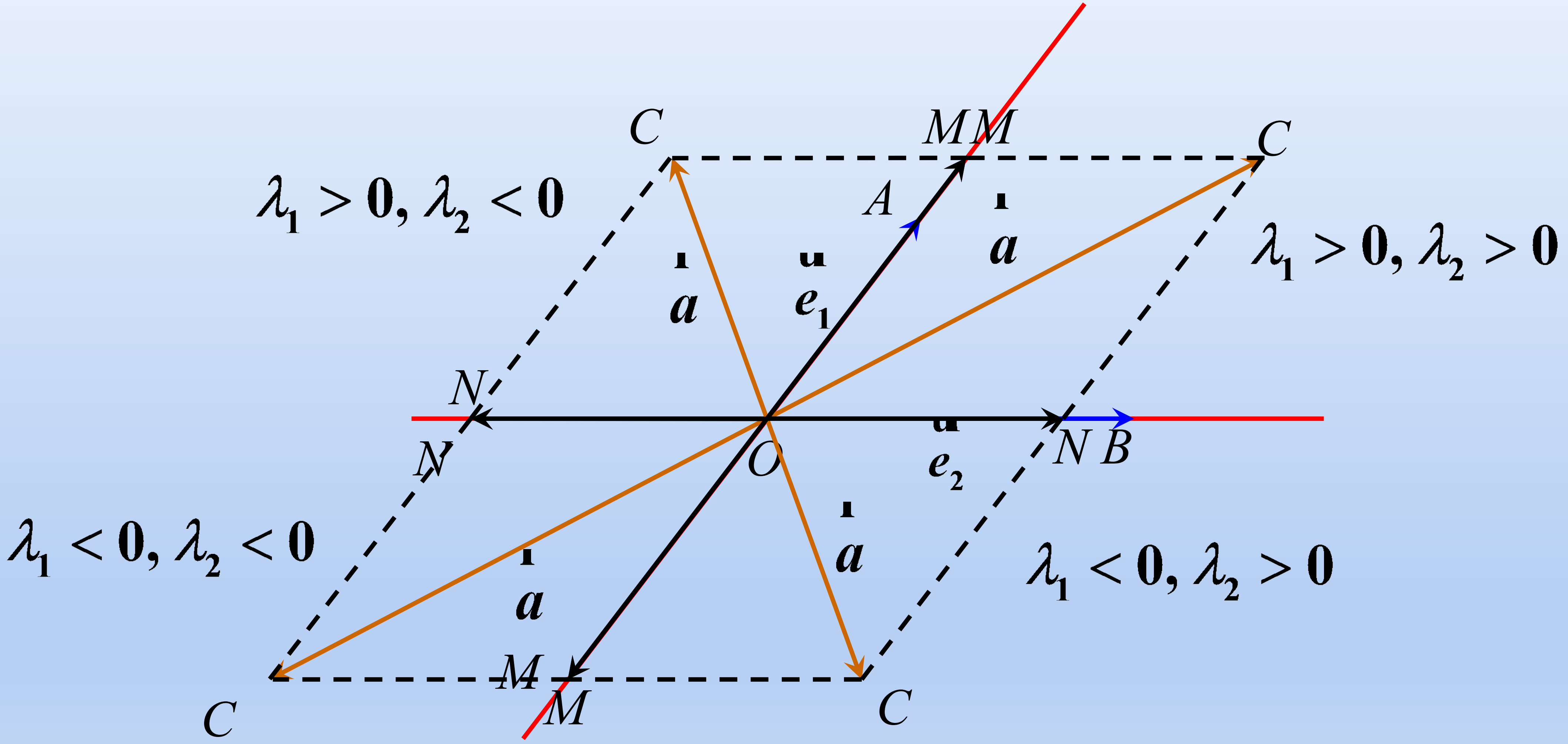


图6.3-2



$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$
C
M M
C
A
$\vec{a}$
$\vec{e}_1$
N
N
O
$\vec{e}_2$
N B
M
M
C
C

环节二：观察分析，感知概念

当$\vec{a}$是与$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$共线的非零向量时, $\vec{a}$也可以表示成$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2$的形式;

当$\vec{a}$是零向量时, $\vec{a}$ 同样也可以表示成$\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2$的形式. (为什么?)

若$\vec{a}$与$\vec{e}_1$(或$\vec{e}_2$)共线, 则有$\lambda_2=0$(或$\lambda_1=0$), 使得$\vec{a}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2$

若$\vec{a}=\vec{0}$, 则有且只有$\lambda_1=\lambda_2=0$, 使得$\vec{0}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2$

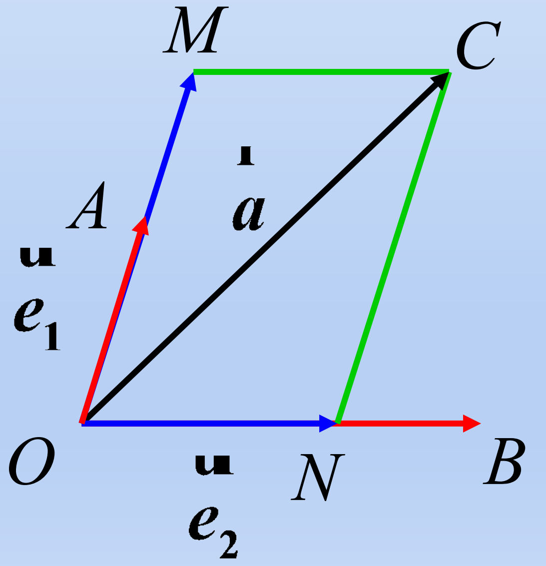


图6.3-3

上述讨论表明，平面内任一向量$\vec{a}$都可以按$\vec{e_1}, \vec{e_2}$的方向分解，表示成$\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$的形式，而且这种表示形式是唯一的。事实上，如果$\vec{a}$还可以表示成$\mu_1\vec{e_1}+\mu_2\vec{e_2}$的形式，那么$\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}=\mu_1\vec{e_1}+\mu_2\vec{e_2}$可得$(\lambda_1-\mu_1)\vec{e_1}+(\lambda_2-\mu_2)\vec{e_2}=\vec{0}$，由此式可以推出$\lambda_1-\mu_1, \lambda_2-\mu_2$全为0.

假设$\lambda_1-\mu_1, \lambda_2-\mu_2$不全为0，不妨假设$\lambda_1-\mu_1\neq 0$，$\vec{e_1}=-\dfrac{\lambda_2-\mu_2}{\lambda_1-\mu_2}\vec{e_2}$.

由此得到$\vec{e_1}, \vec{e_2}$共线。这与已知$\vec{e_1}, \vec{e_2}$不共线矛盾），

即$\lambda_1=\mu_1, \lambda_2=\mu_2$. 也就是说，有且只有一对实数$\lambda_1, \lambda_2$，使$\vec{a}=\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}$

环节三：抽象概括，形成概念

平面向量基本定理

设$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$是同一平面内两个**不共线**的向量，则该平面内的任意

一个向量$\boldsymbol{a}$，都**存在唯一**的一对实数λ_1, λ_2，使得：

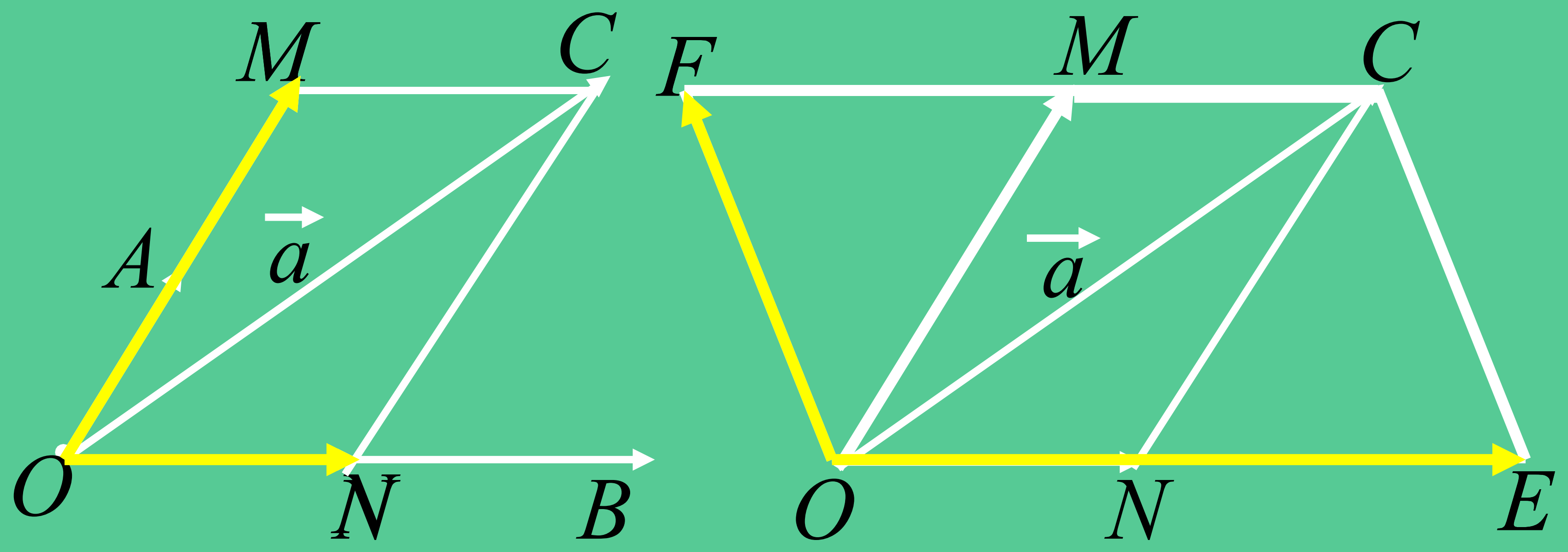
$$\boldsymbol{a} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2\boldsymbol{e}_2$$

由平面向量基本定理可知，任一向量都可以由同一个基底唯一表示，这为我们研究问题带来了极大的方便．

此时将$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$称作该平面所有向量的一组**基底**

思考

（1）一组平面向量的基底有多少对？
（有无数对）



思考

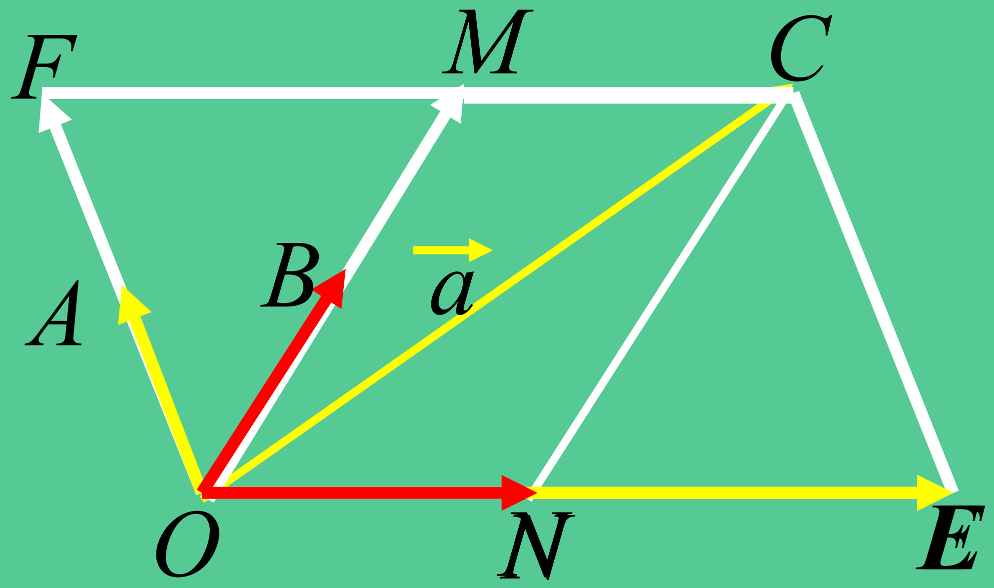
(2)若基底选取不同，则表示同一向量的实数 λ_1、λ_2是否相同？

（可以不同，也可以相同）

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{ON}$$



环节四：辨析理解，深化概念

例1 如图6.3－4，$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$不共线，且$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，用$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$表示$\overrightarrow{OP}$.

因为$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$,

所以$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$

$=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}$

$=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

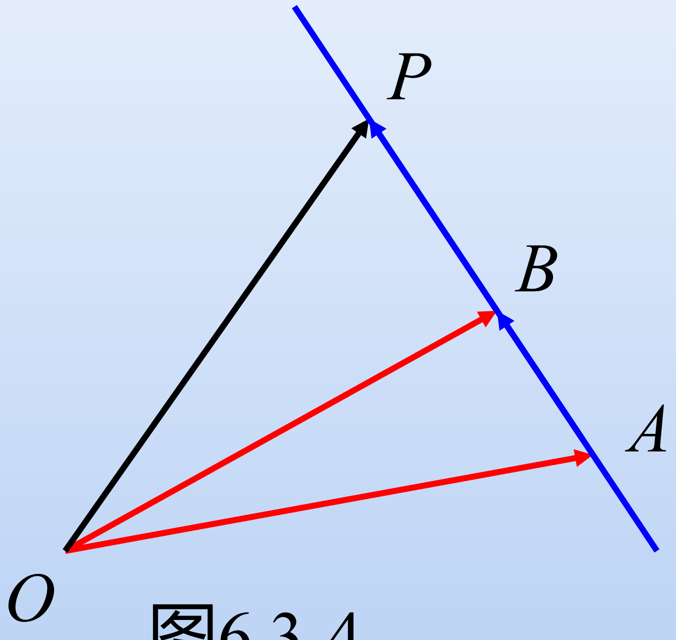


图6.3-4

观察$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，你有什么发现？

平面向量的等和线，“爪”字型图及性质：

(1) 已知$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$为不共线的两个向量, 则对于向量$\overrightarrow{AD}$, 必存在$x, y$, 使得

$\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则$B, C, D$三点共线$\Leftrightarrow x + y = 1$

当$0 < x + y < 1$, 则点D与A位于BC同侧, 且D位于A与BC之间.

当$x + y > 1$, 则D与A位于BC两侧.

当$x + y = 1$时, 当$x > 0, y > 0$, 则D在线段BC上,

当$xy < 0$, 则D在线段BC的延长线上.

(2) 已知D在线段AB上, 且$|BD| : |CD| = m : n$,

则$\overrightarrow{AD} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$