

04 以抛物线为情景的最值与范围问题

典例分析

类型一、以抛物线为情景的点线最值问题

1. 抛物线 $y = x^2$ 上的一动点 M 到直线 $l: x - y - 1 = 0$ 距离的最小值是 ()

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】

对 $y = x^2$ 求导可求与直线 $x - y - 1 = 0$ 平行且与抛物线 $y = x^2$ 相切的切线方程，再利用两平行线的距离公式可得所求的最小距离.

【详解】

因为 $y = x^2$ ，所以 $y' = 2x$ ，令 $y' = 2x = 1$ ，得 $x = \frac{1}{2}$ ，所以与直线 $x - y - 1 = 0$ 平行且与抛物线 $y = x^2$ 相切的切点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ，切线方程为 $y - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)$ ，即 $x - y - \frac{1}{4} = 0$ ，由两平行线的距离公式可得所求的最小距离

$$d = \frac{\left| -\frac{1}{4} + 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

2. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F ，过点 F 的直线交 C 于 A, B 两点，则 AB 的中点 M 到 C 的准线 l 的距离的最小值为 ()

- A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】B

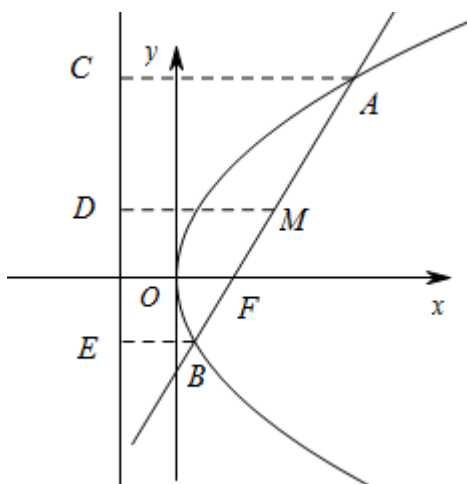
【解析】

【分析】

设出直线 AB 的方程 $x = my + 2$ ，联立后利用弦长公式表达出 AB ，求出 AB 长度的最小值，再利用抛物线的定义来进行转化，得到 AB 的中点 M 到 C 的准线 l 的距离为 AB 的一半，进而求出点 M 到 C 的准线 l 的距离的最小值.

【详解】

如图，



分别过点 A ， M ， B 作准线的垂线，垂足分别为 C ， D ， E ，则 $|MD| = \frac{|AC| + |BE|}{2} = \frac{|AF| + |BF|}{2} = \frac{|AB|}{2}$

设直线 AB 的方程为 $x = my + 2$ ， $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，联立 $\begin{cases} x = my + 2 \\ y^2 = 8x \end{cases}$ ，整理得 $y^2 - 8my - 16 = 0$ ，

则 $y_1 + y_2 = 8m$ ， $y_1 y_2 = -16$ ， $|AB| = \sqrt{1 + m^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 8(1 + m^2) \dots 8$ ， $\therefore |MD| \dots 4$ 。

3. 已知直线 $l_1: 4x + 3y - 6 = 0$ 和直线 $l_2: x = 1$ ，抛物线 $y^2 = -4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和的最小值是 ()

- A. 2 B. 3 C. $\frac{11}{5}$ D. $\frac{37}{16}$

【答案】A

【分析】结合抛物线的定义求得正确答案。

【详解】抛物线 $y^2 = -4x$ 的焦点为 $F(-1, 0)$ ，准线方程为 $x = 1$ ，即直线 l_2 是抛物线 $y^2 = -4x$ 的准线。

抛物线 $y^2 = -4x$ 上一动点 P 到直线 l_1 和直线 l_2 的距离之和，也即是 P 到直线 l_2 与焦点的距离之和，

最小值为 $F(-1, 0)$ 到直线 $l_1: 4x + 3y - 6 = 0$ 的距离，即 $\frac{|-4 - 6|}{5} = 2$ 。

4. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线为 l ，直线 $l': x - y + 2 = 0$ ，动点 M 在 C 上运动，记点 M 到直线 l 与 l' 的距离分别为 d_1 ， d_2 ， O 为坐标原点，则当 $d_1 + d_2$ 最小时， $\cos \angle MFO =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

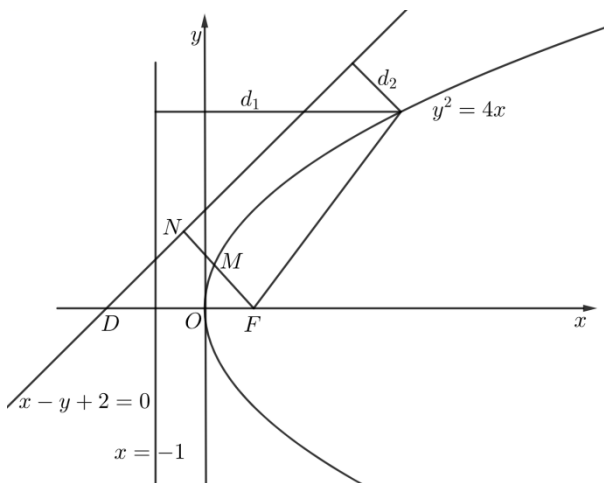
【答案】A

【解析】

【分析】

由抛物线的定义可知, $d_1 = |MF|$, 设 $MN \perp l'$, 垂足为 N , $d_1 + d_2 = |MF| + |MN|$, 当 M 、 F 、 N 三点共线时, $d_1 + d_2$ 最小, 再结合点到直线的距离公式, 以及直角三角形中的锐角的余弦值即可求出结果.

【详解】



由抛物线的定义可知, $d_1 = |MF|$, 设 $MN \perp l'$, 垂足为 N , $\therefore d_1 + d_2 = |MF| + |MN|$,

当 M 、 F 、 N 三点共线时, $d_1 + d_2$ 最小, $\because$ 抛物线 $C: y^2 = 4x$, $\therefore$ 焦点 $F(1, 0)$,

$\therefore |FN| = d = \frac{|1 \times 1 - 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 设直线 l' 与 x 轴的交点为 D , 令 $y = 0$, 得 $x = -2$, 即 $FD = 2 + 1 = 3$,

在 $\text{Rt}\triangle DNF$ 中, $\cos \angle MFO = \cos \angle NFD = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

类型二、以抛物线为情景的斜率最值问题

1. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 A 在抛物线上, 若存在点 B , 满足 $\overrightarrow{AB} = 9\overrightarrow{BF}$, 则 OB 的斜率的最大值为 ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】

设点 $B(x, y)$, $A(x_0, y_0)$, 表示出 $k_{OB} = \frac{y}{x} = \frac{4y_0}{36 + y_0^2}$, 考虑 y_0 的正负情况, 结合基本不等式即可求得答案.

【详解】

由题意: $y^2 = 4x$, $F(1, 0)$, 设点 $B(x, y)$, $A(x_0, y_0)$, A 在抛物线上, 故 $y_0^2 = 4x_0$,

$$\overrightarrow{AB} = (x - x_0, y - y_0), \quad \overrightarrow{BF} = (1 - x, -y), \quad \text{由 } \overrightarrow{AB} = 9\overrightarrow{BF} \text{ 得 } \begin{cases} x - x_0 = 9 - 9x \\ y - y_0 = -9y \end{cases}, \quad \text{即 } \begin{cases} 10x = 9 + x_0 \\ 10y = y_0 \end{cases},$$

$$k_{OB} = \frac{y}{x} = \frac{10y}{10x} = \frac{y_0}{9 + x_0} = \frac{y_0}{9 + \frac{y_0^2}{4}} = \frac{4y_0}{36 + y_0^2}, \quad \text{当 } y_0 \leq 0 \text{ 时, } k_{OB} \leq 0; \quad \text{当 } y_0 > 0 \text{ 时,}$$

$$k_{OB} = \frac{4y_0}{36 + y_0^2} = \frac{4}{\frac{36}{y_0} + y_0} \leq \frac{4}{2\sqrt{\frac{36}{y_0} \cdot y_0}} = \frac{1}{3}, \quad \text{当且仅当 } \frac{36}{y_0} = y_0 \text{ 即 } y_0 = 6 \text{ 时, 等号成立,}$$

2. 设 O 为坐标原点, P 是以 F 为焦点的抛物线 $y^2 = 2x$ 上任意一点, M 是线段 PF 上的点, 且 $PM = 2MF$,

则直线 OM 的斜率的最大值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】C

【分析】

设出 $M(x_0, y_0)$, P 点坐标, 根据 $PM = 2MF$ 及抛物线方程, 得到 $\frac{3}{2}y_0^2 + \frac{1}{3} = x_0$, 从而表达出直线 OM 的斜率, 利用基本不等式求出最大值.

【详解】

因为 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 设 $M(x_0, y_0)$, 显然当 $y_0 < 0$ 时, $k_{OM} < 0$, 当 $y_0 > 0$ 时, $k_{OM} > 0$, 则要想求解直线 OM 的斜率的最大值, 此时 $y_0 > 0$, 设 $P(m, n)$, 因为 $PM = 2MF$, 所以 $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{MF}$, 即

$$(x_0 - m, y_0 - n) = 2\left(\frac{1}{2} - x_0, -y_0\right), \quad \text{解得: } \begin{cases} m = 3x_0 - 1 \\ n = 3y_0 \end{cases}, \quad \text{由于 } n^2 = 2m, \quad \text{所以 } 9y_0^2 = 2(3x_0 - 1), \quad \text{即 } \frac{3}{2}y_0^2 + \frac{1}{3} = x_0,$$

$$\text{由于 } y_0 > 0, \quad \text{则 } k_{OM} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_0}{\frac{3}{2}y_0^2 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{2}y_0 + \frac{1}{3y_0}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}y_0 \cdot \frac{1}{3y_0}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{当且仅当 } \frac{3}{2}y_0 = \frac{1}{3y_0}, \quad \text{即 } y_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ 时,}$$

等号成立, 故直线 OM 的斜率的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore k$ 有最大值 $\frac{1}{3}$,

3. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ 的焦点为 F , 抛物线上一点 $A(m, 2)(m > 0)$ 到 F 的距离为 3,

(1) 求抛物线 C 的方程和点 A 的坐标;

(2) 设过点 $B(2, 0)$ 且斜率为 k 的直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 M, N . 若 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BN}$, $\lambda \in \left(\frac{1}{4}, 4\right)$ 求斜率

k 的取值范围.

【答案】(1) $x^2 = 4y$, $(2\sqrt{2}, 2)$ (2) $\left(-\frac{1}{4}, 0\right) \cup \left(2, \frac{9}{4}\right)$

【分析】

(1) 根据题意求出 p , 得抛物线方程, 代入点即可得解;

(2) 设直线 $l: y = k(x-2)$, 联立抛物线方程得出根与系数的关系, 得出 $\lambda = \frac{x_1^2}{x_2^2}$ 的范围,

再根据 $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = 2k$, 求取值范围即可.

【解析】

(1) 由题意知 $2 + \frac{p}{2} = 3$, 得 $p = 2$, 所以抛物线 C 的方程为 $x^2 = 4y$.

将点 $A(m, 2) (m > 0)$ 代入 $x^2 = 4y$, 得 $m = 2\sqrt{2}$, 所以点 A 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 2)$.

(2) 直线 $l: y = k(x-2)$ 与抛物线 $C: x^2 = 4y$ 联立, 消去 y 得 $x^2 - 4kx + 8k = 0$,

$\Delta = 16k^2 - 32k > 0$, 解得 $k < 0$ 或 $k > 2$. 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则有

$x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = 8k, \overrightarrow{BM} = (x_1 - 2, y_1), \overrightarrow{BN} = (x_2 - 2, y_2)$, 则 $y_1 = \lambda y_2$, 即 $\lambda = \frac{y_1}{y_2}$, 又 $x_1^2 = 4y_1$.

所以 $\lambda = \frac{x_1^2}{x_2^2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 \in \left(\frac{1}{4}, 4\right)$, 则 $\frac{x_1}{x_2} \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

因为 $\frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = \frac{16k^2}{8k} = 2k$, 设 $t = \frac{x_1}{x_2}$, 则 $2k = t + \frac{1}{t} + 2$,

因为 $t \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, 则 $t + \frac{1}{t} \in \left(-\frac{5}{2}, -2\right] \cup \left[2, \frac{5}{2}\right)$, 所以 $k \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right] \cup \left[2, \frac{9}{4}\right)$

因为 $k < 0$ 或 $k > 2$, 所以 k 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{4}, 0\right) \cup \left(2, \frac{9}{4}\right)$.

类型三、有关抛物线焦点的最值问题

1. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 且 l 过点 $(-3, 2)$, M 在抛物线 C 上, 若点

$N(2, 4)$, 则 $|MF| + |MN|$ 的最小值为 ()

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】B

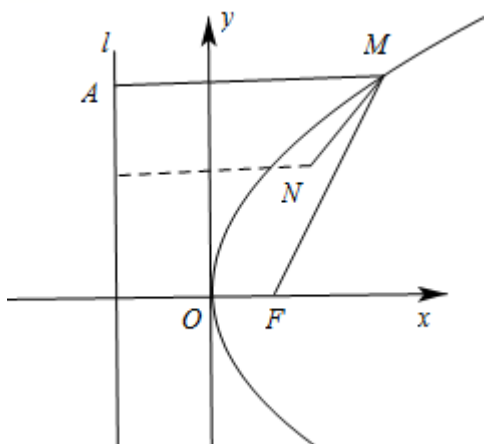
【分析】

先求出抛物线的方程, 根据抛物线上的点到焦点的距离转化为到抛物线的准线的距离, 结合图象, 即可求出结果.

【详解】

Q 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，准线为 l 且 l 过点 $(-3, 2)$ ， $\therefore$ 抛物线的准线方程是 $x = -3$ ，

则抛物线的方程为 $y^2 = 12x$ ，因为 $4^2 < 12 \times 2$ ， $\therefore$ 点 $N(2, 4)$ 在抛物线内，过点 N 作准线的垂线，垂足是 A ，



QM 在抛物线 C 上， F 是抛物线的 C 焦点， $\therefore |MN| + |MF| = |MN| + |MA|$ ，当 N, M, A 三点共线时，（图中虚线位置）， $\therefore |MN| + |MA|$ 取到最小值，即 $|MN| + |MF|$ 最小值为 $2 - (-3) = 5$ ，

2.（多选题）已知抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点为 F ，点 $A(1, 3)$ ，点 P 在抛物线上，则下列结论正确的是（ ）

- A. $|PA| + |PF|$ 的最小值为 3 B. $|PA| + |PF|$ 的最大值为 7
- C. $|PA| - |PF|$ 的最小值为 -2 D. $|PA| - |PF|$ 的最大值为 3

【答案】ACD

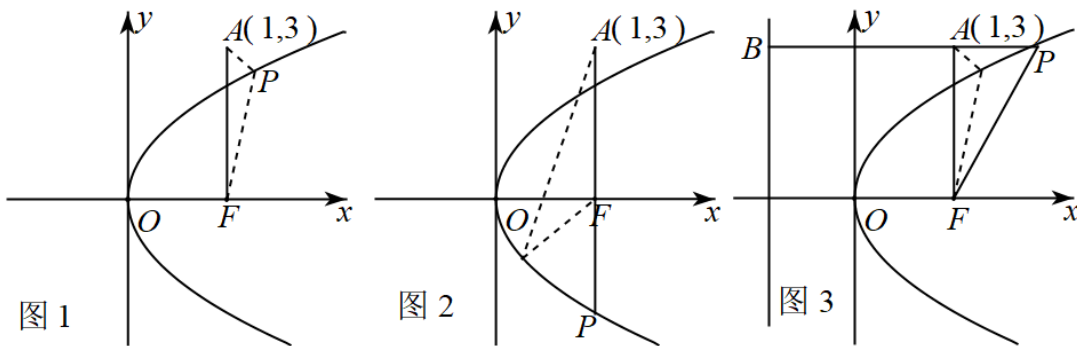
【分析】

画出图象，根据抛物线的图象可得， $|PF| + |PA| \geq |AF|$ ，当 F, P, A 三点共线时 $|PA| + |PF| = |FA|$ 即可求解。过 A 作 x 轴平行线，与准线交于点 B ，与抛物线交于点 P ，此时 $|PA| - |PF|$ 取最小值。

【详解】

如图 1，点 A 在抛物线外， $|PF| + |PA| \geq |AF|$ ，故 $|PA| + |PF|$ 的最小值为 $|FA| = 3$ ，A 正确；

如图 2，只有当 F, P, A 三点共线时 $|PA| - |PF|$ 最大，最大值为 $|FA| = 3$ ，如图 3，过 A 作 x 轴平行线，与准线交于点 B ，与抛物线交于点 P ，根据抛物线定义， $|PB| = |PF|$ ，此时 $|PA| - |PF|$ 有最小值 $-|AB| = -2$ 。



3. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线 l 的距离为 4，过焦点 F 的直线与抛物线相交于 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 两点，则下列结论中正确的是 ()

- A. 抛物线 C 的准线 l 的方程为 $x = -2$
- B. $|MN|$ 的最小值为 4
- C. 若 $A(4, 2)$ ，点 Q 为抛物线 C 上的动点，则 $|QA| + |QF|$ 的最小值为 6
- D. $2x_1 + x_2$ 的最小值 $4\sqrt{2}$

【答案】ACD

【解析】

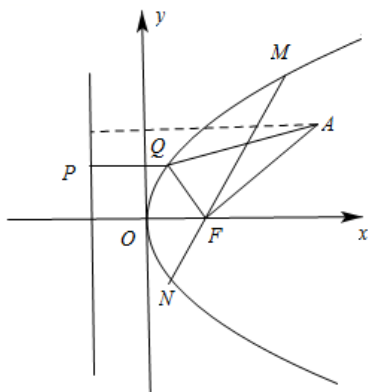
【分析】

由焦点到准线的距离可得 p 的值，进而求出抛物线的方程，可判断 A 正确；设直线 MN 的方程与抛物线的方程联立，求出两根之和及两根之积，由抛物线的性质可得弦长 $|MN|$ 的表达式，再由参数的范围可得其最小值，判断 B 不正确；过 Q 作准线的垂线，垂足为 P ，由抛物线的性质可得 $|QA| + |QF| = |QA| + |QP| \dots 2 + 4 = 6$ ，可判断 C 正确；由两根之积及均值不等式的性质可得 $2x_1 + x_2$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$ ，判断 D 正确。

【详解】

由焦点 F 到准线 l 的距离为 4 可得 $p = 4$ ，所以抛物线的方程为 $y^2 = 8x$ ，A 中，由抛物线的方程为 $y^2 = 8x$ ，所以可得准线方程为 $x = -2$ ，故 A 正确；B 中，过焦点的直线为 $x = my + 2$ ，则 $\begin{cases} x = my + 2 \\ y^2 = 8x \end{cases}$ ，整理可得 $y^2 - 8my - 16 = 0$ ，可得 $y_1 + y_2 = 8m$ ， $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 4 = 8m^2 + 4$ ，所以 $|MN| = x_1 + x_2 + 4 = 8m^2 + 8$ ， $m = 0$ 时取等号， $|MN|$ 最小值为 8，所以 B 不正确；C 中， $A(4, 2)$ 满足 $2^2 < 8 \times 4$ ，可知点 $A(4, 2)$ 在抛物线内部，过 Q 作准线的垂线，垂足为 P ，则 $|QA| + |QF| = |QA| + |QP| \dots 4 + 2 = 6$ ，当且仅当 A, Q, P

三点共线时取等号，所以 $|QA|+|QF|$ 的最小值为6，故C正确；



D中，由B的分析可知： $y_1 y_2 = -16$ 由抛物线的方程可得： $x_1 x_2 = \frac{(y_1 y_2)^2}{64} = 4$ ，

所以 $2x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{2x_1 x_2} = 2\sqrt{2 \times 4} = 4\sqrt{2}$ ，当且仅当 $2x_1 = x_2$ 时取等号，所以D正确；

类型四、以抛物线为情景的参数范围问题

1. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ ，直线 $l: y = x - p$ ，且在 C 上恰有两个点到 l 的距离为 $2\sqrt{2}$ ，则 p 的取值范围是（ ）

- A. $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ B. $\left(0, \frac{8}{3}\right)$ C. $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ D. $\left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$

【答案】B

【分析】

设与 $l: y = x - p$ 平行且与抛物线相切的直线方程 $l': y = x + m$ ，利用判别式等于零求得 $m = \frac{p}{2}$ ，再根题意得两直线间的距离 $d < 2\sqrt{2}$ ，解不等式可得答案.

【详解】设直线 $l': y = x + m$ 与抛物线 C 相切，联立 $\begin{cases} y = x + m \\ y^2 = 2px \end{cases}$ ，得 $y^2 - 2py + 2pm = 0$ ，

$$\Delta = (-2p)^2 - 4 \times 2pm = 0,$$

$\because p > 0$ ， $\therefore m = \frac{p}{2}$ ，由题意得，直线 $l': y = x + \frac{p}{2}$ 与直线 $l: y = x - p$ 的距离 $d < 2\sqrt{2}$ ，

$$\text{即 } d = \frac{\left|\frac{p}{2} - (-p)\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{3}{2}p}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}, \text{ 解得 } p < \frac{8}{3}, \therefore 0 < p < \frac{8}{3},$$

2. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p \neq 0)$ 上存在关于直线 $x + y = 1$ 对称的相异两点，则实数 p 的取值范围为（ ）

- A. $\left[0, \frac{2}{3}\right)$ B. $\left(0, \frac{2}{3}\right]$ C. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ D. $\left[0, \frac{2}{3}\right]$

【答案】C

【分析】存在关于直线 $x+y=1$ 对称的相异两点，第一步设出直线方程，联立方程根与系数的关系，求出中点坐标，代入抛物线方程求解即可。

【详解】设抛物线上关于直线 $x+y=1$ 对称的两点是 $M(x_1, y_1)$ 、 $N(x_2, y_2)$ ，设直线 MN 的方程为

$y=x+b$ 。将 $y=x+b$ 代入抛物线方程，得 $x^2+(2b-2p)x+b^2=0$ ，则

$x_1+x_2=2p-2b$ ， $y_1+y_2-(x_1+x_2)+2b=2p$ ，则 MN 的中点 P 的坐标为 $(p-b, p)$ 。因为点 P 在直 $x+y=1$ 上，所以 $2p-b=1$ ，即 $b=2p-1$ 。

又 $\Delta=(2b-2p)^2-4b^2=4p^2-8bp>0$ ，将 $b=2p-1$ 代入得 $4p^2-8p\cdot(2p-1)>0$ ，即 $3p^2-2p<0$ ，解得 $0<p<\frac{2}{3}$ 。

3. 已知动直线 l 过抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点 F ，且与抛物线 C 交于 M, N 两点，且点 M 在 x 轴上方， O 为坐标原点，线段 MN 的中点为 G 。

(1) 若直线 OG 的斜率为 $\frac{2}{3}$ ，求直线 l 的方程；

(2) 设点 $P(x_0, 0)$ ，若 $\angle FMP$ 恒为锐角，求 x_0 的取值范围。

【答案】(1) $x-y-1=0$ 或 $2x-y-2=0$ (2) $[0,1)\cup(1,9)$

【分析】

(1) 设出直线方程，联立抛物线方程，表达出 G 点坐标，由直线 OG 的斜率列出方程，求出直线方程；

(2) 将 $\angle FMP$ 恒为锐角转化为 $\vec{MF} \cdot \vec{MP} > 0$ ，等价于 $t^2+3t+(1-t)x_0 > 0$ 对任意的 $t > 0$ 恒成立，根据二次函数根的分布，列出不等式组，求出 x_0 的取值范围。

【解析】

(1) 由题意得 $F(1,0)$ ，设直线 l 的方程为 $x=ty+1$ ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，线段 MN 的中点 $G(x_0, y_0)$ 。

联立方程 $\begin{cases} x=ty+1 \\ y^2=4x \end{cases}$ ，整理得： $y^2-4ty-4=0$ ，由韦达定理得： $y_1+y_2=4t$ ， $y_1y_2=-4$ 。

$\therefore y_0=2t$ ， $x_0=ty_0+1=2t^2+1$ ，即 $G(2t^2+1, 2t)$ 。 $\therefore$ 直线 OG 的斜率为 $\frac{2}{3}$ ， $\therefore \frac{2t}{2t^2+1}=\frac{2}{3}$ ，解得： $t=\frac{1}{2}$ 或 $t=1$ ，

$\therefore$ 直线 l 的方程为： $x-y-1=0$ 或 $2x-y-2=0$ 。

(2) $\angle FMP$ 为锐角，等价于 $\vec{MF} \cdot \vec{MP} > 0$ 。设 $M\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$ ， $F(1,0)$ ， $P(x_0, 0)$ ，则 $\vec{MP}=\left(x_0-\frac{y_1^2}{4}, -y_1\right)$ ， $\vec{MF}=\left(1-\frac{y_1^2}{4}, -y_1\right)$ ，

故 $\vec{MF} \cdot \vec{MP}=\left(x_0-\frac{y_1^2}{4}\right)\left(1-\frac{y_1^2}{4}\right)+y_1^2=\frac{y_1^4}{16}+\frac{3}{4}y_1^2+\left(1-\frac{y_1^2}{4}\right)x_0 > 0$ 恒成立。

令 $t=\frac{y_1^2}{4}$ ，则 $t > 0$ ，原式等价于 $t^2+3t+(1-t)x_0 > 0$ 对任意的 $t > 0$ 恒成立，

即 $t^2+(3-x_0)t+x_0 > 0$ 对任意的 $t > 0$ 恒成立。令 $h(t)=t^2+(3-x_0)t+x_0$ 。

① $\Delta=(3-x_0)^2-4x_0=x_0^2-10x_0+9 < 0$ ，解得： $1 < x_0 < 9$ ；

$$\textcircled{2} \begin{cases} \Delta \dots 0 \\ \frac{x_0 - 3}{2} \dots 0, \text{ 解得: } 0 \leq x_0 \leq 1. \text{ 又 } x_0 \neq 1, \text{ 故 } 0 \leq x_0 < 1. \\ h(0) \dots 0 \end{cases}$$

综上所述, x_0 的取值范围是 $[0,1) \cup (1,9)$.

【点睛】圆锥曲线中求解取值范围的题目, 通常要设出直线, 与圆锥曲线联立, 根据两根之和与两根之积进行代入化简, 最后利用基本不等式, 二次函数根的分布或导函数等进行求解.

类型五、以抛物线为情景的面积范围与最值问题

1. 已知抛物线 $N: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 F 与 x 轴垂直的直线交抛物线的弦长为 2.

(1) 求抛物线 N 的方程;

(2) 点 $M(2,2)$ 和点 $C(2,1)$ 为两定点, 点 A 和点 B 为抛物线 N 上的两动点, 线段 AB 的中点 Q 在直线 OM 上, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【答案】(1) $y^2 = 2x$ (2) $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

【分析】

(1) 令 $x = \frac{p}{2}$, 可得 $y = \pm p$, 得到 $2p = 2$, 求得 $p = 1$, 即可求得抛物线的方程;

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 AB 的斜率为 $k (k \neq 0)$, 得到 $k = \frac{1}{m}$, 得到直线 AB 的方程

$x - my + m^2 - m = 0$, 联立方程组得到 $y_1 + y_2 = 2m, y_1 y_2 = 2m^2 - 2m$, 结合弦长公式和点到直线的距离公式,

求得面积 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{2m - m^2} \times (2 - 2m + m^2)$, 令 $t = \sqrt{2m - m^2}$, 得到 $S_{\triangle ABC} = -t^3 + 2t, t \in (0, 1]$, 结合导数求得函数的单调性与最值, 即可求解.

【解析】

(1) 由题意得抛物线 C 的焦点为 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 在方程 $y^2 = 2px$ 中, 令 $x = \frac{p}{2}$, 可得 $y = \pm p$,

所以弦长为 $2p$, 即 $2p = 2$, 解得 $p = 1$, 所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2x$.

(2) 由 (1) 知抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2x$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 AB 的斜率为 $k (k \neq 0)$,

因为线段 AB 的中点 Q 在直线 OM 上, 由 $M(2,2)$ 可知直线 OM 的方程为 $y = x$,

设 $Q(m, m) (m \neq 0)$, 所以 $\begin{cases} y_1^2 = 2x_1 \\ y_2^2 = 2x_2 \end{cases}$, 所以 $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2(x_1 - x_2)$,

又 $y_1 + y_2 = 2m, \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k$, 所以 $km = 1$, 即得 $k = \frac{1}{m}$,

设直线 AB 的方程为 $y - m = \frac{1}{m}(x - m)$ ，即 $x - my + m^2 - m = 0$ ，

联立方程组 $\begin{cases} x - my + m^2 - m = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases}$ ，所以 $y^2 - 2my + 2m^2 - 2m = 0$ ，所以 $\Delta = 8m - 4m^2 > 0$ ，即 $0 < m < 2$ ，

由根据与系数的关系得 $y_1 + y_2 = 2m, y_1 y_2 = 2m^2 - 2m$ ，

则 $|AB| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$

$= \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{4m^2 - 4(2m^2 - 2m)} = 2\sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{2m - m^2}$ ，又由点 C 到直线 AB 的距离为 $d = \frac{|2 - 2m + m^2|}{\sqrt{1+m^2}}$ ，

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{2m - m^2} \times \frac{|2 - 2m + m^2|}{\sqrt{1+m^2}} = \sqrt{2m - m^2} \times (2 - 2m + m^2)$ ，

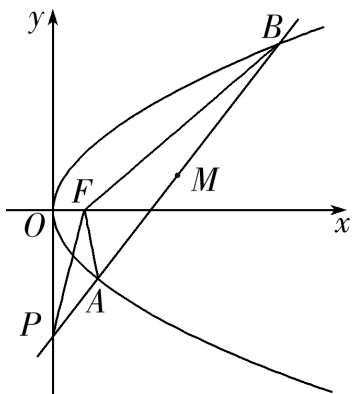
记 $t = \sqrt{2m - m^2}$ ，因为 $0 < m < 2$ ，所以 $t \in (0, 1]$ ，所以 $S_{\triangle ABC} = t(2 - t^2) = -t^3 + 2t, t \in (0, 1]$ ，

令 $f(t) = -t^3 + 2t, t \in (0, 1]$ ，可得 $f'(t) = -3t^2 + 2$ ，令 $f'(t) = 0$ ，可得 $t = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

当 $t \in (0, \frac{\sqrt{6}}{3})$ 时， $f'(x) > 0$ ；当 $t \in (\frac{\sqrt{6}}{3}, 1]$ 时， $f'(x) < 0$ ，

所以当 $t = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 时， $f(x)$ 取得最大值，即 $S_{\triangle ABC}$ 有最大值为 $\frac{4\sqrt{6}}{9}$ 。

2. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，直线 $l: y = kx - 4 (1 < k < 2)$ 与 y 轴、抛物线 C 相交于 P, A, B (自下而上)，记 $\triangle PAF$ 、 $\triangle PBF$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 。



(1) 求 AB 中点 M 到 y 轴距离 d 的取值范围；

(2) 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的取值范围。

【答案】 (1) $\left(\frac{5}{2}, 6\right)$ ； (2) $\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{4}\right)$ 。

【分析】

(1) 问题需求 $|x_M|$ 的取值范围，联立直线与抛物线的方程，利用韦达定理转化为求解二次函数的值域；

(2) 将 $\frac{S_1}{S_2}$ 用 A, B 两点的横坐标表示，从而结合韦达定理建立函数关系式，由 $\frac{S_1}{S_2}$ 满足的不等关系求解。

【解析】

(1) 联立 $\begin{cases} y = kx - 4 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ 消去 y ，得 $k^2x^2 - (8k+4)x + 16 = 0$ ，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 $x_1 + x_2 = \frac{8k+4}{k^2}$ ，

$$x_1x_2 = \frac{16}{k^2},$$

$$\therefore d = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4}{k} + \frac{2}{k^2} = 2\left(\frac{1}{k} + 1\right)^2 - 2 \in \left(\frac{5}{2}, 6\right);$$

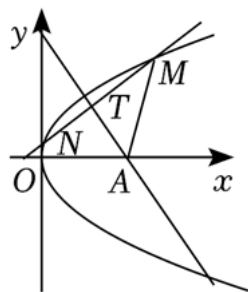
$$(2) \text{由 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{|PA|}{|PB|} = \frac{x_1}{x_2}, \text{由(1)知 } \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{k^2 \cdot \frac{(8k+4)^2}{k^4} - 2}{16} = \left(\frac{1}{k} + 2\right)^2 - 2 \in \left(\frac{17}{4}, 7\right),$$

$$\text{由 } \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} > \frac{17}{4} \text{ 得: } 4\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 17 \cdot \frac{S_1}{S_2} + 4 > 0, \text{ 解得 } \frac{S_1}{S_2} > 4 \text{ 或 } \frac{S_1}{S_2} < \frac{1}{4}, \text{ 又 } 0 < \frac{S_1}{S_2} < 1, \text{ 故 } 0 < \frac{S_1}{S_2} < \frac{1}{4},$$

$$\text{由 } \frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1} < 7 \text{ 得: } \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{S_1}{S_2} + 1 < 0, \text{ 解得 } \frac{7-3\sqrt{5}}{2} < \frac{S_1}{S_2} < \frac{7+3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \frac{7-3\sqrt{5}}{2} < \frac{S_1}{S_2} < \frac{1}{4}, \text{ 故 } \frac{S_1}{S_2} \text{ 的取值范围为 } \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

3. 如图所示，已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ ，过点 $A(2, 0)$ 的直线 l 与抛物线 C 有两个交点，若抛物线 C 上存在不同的两点 M, N 关于直线 l 对称，记 MN 的中点为 T 。



(1) 求点 T 的轨迹方程；

(2) 求 $S_{\triangle AMT}$ 的最大值。

【答案】(1) $x=1 \left(-\sqrt{2} < y < \sqrt{2} \right)$ (2) 1

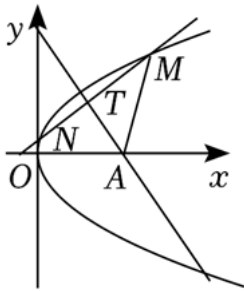
【分析】

(1) 设直线 $l: y = k(x-2)$, $T(x, y)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 将 M, N 的坐标代入抛物线方程得到 $y = -k$, 再代入直线方程化简即可;

(2) 联立直线 MN 的方程和抛物线方程, 将 $S_{\triangle AMT}$ 在面积表示出来, 再利用 $S_{\triangle AMT} = \frac{1}{2} S_{\triangle AMN}$ 求解即可.

【解析】

(1) 由题意可得直线 l 的斜率存在且不为 0, 设直线 $l: y = k(x-2)$, $T(x, y)$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 如图,



由 $\begin{cases} y_1^2 = 2x_1 \\ y_2^2 = 2x_2 \end{cases}$ 可得: $(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2(x_1 - x_2)$, 所以 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2}{y_1 + y_2} = \frac{2}{2y} = \frac{1}{y} = -\frac{1}{k}$,

所以 $y = -k$, 代入直线方程得: $x = 1$, 又当 $x = 1$ 时, 由 $y^2 = 2x$ 得 $y = \pm\sqrt{2}$,

QT 在抛物线开口方向内, $\therefore -\sqrt{2} < y < \sqrt{2}$, $\therefore$ 点 T 的轨迹方程为: $x = 1 (-\sqrt{2} < y < \sqrt{2})$;

(2) 由 (1) 可知直线 $MN: y = -\frac{1}{k}x - k + \frac{1}{k}$, 由 $\begin{cases} y = -\frac{1}{k}x - k + \frac{1}{k} \\ y^2 = 2x \end{cases}$ 得: $y^2 + 2ky + 2k^2 - 2 = 0$,

Q 直线 MN 与抛物线交于 M, N 两点, $\therefore \Delta = -4k^2 + 8 > 0$ 即 $0 < k^2 < 2$

则 $y_1 + y_2 = -2k$, $y_1 y_2 = 2k^2 - 2$ $\therefore |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{4k^2 - 4(2k^2 - 2)} = \sqrt{8 - 4k^2}$,

$\therefore |MN| = \sqrt{(1+k^2)(8-4k^2)}$, 又 $|AT| = \sqrt{1+k^2} |2-1| = \sqrt{1+k^2}$,

$\therefore S_{\triangle AMT} = \frac{1}{2} S_{\triangle AMN} = \frac{1}{4} |MN| |AT| = \frac{1}{4} \sqrt{(1+k^2)^2 (8-4k^2)} = \frac{1}{2} \sqrt{-k^6 + 3k^2 + 2}$

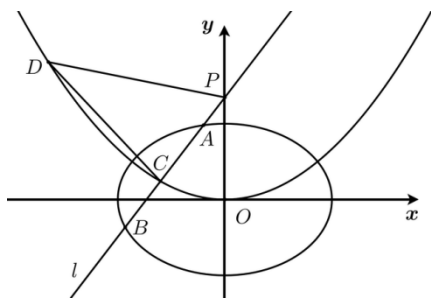
令 $t = k^2$, $y = -t^3 + 3t + 2$ ($t \in (0, 2)$), $\therefore y' = -3t^2 + 3$, 由 $-3t^2 + 3 = 0$ 得 $t = 1$ (负根舍去),

知当 $t \in (0, 1)$ 时, y 随 t 增大而增大, 当 $t \in (1, 2)$ 时, y 随 t 增大而减小, $\therefore$ 当 $t = 1$ 时, y 取得最大值 4,

$\therefore k = \pm 1$ 时, $(S_{\triangle AMT})_{\max} = 1$.

4. 如图, 已知椭圆 $\Gamma_1: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 和抛物线 $\Gamma_2: x^2 = 3y$, 斜率为正的直线 l 与 y 轴及椭圆 Γ_1 依次交于 P, A 、

B 三点，且线段 AB 的中点 C 在抛物线 Γ_2 上.



(1) 求点 P 的纵坐标的取值范围；

(2) 设 D 是抛物线 Γ_2 上一点，且位于椭圆 Γ_1 的左上方，求点 D 的横坐标的取值范围，使得 $\triangle PCD$ 的面积存在最大值.

【答案】 (1) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$; (2) $\left(-3, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

【分析】

(1) 设直线 l 的方程为 $y = kx + b$ ($k > 0, b > 0$)，则 $P(0, b)$ ，将直线 l 的方程与椭圆的方程联立，可求得点 C 的坐标，将点 C 的坐标代入抛物线的方程，可得出 $b = \frac{3(2k^2 + 1)}{4k^2}$ ，结合 $\Delta > 0$ 可得出 k^2 的取值范围，进而可求得 b 的取值范围，即可得解；

(2) 设点 $D(3t, 3t^2)$ ，计算得出 $\triangle PCD$ 的面积 $S = \frac{9}{16} \left(-\frac{1}{k^3} + \frac{4t^2 - 2}{k} - 4t \right)$ ，令 $u = \frac{1}{k}$ ，记

$f(u) = -u^3 + (4t^2 - 2)u - 4t$ ，则 $0 < u < \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，求导 $f'(u)$ ，分析可知函数 $f(u)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 内有唯一的极值点，

且为极大值点，结合已知条件可得出关于 t 的不等式组，解出 t 的取值范围，即可得出点 D 的横坐标的取值范围.

【解析】 (1) 由题意可设直线 l 的方程为 $y = kx + b$ ($k > 0, b > 0$)，则 $P(0, b)$ ，

联立 $\begin{cases} y = kx + b \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$ ，可得 $(2k^2 + 1)x^2 + 4kbx + 2b^2 - 2 = 0$ ，

$\Delta = 16k^2b^2 - 8(2k^2 + 1)(b^2 - 1) = 8(2k^2 + 1 - b^2) > 0$ ，可得 $b^2 < 2k^2 + 1$ ，①

设点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，由韦达定理可得 $x_1 + x_2 = -\frac{4kb}{2k^2 + 1}$ ， $x_1x_2 = \frac{2b^2 - 2}{2k^2 + 1}$ ，

设点 $C(x_0, y_0)$ ，则 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2kb}{2k^2 + 1}$ ， $y_0 = kx_0 + b = \frac{b}{2k^2 + 1}$ ，

将点 C 的坐标代入抛物线 Γ_2 的方程得 $4k^2b - 6k^2 - 3 = 0$ ，则 $b = \frac{3(2k^2 + 1)}{4k^2}$ ，

代入①可得 $\frac{9(2k^2+1)^2}{16k^4} < 2k^2+1$ ，可得 $16k^4-18k^2-9 > 0$ ，解得 $k^2 > \frac{3}{2}$ ，

因此 $b = \frac{3(2k^2+1)}{4k^2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4k^2} \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 。因此，点 P 的纵坐标的取值范围是 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 。

(2) 设点 $D(3t, 3t^2)$ ，则点 D 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|3tk-3t^2+b|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{3t^2-3tk-b}{\sqrt{k^2+1}}$ ，

且 $|PC| = \frac{2kb\sqrt{k^2+1}}{2k^2+1}$ ，故 $\triangle PCD$ 的面积 $S = \frac{1}{2}|PC| \cdot d = \frac{kb(3t^2-3tk-b)}{2k^2+1}$ ，②

将 $b = \frac{3(2k^2+1)}{4k^2}$ 代入②得 $S = \frac{9}{16} \left(-\frac{1}{k^3} + \frac{4t^2-2}{k} - 4t \right)$ ，

令 $u = \frac{1}{k}$ ，记 $f(u) = -u^3 + (4t^2-2)u - 4t$ ，则 $0 < u < \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，则 $f'(u) = -3u^2 + 4t^2 - 2$ ，

因为 $f'(u)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 上单调递减，所以，函数 $f(u)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 内有唯一的极值点，且为极大值点，

所以， $\begin{cases} f'(0) = 4t^2 - 2 > 0 \\ f'\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 4t^2 - 4 < 0 \end{cases}$ ，可得 $\frac{1}{2} < t^2 < 1$ ，③，因为点 D 在椭圆 Γ_1 的左上方，则 $\begin{cases} t < 0 \\ 9t^2 + 18t^4 > 2 \end{cases}$ ，④

由③④可得 $-1 < t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，因此，点 D 的横坐标的取值范围是 $\left(-3, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 。

【点睛】圆锥曲线中的最值问题解决方法一般分两种：

一是几何法，特别是用圆锥曲线的定义和平面几何的有关结论来求最值；

二是代数法，常将圆锥曲线的最值问题转化为二次函数或三角函数的最值问题，然后利用基本不等式、函数的单调性或三角函数的有界性等求最值。

巩固练习

1. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，准线为 l ，点 A, B 在抛物线 C 上，且满足 $AF \perp BF$ 。设线段 AB 的中点到准线的距离为 d ，则 $\frac{|AB|}{d}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{2}$

【答案】D

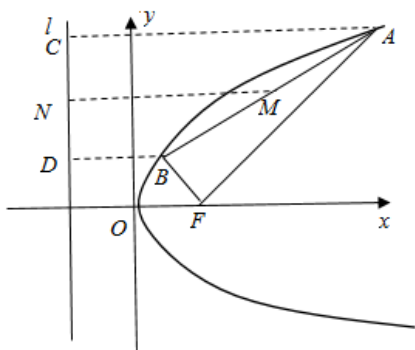
【解析】

【分析】

作辅助线，利用抛物线的定义可知直角梯形的两底分别等于 $|AF|$ 、 $|BF|$ ，利用梯形的中位线定理表示出 d ，进而表示出 $\frac{|AB|}{d}$ ，再根据基本不等式求得最小值。

【详解】

如图示：设 AB 的中点为 M ，分别过点 A, B, M 作准线 l 的垂线，垂足为 C, D, N ，



设 $|AF|=a, |BF|=b$ ，则 $|AC|=a, |BD|=b$ ， MN 为梯形 $ACDB$ 的中位线，则 $d=|MN|=\frac{a+b}{2}$ ，

由 $AF \perp BF$ ，可得 $|AB|=\sqrt{a^2+b^2}$ ，故 $\frac{|AB|}{d}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$ ，

因为 $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ 当且仅当 $a=b$ 时取等号，故 $\frac{|AB|}{d}=\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \geq \frac{\sqrt{2}(a+b)}{a+b}=\sqrt{2}$ ，

2. 已知 P 为抛物线 $E: y^2=2px (p>0)$ 上一动点， F 为 E 的焦点，点 Q 为圆 $x^2-4x+y^2+3=0$ 上一动点，若 $|PF|+|PQ|$ 的最小值为 3，则 $p=$ ()

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】

过点 P 作抛物线的准线的垂线， H 为垂足，则 $|PF|+|PQ|=|PH|+|PQ|$ ，结合圆的性质可得答案。

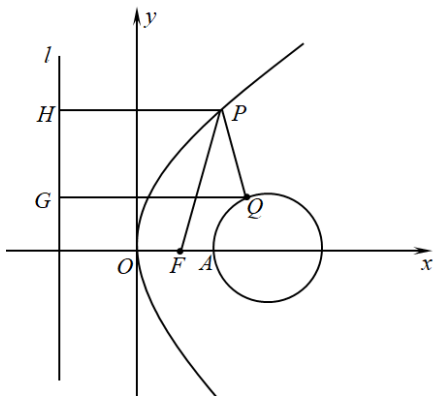
【详解】

$x^2-4x+y^2+3=0$ 可转化为 $(x-2)^2+y^2=1$ ，则圆心为 $M(2,0)$ ，半径为 1. 因为 $|PF|+|PQ|$ 的最小值为 3，

点 Q 为圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 上一动点，设抛物线 $E: y^2=2px (p>0)$ 的准线为 l ，则 l 的方程为： $x=-\frac{p}{2}$

过点 P 作 $PH \perp l$ ， H 为垂足，则 $|PF|=|PH|$ 如图，则 $|PF|+|PQ|=|PH|+|PQ| \geq |QG| \geq 1+\frac{p}{2}$. 由 $1+\frac{p}{2}=3$ ，可得

$p=4$ ，



3. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (0 < p < 6)$ 的焦点为 F , P 为 C 上一点, 点 $A(3, 0)$, $B(1, -2)$, 设 $\angle ABP$ 取最小值和最大值时对应的点分别为 P_1 , P_2 , 且 $\vec{BP_1} \cdot \vec{BP_2} = 0$, 则 $p =$ ()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】

如图所示, BP_1 与抛物线相切时, $\angle ABP_1$ 最小, BP_2 与抛物线相切时, $\angle ABP_2$ 最大. 设切点为 $(x_0, \frac{1}{2p}x_0^2)$, 切线的斜率为 $\frac{1}{p}x_0$, 由切线方程得到 $x_0^2 - 2x_0 - 4p = 0$, 即得到韦达定理, 设 $P_1(x_1, \frac{1}{2p}x_1^2), P_2(x_2, \frac{1}{2p}x_2^2)$, 化简 $\vec{BP_1} \cdot \vec{BP_2} = 0$ 代入韦达定理得解.

【详解】

如图所示, BP_1 与抛物线相切时, $\angle ABP_1$ 最小, BP_2 与抛物线相切时, $\angle ABP_2$ 最大. 由 $x^2 = 2py (0 < p < 6)$ 得

$y = \frac{1}{2p}x^2$, 所以 $y' = \frac{1}{p}x$. 设切点为 $(x_0, \frac{1}{2p}x_0^2)$, 切线的斜率为 $\frac{1}{p}x_0$, 所以切线方程为

$$y - \frac{1}{2p}x_0^2 = \frac{1}{p}x_0(x - x_0),$$

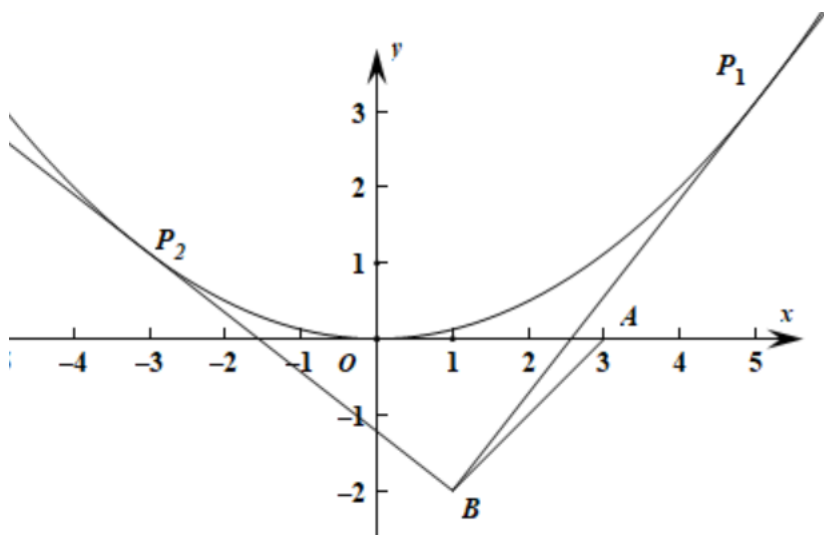
因为切线过点 $B(1, -2)$, 所以 $-2 - \frac{1}{2p}x_0^2 = \frac{1}{p}x_0(1 - x_0)$, 即 $x_0^2 - 2x_0 - 4p = 0$. 因为有两个切点, 所以

$\Delta = 4 + 16p > 0$, 设 $P_1(x_1, \frac{1}{2p}x_1^2), P_2(x_2, \frac{1}{2p}x_2^2)$, 则有 $x_1 + x_2 = 2, x_1 \cdot x_2 = -4p$,

$\vec{BP_1} = (x_1 - 1, \frac{1}{2p}x_1^2 + 2), \vec{BP_2} = (x_2 - 1, \frac{1}{2p}x_2^2 + 2)$, 所以 $\vec{BP_1} \cdot \vec{BP_2} = (x_1 - 1)(x_2 - 1) + (\frac{1}{2p}x_1^2 + 2)(\frac{1}{2p}x_2^2 + 2) = 0$,

所以 $x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 + \frac{1}{4p^2}(x_1x_2)^2 + \frac{1}{p}(x_1^2 + x_2^2) + 4 = 0$, 代入韦达定理得 $4p^2 - 15p - 4 = 0, \therefore p = -\frac{1}{4}$ 或 $p = 4$.

因为 $0 < p < 6$, 所以 $p = 4$.



4. 已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F ，过点 F 分别作两条直线 l_1, l_2 ，直线 l_1 与抛物线 C 交于 A, B 两点，直线 l_2 与抛物线 C 交于 D, E 两点，若 l_1 与 l_2 的斜率的平方和为 1，则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为（ ）

- A. 16 B. 20 C. 24 D. 32

【答案】C

【解析】

【分析】

设出直线 l_1, l_2 的方程，可知 $k_1^2+k_2^2=1$ ，将直线方程代入椭圆方程，利用韦达定理及抛物线的焦点弦性质，即可得 $|AB|+|DE|$ ，利用基本不等式的性质，即可求得的 $|AB|+|DE|$ 的最小值.

【详解】

解：抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点 $F(1,0)$ ，设直线 $l_1: y=k_1(x-1)$ ，直线 $l_2: y=k_2(x-1)$

由题意可知，则 $k_1^2+k_2^2=1$ ，联立 $\begin{cases} y=k_1(x-1) \\ y^2=4x \end{cases}$ 整理得： $k_1^2x^2-(2k_1^2+4)x+k_1^2=0$

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则 $x_1+x_2=\frac{2k_1^2+4}{k_1^2}=2+\frac{4}{k_1^2}$ ，设 $D(x_3, y_3)$ ， $E(x_4, y_4)$ ，同理可得 $x_3+x_4=2+\frac{4}{k_2^2}$

由抛物线的性质可得： $|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k_1^2}$ ， $|DE|=x_3+x_4+p=4+\frac{4}{k_2^2}$

$\therefore |AB|+|DE|=8+\frac{4}{k_1^2}+\frac{4}{k_2^2}=8+\frac{4(k_1^2+k_2^2)}{k_1^2k_2^2}=8+\frac{4}{k_1^2k_2^2}\geq 8+\frac{4}{(\frac{k_1^2+k_2^2}{2})^2}=24$ ，

当且仅当 $k_1^2=k_2^2=\frac{1}{2}$ 时，上式“=”成立. $\therefore |AB|+|DE|$ 的最小值 24.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/275001131231012021>