

圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)(精选30题)

题目 1 (2024·山东·二模) 已知椭圆的焦点分别是 $F_1(\sqrt{3}, 0), F_2(-\sqrt{3}, 0)$, 点 M 在椭圆上, 且 $|MF_1| + |MF_2| = 4$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若直线 $y = kx + \sqrt{2}$ 与椭圆交于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$, 求实数 k 的值.

题目 2 (2024·江苏南通·模拟预测) 在平面直角坐标系 xOy 中, 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心

率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, 过 F_2 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 且 $\triangle AF_1F_2$ 的周长是 $4 + 2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 当 $|AB| = \frac{3}{2}|DE|$ 时, 求 $\triangle ODE$ 的面积.

题目 3 (2024 · 河北邯郸 · 二模) 已知椭圆 C 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过 $M(2, 0)$,

$N\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 两点.

(1) 求 C 的方程.

(2) A, B 是 C 上两个动点, D 为 C 的上顶点, 是否存在以 D 为顶点, AB 为底边的等腰直角三角形? 若存在, 求出满足条件的三角形的个数; 若不存在, 请说明理由.

题目 4 (2024 · 广东广州 · 模拟预测) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2\sqrt{2})$, 右顶点为 E , 上下顶点分别为

B_1, B_2 , G 是 EB_1 的中点, 且 $\overrightarrow{EB_1} \cdot \overrightarrow{GB_2} = 1$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设过点 $D(-4, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M, N , 点 $A(-2, -1)$, 直线 MA, NA 分别交直线 $x = -4$ 于点 P, Q , 求证: 线段 PQ 的中点为定点.

题目 5 (2024 · 辽宁 · 二模) 平面直角坐标系 xOy 中, 面积为 9 的正方形 $ABCD$ 的顶点 A, B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动, 且 $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB}$, 记动点 P 的轨迹为曲线 Γ .

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 过点 $E(4, 1)$ 的动直线 l 与曲线 Γ 交于不同的两点 M, N 时, 在线段 MN 上取点 Q , 满足 $|\overrightarrow{EM}| \cdot |\overrightarrow{QN}| = |\overrightarrow{QM}| \cdot |\overrightarrow{EN}|$. 试探究点 Q 是否在某条定直线上? 若是, 求出定直线方程; 若不是, 说明理由.

题目 6 (2024 · 福建厦门 · 三模) 在直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 且当 l 的斜率为 1 时, $|MN| = 8$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 l 与 C 的准线交于点 P , 直线 PO 与 C 交于点 Q (异于原点), 线段 MN 的中点为 R , 若 $|QR| \leq 3$, 求 $\triangle MNQ$ 面积的取值范围.

题目 7 (2024 · 浙江丽水 · 二模) 已知抛物线 $E: y^2 = 4x$, 点 A, B, C 在抛物线 E 上, 且 A 在 x 轴上方, B 和 C 在 x 轴下方 (B 在 C 左侧), A, C 关于 x 轴对称, 直线 AB 交 x 轴于点 M , 延长线段 CB 交 x 轴于点 Q , 连接 QA .

(1) 证明: $\frac{|OM|}{|OQ|}$ 为定值 (O 为坐标原点);

(2) 若点 Q 的横坐标为 -1 , 且 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{8}{9}$, 求 $\triangle AQB$ 的内切圆的方程.

题目 8 (2024 · 江苏苏州 · 模拟预测) 已知点 $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$ 和动点 $P(x, y)$ 满足 y^2 是 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ 的等差中项.

(1) 求 P 点的轨迹方程;

(2) 设 P 点的轨迹为曲线 C_1 按向量 $\vec{a} = \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{16}\right)$ 平移后得到曲线 C_2 , 曲线 C_2 上不同的两点 M, N 的连线交 y 轴于点 $Q(0, b)$, 如果 $\angle MON$ (O 为坐标原点) 为锐角, 求实数 b 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 如果 $b = 2$ 时, 曲线 C_2 在点 M 和 N 处的切线的交点为 R , 求证: R 在一条定直线上.

题目 9 (2024·江苏南通·二模) 已知双曲线 E 的渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 左顶点为 $A(-\sqrt{3}, 0)$.

- (1) 求双曲线 E 的方程;
- (2) 直线 $l: x = t$ 交 x 轴于点 D , 过 D 点的直线交双曲线 E 于 B, C , 直线 AB, AC 分别交 l 于 G, H , 若 O, A, G, H 均在圆 P 上,
 - ① 求 D 的横坐标;
 - ② 求圆 P 面积的取值范围.

题目 10 (2024·江苏南京·二模) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 有公共的焦点 F , 且 $p = 4b$. 过 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 与 E 的两条渐近线交于 P, Q 两点 (均位于 y 轴右侧).

- (1) 求 E 的渐近线方程;
- (2) 若实数 λ 满足 $\lambda \left(\frac{1}{|OP|} + \frac{1}{|OQ|} \right) = \left| \frac{1}{|AF|} - \frac{1}{|BF|} \right|$, 求 λ 的取值范围.

题目 11 (2024 · 重庆 · 三模) 已知 $F(2,0)$, 曲线 C 上任意一点到点 F 的距离是到直线 $x = \frac{1}{2}$ 的距离的两倍.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 已知曲线 C 的左顶点为 A , 直线 l 过点 F 且与曲线 C 在第一、四象限分别交于 M, N 两点, 直线 AM, AN 分别与直线 $x = \frac{1}{2}$ 交于 P, H 两点, Q 为 PH 的中点.

(i) 证明: $QF \perp MN$;

(ii) 记 $\triangle PMQ, \triangle HNQ, \triangle MNQ$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 则 $\frac{S_1+S_2}{S_3}$ 是否为定值? 若是, 求出这个定值; 若不是, 请说明理由.

题目 12 (2024 · 河北 · 二模) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

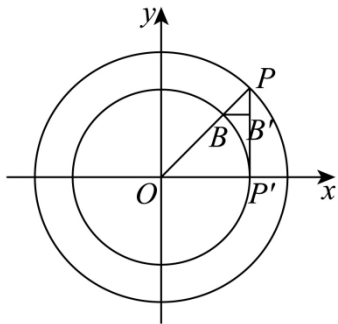
(1) 若椭圆 E 过点 $(2, \sqrt{2})$, 求椭圆 E 的标准方程.

(2) 若直线 l_1, l_2 均过点 $P(p_n, 0) (0 < p_n < a, n \in \mathbf{N}^*)$ 且互相垂直, 直线 l_1 交椭圆 E 于 A, B 两点, 直线 l_2 交椭圆 E 于 C, D 两点, M, N 分别为弦 AB 和 CD 的中点, 直线 MN 与 x 轴交于点 $Q(t_n, 0)$, 设 $p_n = \frac{1}{3^n}$.

(i) 求 t_n ;

(ii) 记 $a_n = |PQ|$, 求数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 的前 n 项和 S_n .

题目 13 (2024 · 辽宁沈阳 · 二模) 以坐标原点为圆心的两个同心圆半径分别为 $\sqrt{6}$ 和 $\sqrt{3}$, P 为大圆上一动点, 大圆半径 OP 与小圆相交于点 B , $PP' \perp x$ 轴于 P' , $BB' \perp PP'$ 于 B' , B' 点的轨迹为 Ω .



- (1) 求 B' 点轨迹 Ω 的方程;
- (2) 点 $A(2,1)$, 若点 M, N 在 Ω 上, 且直线 AM, AN 的斜率乘积为 $\frac{1}{2}$, 线段 MN 的中点 G , 当直线 MN 与 y 轴的截距为负数时, 求 $\angle AOG$ 的余弦值.

题目 14 (2024 · 广东佛山 · 二模) 两条动直线 $y = k_1x$ 和 $y = k_2x$ 分别与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 相交于不同于原点的 A, B 两点, 当 $\triangle OAB$ 的垂心恰是 C 的焦点时, $|AB| = 4\sqrt{5}$.

- (1) 求 p ;
- (2) 若 $k_1k_2 = -4$, 弦 AB 中点为 P , 点 $M(-2,0)$ 关于直线 AB 的对称点 N 在抛物线 C 上, 求 $\triangle PMN$ 的面积.

- 题目 15** (2024 · 广东深圳 · 二模) 设抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$, 直线 $l: y = kx + 2$ 交 C 于 A, B 两点. 过原点 O 作 l 的垂线, 交直线 $y = -2$ 于点 M . 对任意 $k \in \mathbb{R}$, 直线 AM, AB, BM 的斜率成等差数列.
- (1) 求 C 的方程;
- (2) 若直线 $l' \parallel l$, 且 l' 与 C 相切于点 N , 证明: $\triangle AMN$ 的面积不小于 $2\sqrt{2}$.

- 题目 16** (2024 · 湖南 · 一模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 1)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{2}x$, C 的半焦距为 c , 且 $a^4 + b^4 + 4 = 4c^2$.
- (1) 求 C 的标准方程.
- (2) 若 P 为 C 上的一点, 且 P 为圆 $x^2 + y^2 = 4$ 外一点, 过 P 作圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的两条切线 l_1, l_2 (斜率都存在), l_1 与 C 交于另一点 M, l_2 与 C 交于另一点 N , 证明:
- (i) l_1, l_2 的斜率之积为定值;
- (ii) 存在定点 A , 使得 M, N 关于点 A 对称.

题目 17 (2024 · 湖南岳阳 · 三模) 已知动圆 P 过定点 $F(0,1)$ 且与直线 $y=3$ 相切, 记圆心 P 的轨迹为曲线 E .

- (1) 已知 A, B 两点的坐标分别为 $(-2,1), (2,1)$, 直线 AP, BP 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $k_1 - k_2 = 1$;
- (2) 若点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 是轨迹 E 上的两个动点且 $x_1 x_2 = -4$, 设线段 MN 的中点为 Q , 圆 P 与动点 Q 的轨迹 Γ 交于不同于 F 的三点 C, D, G , 求证: $\triangle CDG$ 的重心的横坐标为定值.

题目 18 (2024 · 湖北 · 二模) 已知双曲线 P 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1, B(-a, 0), C(a, 0)$, 其中 $a > 2$,

$D(x_0, y_0) (x_0 \geq a, y_0 > 0)$ 是双曲线上一点, 直线 DB 与双曲线 P 的另一个交点为 E , 直线 DC 与双曲线 P 的另一个交点为 F , 双曲线 P 在点 E, F 处的两条切线记为 l_1, l_2, l_1 与 l_2 交于点 P , 线段 DP 的中点为 G , 设直线 DB, DC 的斜率分别为 k_1, k_2 .

- (1) 证明: $4 < \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \leq \frac{4a}{\sqrt{a^2 - 4}}$;
- (2) 求 $\frac{|GB|}{|GC|}$ 的值.

题目 19 (2024 · 湖北 · 模拟预测) 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ 和 $C_2: \frac{x^2}{b^2} + y^2 = 1 (a > b > 0)$ 的离心率相同, 设 C_1

的右顶点为 A_1 , C_2 的左顶点为 A_2 , $B(0, 1)$,

(1) 证明: $BA_1 \perp BA_2$;

(2) 设直线 BA_1 与 C_2 的另一个交点为 P , 直线 BA_2 与 C_1 的另一个交点为 Q , 连 PQ , 求 $|PQ|$ 的最大值.

参考公式: $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$

题目 20 (2024 · 山东 · 二模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 设 C 的右焦点为 F , 左顶

点为 A , 过 F 的直线与 C 于 D, E 两点, 当直线 DE 垂直于 x 轴时, $\triangle ADE$ 的面积为 $\frac{9}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 连接 AD 和 AE 分别交圆 $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ 于 M, N 两点.

(i) 当直线 DE 斜率存在时, 设直线 DE 的斜率为 k_1 , 直线 MN 的斜率为 k_2 , 求 $\frac{k_1}{k_2}$;

(ii) 设 $\triangle ADE$ 的面积为 S_1 , $\triangle AMN$ 的面积为 S_2 , 求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值.

题目 21 (2024·山东潍坊·二模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 $2\sqrt{3}$, 右焦点 F_2 到一条渐近线的距离为 1.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过 C 上一点 $P_1(3, \sqrt{2})$ 作 C 的切线 l_1 , l_1 与 C 的两条渐近线分别交于 R, S 两点, P_2 为点 P_1 关于坐标原点的对称点, 过 P_2 作 C 的切线 l_2 , l_2 与 C 的两条渐近线分别交于 M, N 两点, 求四边形 $RSMN$ 的面积.

(3) 过 C 上一点 Q 向 C 的两条渐近线作垂线, 垂足分别为 H_1, H_2 , 是否存在点 Q , 满足 $|QH_1| + |QH_2| = 2$, 若存在, 求出点 Q 坐标; 若不存在, 请说明理由.

题目 22 (23-24 高三下·湖北武汉·阶段练习) 已知抛物线 $E: y = x^2$, 过点 $T(1, 2)$ 的直线与抛物线 E 交于 A, B 两点, 设抛物线 E 在点 A, B 处的切线分别为 l_1 和 l_2 , 已知 l_1 与 x 轴交于点 M , l_2 与 x 轴交于点 N , 设 l_1 与 l_2 的交点为 P .

(1) 证明: 点 P 在定直线上;

(2) 若 $\triangle PMN$ 面积为 $\sqrt{2}$, 求点 P 的坐标;

(3) 若 P, M, N, T 四点共圆, 求点 P 的坐标.

题目 23 (2024·福建漳州·一模) 已知过点 $F_1(-1,0)$ 的直线 l 与圆 $F_2: (x-1)^2+y^2=16$ 相交于 G, H 两点, GH 的中点为 E , 过 GF_1 的中点 F 且平行于 EF_2 的直线交 GF_2 于点 P , 记点 P 的轨迹为 C .

(1) 求轨迹 C 的方程.

(2) 若 A, B 为轨迹 C 上的两个动点且均不在 y 轴上, 点 M 满足 $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} (\lambda, \mu \in \mathbf{R})$, 其中 O 为坐标原点, 从下面①②③中选取两个作为条件, 证明另外一个成立.

①点 M 在轨迹 C 上; ②直线 OA 与 OB 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$; ③ $\lambda^2 + \mu^2 = 1$.

注: 若选择不同的组合分别解答, 则按第一个解答计分.

题目 24 (2024·福建福州·模拟预测) 点 P 是椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上 (左、右端点除外) 的一个动点, $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 分别是 E 的左、右焦点.

(1) 设点 P 到直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 的距离为 d , 证明 $\frac{|PF_2|}{d}$ 为定值, 并求出这个定值;

(2) $\triangle PF_1F_2$ 的重心与内心 (内切圆的圆心) 分别为 G, I , 已知直线 IG 垂直于 x 轴.

(i) 求椭圆 E 的离心率;

(ii) 若椭圆 E 的长轴长为 6, 求 $\triangle PF_1F_2$ 被直线 IG 分成两个部分的图形面积之比的取值范围.

题目 25 (2024 · 福建三明 · 三模) 已知平面直角坐标系 xOy 中, 有真命题: 函数 $y = mx + \frac{n}{x} (m \geqslant 0, n > 0)$

的图象是双曲线, 其渐近线分别为直线 $y = mx$ 和 y 轴. 例如双曲线 $y = \frac{4}{x}$ 的渐近线分别为 x 轴和 y 轴, 可将其图象绕原点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 得到双曲线 $x^2 - y^2 = 8$ 的图象.

(1) 求双曲线 $y = \frac{1}{x}$ 的离心率;

(2) 已知曲线 $E: x^2 - y^2 = 2$, 过 E 上一点 P 作切线分别交两条渐近线于 A, B 两点, 试探究 $\triangle AOB$ 面积是否为定值, 若是, 则求出该定值; 若不是, 则说明理由;

(3) 已知函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2x}$ 的图象为 Γ , 直线 $l: x + \sqrt{3}y - 3 = 0$, 过 $F(1, \sqrt{3})$ 的直线与 Γ 在第一象限交于 M, N 两点, 过 M, N 作 l 的垂线, 垂足分别为 C, D , 直线 MD, NC 交于点 H , 求 $\triangle MNH$ 面积的最小值.

题目 26 (2024 · 浙江绍兴 · 二模) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点到准线的距离为 2, 过点 $A(2, 2)$ 作直线交 C 于 M, N 两点, 点 $B(-1, 1)$, 记直线 BM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 .

(1) 求 C 的方程;

(2) 求 $3k_1k_2 - 2(k_1 + k_2)$ 的值;

(3) 设直线 BM 交 C 于另一点 Q , 求点 B 到直线 QN 距离的最大值.

题目 27 (2024·浙江绍兴·模拟预测) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点 F , 直线 l 过 F 且交 C 于两点 M, N , 已知当 $|MF| = 3|NF|$ 时, MN 中点纵坐标的值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求 C 的标准方程.

(2) 令 $F'(-\frac{p}{2}, 0)$, P 为 C 上的一点, 直线 $F'P, FP$ 分别交 C 于另两点 A, B . 证明: $\frac{|AF'|}{|PF'|} \cdot \frac{|PF|}{|BF|} = 1$.

(3) 过 A, B, P 分别作 C 的切线 l_1, l_2, l_3 , l_3 与 l_1 相交于 D , 同时与 l_2 相交于 E , 求四边形 $ABED$ 面积取值范围.

题目 28 (2024·河北保定·二模) 平面几何中有一定理如下: 三角形任意一个顶点到其垂心 (三角形三条高所在直线的交点) 的距离等于外心 (外接圆圆心) 到该顶点对边距离的 2 倍. 已知 $\triangle ABC$ 的垂心为 D , 外心为 E , D 和 E 关于原点 O 对称, $A(13, 0)$.

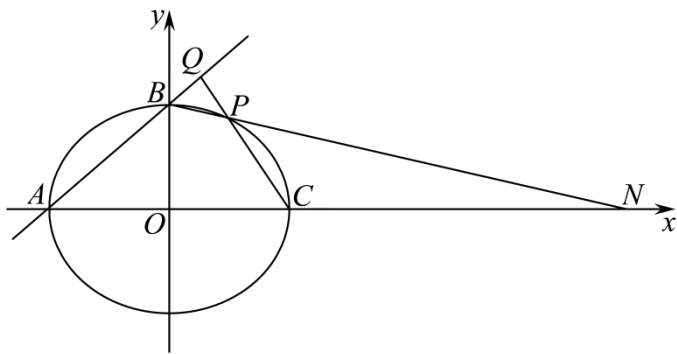
(1) 若 $E(3, 0)$, 点 B 在第二象限, 直线 $BC \perp x$ 轴, 求点 B 的坐标;

(2) 若 A, D, E 三点共线, 椭圆 $T: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与 $\triangle ABC$ 内切, 证明: D, E 为椭圆 T 的两个焦点.

题目 29 (2024 · 浙江杭州 · 模拟预测) 设双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, 直线 $l: y = x + m$ 与 C 交于 A, B 两点.

- (1) 求 m 的取值范围;
- (2) 已知 C 上存在异于 A, B 的 P, Q 两点, 使得 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = t$.
 - (i) 当 $t = 4$ 时, 求 P, Q 到点 $(-2m, -m)$ 的距离 (用含 m 的代数式表示);
 - (ii) 当 $t = 2$ 时, 记原点到直线 PQ 的距离为 d , 若直线 PQ 经过点 $(-m, m)$, 求 d 的取值范围.

题目 30 (2024 · 湖北 · 一模) 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, A, B 分别为椭圆的左顶点和上顶点, F_1 为左焦点, 且 $\triangle ABF_1$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



- (1) 求椭圆 M 的标准方程;
- (2) 设椭圆 M 的右顶点为 C , P 是椭圆 M 上不与顶点重合的动点.
 - (i) 若点 $P(1, \frac{3}{2})$, 点 D 在椭圆 M 上且位于 x 轴下方, 直线 PD 交 x 轴于点 F , 设 $\triangle APF$ 和 $\triangle CDF$ 的面积分别为 S_1, S_2 若 $S_1 - S_2 = \frac{3}{2}$, 求点 D 的坐标;
 - (ii) 若直线 AB 与直线 CP 交于点 Q , 直线 BP 交 x 轴于点 N , 求证: $2k_{QN} - k_{QC}$ 为定值, 并求出此定值 (其中 k_{QN}, k_{QC} 分别为直线 QN 和直线 QC 的斜率).

圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)(精选30题)

题目 1 (2024·山东·二模) 已知椭圆的焦点分别是 $F_1(\sqrt{3}, 0), F_2(-\sqrt{3}, 0)$, 点 M 在椭圆上, 且 $|MF_1| + |MF_2| = 4$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若直线 $y = kx + \sqrt{2}$ 与椭圆交于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$, 求实数 k 的值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

【分析】(1) 根据所给条件求出 a, b , 即可得出椭圆标准方程;

(2) 联立直线与椭圆方程, 根据根与系数的关系及 $OA \perp OB$, 列出方程求 k 即可.

【详解】(1) 设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

由题意可知 $\begin{cases} c = \sqrt{3} \\ 2a = 4 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \\ c = \sqrt{3}, \end{cases}$

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 如图,

联立方程 $\begin{cases} y = kx + \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$, 消去 y , 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8\sqrt{2}kx + 4 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{-8\sqrt{2}k}{1 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4}{1 + 4k^2}$,

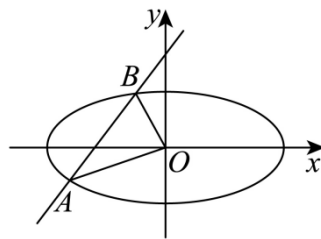
从而 $y_1 y_2 = (kx_1 + \sqrt{2})(kx_2 + \sqrt{2}) = k^2 x_1 x_2 + \sqrt{2}k(x_1 + x_2) + 2 = \frac{2 - 4k^2}{1 + 4k^2}$,

因为 $OA \perp OB, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 即 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$,

所以 $\frac{4}{1 + 4k^2} + \frac{2 - 4k^2}{1 + 4k^2} = \frac{6 - 4k^2}{1 + 4k^2} = 0$,

解得 $k = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$,

经验证知 $\Delta > 0$, 所以 k 的值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{6}}{2}$.



题目 2 (2024·江苏南通·模拟预测) 在平面直角坐标系 xOy 中, 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心

率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, 过 F_2 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 且 $\triangle AF_1 F_2$ 的周长是 $4 + 2\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 当 $|AB| = \frac{3}{2}|DE|$ 时, 求 $\triangle ODE$ 的面积.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【分析】(1) 由椭圆离心率和焦点三角形的周长, 列方程组求出 a, b , 得椭圆 C 的方程;

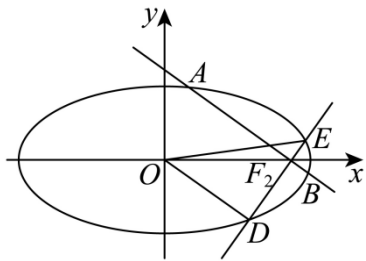
(2) 设直线 l_1, l_2 的方程, 与椭圆联立, 利用韦达定理和 $AB = \frac{3}{2}DE$ 求出 DE 和 l_2 的方程, 再求出 O 到直线 l_2 的距离, 可求 $\triangle ODE$ 的面积.

【详解】(1) 由题意知,
$$\begin{cases} 2a + 2c = 4 + 2\sqrt{3} \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}, \text{解得 } a = 2, b = 1, c = \sqrt{3},$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

(2) 若直线 l_1 的斜率不存在, 则直线 l_2 的斜率为 0, 不满足 $|AB| = \frac{3}{2}|DE|$,

直线 l_1 的斜率为 0, 则 A, F_1, F_2 三点共线, 不合题意,



所以直线 l_1 的斜率存在且不为 0, 设直线 l_1 的方程为 $x = my + \sqrt{3}$,

由 $\begin{cases} x = my + \sqrt{3} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$, 消去 x 得 $(\frac{m^2}{4} + 1)y^2 + \frac{\sqrt{3}m}{2}y - \frac{1}{4} = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{\frac{\sqrt{3}m}{2}}{\frac{m^2}{4} + 1}$, $y_1 y_2 = -\frac{\frac{1}{4}}{\frac{m^2}{4} + 1}$,

$\therefore |AB| = \sqrt{1 + m^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{1 + m^2} \cdot \frac{4\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 4} = \frac{4(m^2 + 1)}{m^2 + 4}$.

同理可得 $|DE| = \frac{4(\frac{1}{m^2} + 1)}{\frac{1}{m^2} + 4} = \frac{4(m^2 + 1)}{1 + 4m^2}$.

由 $|AB| = \frac{3}{2}|DE|$, 得 $\frac{4(m^2 + 1)}{m^2 + 4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4(m^2 + 1)}{1 + 4m^2}$, 解得 $m^2 = 2$, 则 $|DE| = \frac{4}{3}$,

$\therefore$ 直线 l_2 的方程为 $y = \pm\sqrt{2}(x - \sqrt{3})$,

$\therefore$ 坐标原点 O 到直线 l_2 的距离为 $d = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$, $S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

即 $\triangle ODE$ 的面积面积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【点睛】方法点睛:

解答直线与圆锥曲线的题目时, 时常把两个曲线的方程联立, 消去 x (或 y) 建立一元二次方程, 然后借助根与系数的关系, 并结合题设条件建立有关参变量的等量关系, 涉及到直线方程的设法时, 务必考虑全面, 不要忽略直线斜率为 0 或不存在等特殊情形, 强化有关直线与圆锥曲线联立得出一元二次方程后的运算能力, 重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题.

题目 3 (2024 · 河北邯郸 · 二模) 已知椭圆 C 的中心为坐标原点, 对称轴为 x 轴、 y 轴, 且过 $M(2, 0)$,

$N(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 两点.

(1) 求 C 的方程.

(2) A, B 是 C 上两个动点, D 为 C 的上顶点, 是否存在以 D 为顶点, AB 为底边的等腰直角三角形? 若存在, 求出满足条件的三角形的个数; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) 存在, 3个

【分析】(1) 设椭圆 C 的方程为 $mx^2 + ny^2 = 1 (m > 0, n > 0, m \neq n)$, 根据条件得到 $\begin{cases} 4m = 1 \\ m + \frac{3}{4}n = 1 \end{cases}$, 即可求出结果;

(2) 设直线 DA 为 $y = kx + 1$, 直线 DB 为 $y = -\frac{1}{k}x + 1$, 当 $k = 1$ 时, 由椭圆的对称性知满足题意; 当 $k^2 \neq 1$ 时, 联立直线与椭圆方程, 求出 A, B 的坐标, 进而求出 AB 中垂线方程, 根据条件中垂线直经过点 $D(0, 1)$, 从而将问题转化成方程 $k^4 - 7k^2 + 1 = 0$ 解的个数, 即可解决问题.

【详解】(1) 由题设椭圆 C 的方程为 $mx^2 + ny^2 = 1 (m > 0, n > 0, m \neq n)$,

因为椭圆过 $M(2, 0), N(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 两点,

所以 $\begin{cases} 4m = 1 \\ m + \frac{3}{4}n = 1 \end{cases}$, 得到 $m = \frac{1}{4}, n = 1$, 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 由 (1) 知 $D(0, 1)$, 易知直线 DA, DB 的斜率均存在且不为 0,

不妨设 $k_{DA} = k (k > 0), k_{DB} = -\frac{1}{k}$, 直线 DA 为 $y = kx + 1$, 直线 DB 为 $y = -\frac{1}{k}x + 1$,

由椭圆的对称性知, 当 $k = 1$ 时, 显然有 $|DA| = |DB|$, 满足题意,

当 $k^2 \neq 1$ 时, 由 $\begin{cases} y = kx + 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$, 消 y 得到 $(\frac{1}{4} + k^2)x^2 + 2kx = 0$,

所以 $x_A = -\frac{8k}{1 + 4k^2}, y_A = -\frac{8k^2}{1 + 4k^2} + 1 = \frac{1 - 4k^2}{1 + 4k^2}$, 即 $A(-\frac{8k}{1 + 4k^2}, \frac{1 - 4k^2}{1 + 4k^2})$,

同理可得 $B(\frac{8k}{k^2 + 4}, \frac{k^2 - 4}{k^2 + 4})$, 所以 $k_{AB} = \frac{\frac{k^2 - 4}{k^2 + 4} - \frac{1 - 4k^2}{1 + 4k^2}}{\frac{8k}{k^2 + 4} + \frac{8k}{1 + 4k^2}} = \frac{(k^2 - 4)(1 + 4k^2) - (k^2 + 4)(1 - 4k^2)}{8k(1 + 4k^2 + k^2 + 4)} = \frac{k^2 - 1}{5k}$,

设 AB 中点坐标为 (x_0, y_0) , 则 $x_0 = \frac{-\frac{8k}{1 + 4k^2} + \frac{8k}{k^2 + 4}}{2} = \frac{12k(k^2 - 1)}{(k^2 + 4)(1 + 4k^2)}, y_0 = \frac{\frac{1 - 4k^2}{1 + 4k^2} + \frac{k^2 - 4}{k^2 + 4}}{2} =$

$\frac{-15k^2}{(k^2 + 4)(1 + 4k^2)}$,

所以 AB 中垂线方程为 $y + \frac{15k^2}{(k^2 + 4)(1 + 4k^2)} = -\frac{5k}{k^2 - 1} \left(x - \frac{12k(k^2 - 1)}{(k^2 + 4)(1 + 4k^2)} \right)$,

要使 $\triangle ADB$ 为 AB 为底边的等腰直角三角形, 则直 AB 中垂线方程过点 $(0, 1)$,

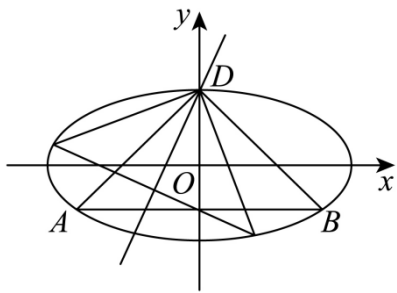
所以 $1 + \frac{15k^2}{(k^2 + 4)(1 + 4k^2)} = -\frac{5k}{k^2 - 1} \left(0 - \frac{12k(k^2 - 1)}{(k^2 + 4)(1 + 4k^2)} \right)$, 整理得到 $k^4 - 7k^2 + 1 = 0$,

令 $t = k^2$, 则 $t^2 - 7t + 1 = 0, \Delta = 49 - 4 > 0$, 所以 t 有两根 t_1, t_2 , 且 $t_1 + t_2 = 7 > 0, t_1 t_2 = 1 > 0$, 即 $t^2 - 7t + 1 = 0$ 有两个正根,

故有 2 个不同的 k^2 值, 满足 $k^4 - 7k^2 + 1 = 0$,

所以由椭圆的对称性知, 当 $k^2 \neq 1$ 时, 还存在 2 个符合题意的三角形,

综上所述, 存在以 D 为顶点, AB 为底边的等腰直角三角形, 满足条件的三角形的个数有 3 个.



【点睛】关键点点睛：本题的关键在于第(2)问，通过设出直线 DA 为 $y=kx+1$ ，直线 DB 为 $y=-\frac{1}{k}x+1$ ，联立椭圆方程求出 A, B 坐标，进而求出直线 AB 的中垂线方程，将问题转化成直线 AB 的中垂线经过点 $D(0, 1)$ ，再转化成关于 k 的方程的解的问题。

题目 4 (2024 · 广东广州 · 模拟预测) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2\sqrt{2})$ ，右顶点为 E ，上、下顶点分别为 B_1, B_2 ， G 是 EB_1 的中点，且 $\overrightarrow{EB_1} \cdot \overrightarrow{GB_2} = 1$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设过点 $D(-4, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M, N ，点 $A(-2, -1)$ ，直线 MA, NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P, Q ，求证：线段 PQ 的中点为定点。

【答案】(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 通过椭圆的性质和中点的坐标，然后根据向量的数量积得到等量关系即可求出椭圆的标准方程；

(2) 设出直线 l 的方程并与椭圆方程联立，化简写出根与系数的关系，求得点 P, Q 的坐标，进而证得线段 PQ 的中点为定点。

【详解】(1) 由题可得 $a^2=8$ ， $\therefore E(a, 0), B_1(0, b), B_2(0, -b)$ ，

$\therefore EB_1$ 的中点为 $G(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ ，

$\therefore \overrightarrow{EB_1} \cdot \overrightarrow{GB_2} = (-a, b) \cdot (-\frac{a}{2}, -\frac{3b}{2}) = \frac{a^2}{2} - \frac{3b^2}{2} = 1, \therefore b^2 = 2$ ，

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ ；

(2) 依题意可知直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=k(x+4)$ ，

由 $\begin{cases} y=k(x+4) \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ 消去 y 并化简得 $(1+4k^2)x^2 + 32k^2x + 64k^2 - 8 = 0$ ，

由 $\Delta = 1024k^4 - 4(1+4k^2)(64k^2 - 8) > 0$ ，得 $k^2 < \frac{1}{4}$ ， $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$ 。

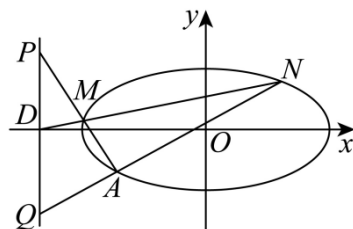
设 $M(x_M, y_M), N(x_N, y_N)$ ，则 $x_M + x_N = -\frac{32k^2}{1+4k^2}$ ， $x_M x_N = \frac{64k^2 - 8}{1+4k^2}$ ，

依题意可知直线 MA, NA 的斜率存在，

直线 MA 的方程为 $y+1 = \frac{y_M+1}{x_M+2}(x+2)$ ，

令 $x=-4$ ，得 $y_P = \frac{-2y_M - x_M - 4}{x_M + 2} = \frac{-2k(x_M+4) - x_M - 4}{x_M + 2}$ ，

$= \frac{(-2k-1)x_M - 8k - 4}{x_M + 2} = \frac{(-2k-1)(x_M+2) - 4k - 2}{x_M + 2} = -2k - 1 - \frac{4k+2}{x_M+2}$ ，



同理可求得 $y_Q = -2k - 1 - \frac{4k+2}{x_N+2}$,

$$\begin{aligned}\therefore y_P + y_Q &= -4k - 2 - \frac{4k+2}{x_M+2} - \frac{4k+2}{x_N+2} = -4k - 2 - (4k+2) \left(\frac{1}{x_M+2} + \frac{1}{x_N+2} \right) \\ &= -4k - 2 - (4k+2) \cdot \frac{x_M + x_N + 4}{x_M x_N + 2(x_M + x_N) + 4} \\ &= -4k - 2 - (4k+2) \cdot \frac{-\frac{32k^2}{1+4k^2} + 4}{\frac{64k^2-8}{1+4k^2} + 2\left(-\frac{32k^2}{1+4k^2}\right) + 4} = -4k - 2 + (4k+2) = 0,\end{aligned}$$

$\therefore$ 线段 PQ 的中点为定点 $(-4, 0)$.

【点睛】方法点睛:对于直线和圆锥曲线相交的问题,我们一般将直线和圆锥曲线联立,利用韦达定理带入计算求解.

题目 5 (2024 · 辽宁 · 二模) 平面直角坐标系 xOy 中,面积为9的正方形 $ABCD$ 的顶点 A, B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动,且 $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB}$,记动点 P 的轨迹为曲线 Γ .

(1) 求 Γ 的方程;

(2) 过点 $E(4, 1)$ 的动直线 l 与曲线 Γ 交于不同的两点 M, N 时,在线段 MN 上取点 Q ,满足 $|\overrightarrow{EM}| \cdot |\overrightarrow{QN}| = |\overrightarrow{QM}| \cdot |\overrightarrow{EN}|$. 试探究点 Q 是否在某条定直线上? 若是,求出定直线方程;若不是,说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 点 Q 在定直线上,定直线方程为 $3x + y - 3 = 0$

【分析】(1) 设点 P, A, B 的坐标,利用平面向量的坐标表示消参得 $\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2}x \\ y_0 = \sqrt{3}y \end{cases}$,结合正方形面积得 Γ 的方程;

(2) 设 $l: y = kx + 1 - 4k$, Q, M, N 的坐标,与椭圆联立并根据韦达定理得 M, N 横坐标关系,再根据线段乘积关系化为比值关系得 $\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{4 - x_1}{4 - x_2}$,化简得 $x_0 = \frac{2 + 4k}{3 + k}$,代入直线方程即可 y_0 ,从而求出定直线方程.

【详解】(1) 设 $P(x, y), A(x_0, 0), B(0, y_0)$,

$$\text{由 } \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}(x_0, 0) + \frac{\sqrt{3}}{3}(0, y_0) = \left(\frac{2}{3}x_0, \frac{\sqrt{3}}{3}y_0\right), \text{得 } \begin{cases} x = \frac{2}{3}x_0 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}y_0 \end{cases},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x_0 = \frac{3}{2}x \\ y_0 = \sqrt{3}y \end{cases},$$

因为正方形 $ABCD$ 的面积为 $|AB|^2 = 9$,即 $x_0^2 + y_0^2 = 9$,

$$\text{所以 } \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (\sqrt{3}y)^2 = 9, \text{整理可得 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

$$\text{因此 } C \text{ 的轨迹方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 依题意,直线 l 存在斜率,设 $l: y - 1 = k(x - 4)$,即 $y = kx + 1 - 4k$,

设点 $Q(x_0, y_0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) (x_1 < x_0 < x_2)$,

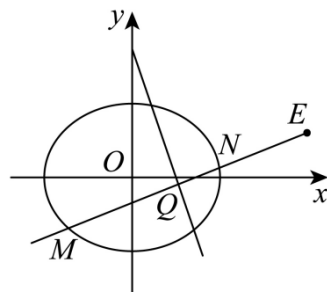
$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + 1 - 4k \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}, \text{消 } y \text{ 得 } 3x^2 + 4(kx + 1 - 4k)^2 = 12,$$

$$\text{即 } (3 + 4k^2)x^2 + 8k(1 - 4k)x + 4(1 - 4k)^2 - 12 = 0,$$

$$\text{由 } \Delta = 64k^2(1 - 4k)^2 - 16(3 + 4k^2)[(1 - 4k)^2 - 3]$$

$$= 16(1 - 4k)^2[4k^2 - (3 + 4k^2)] + 48(3 + 4k^2) = 48[(3 + 4k^2) - (1 - 4k)^2]$$

$$= 48(-12k^2 + 8k + 2) = 96(-6k^2 + 4k + 1) > 0,$$



可以得到 $\frac{2-\sqrt{10}}{6} < k < \frac{2+\sqrt{10}}{6}$,

所以 $k \neq -3$,

可得 $x_1+x_2 = -\frac{8k(1-4k)}{3+4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4(1-4k)^2-12}{3+4k^2}$,

由 $|\overrightarrow{EM}| \cdot |\overrightarrow{QN}| = |\overrightarrow{QM}| \cdot |\overrightarrow{EN}|$, 得 $\frac{|\overrightarrow{QM}|}{|\overrightarrow{QN}|} = \frac{|\overrightarrow{EM}|}{|\overrightarrow{EN}|}$,

所以 $\frac{x_0-x_1}{x_2-x_0} = \frac{4-x_1}{4-x_2}$,

可得 $x_0 = \frac{4(x_1+x_2) - 2x_1x_2}{8 - (x_1+x_2)} = \frac{4\left[-\frac{8k(1-4k)}{3+4k^2}\right] - 2\left[\frac{4(1-4k)^2-12}{3+4k^2}\right]}{8 - \left[-\frac{8k(1-4k)}{3+4k^2}\right]}$
 $= \frac{-32k(1-4k) - 8(1-4k)^2 + 24}{24 + 32k^2 + 8k - 24k^2} = \frac{-32k + 128k^2 - 128k^2 + 64k - 8 + 24}{24 + 8k}$
 $= \frac{16 + 32k}{24 + 8k} = \frac{2 + 4k}{3 + k}$,

所以 $y_0 = kx_0 + 1 - 4k = \frac{2k + 4k^2}{3 + k} + \frac{(1-4k)(3+k)}{3+k} = \frac{3-9k}{3+k}$,

因为 $3x_0 + y_0 = \frac{6+12k}{3+k} + \frac{3-9k}{3+k} = 3$,

所以点 Q 在定直线上, 定直线方程为 $3x + y - 3 = 0$.

题目 6 (2024·福建厦门·三模) 在直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 且当 l 的斜率为 1 时, $|MN| = 8$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 l 与 C 的准线交于点 P , 直线 PO 与 C 交于点 Q (异于原点), 线段 MN 的中点为 R , 若 $|QR| \leq 3$, 求 $\triangle MNQ$ 面积的取值范围.

【答案】 (1) $y^2 = 4x$;

(2) $(2, 6\sqrt{3}]$.

【分析】 (1) 先设 l 的方程为 $x = my + \frac{p}{2}$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 联立直线与抛物线方程, 结合韦达定理及抛物线定义即可求解;

(2) 先设出 $R(2m^2+1, 2m)$, 进而可求 P, Q 的坐标, 可得直线 $QR \parallel x$ 轴, 求出 $|QR|$ 的范围, 再由三角形面积公式即可求解.

【详解】 (1) 不妨先设 l 的方程为 $x = my + \frac{p}{2}$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

代入 $y^2 = 2px$, 可得 $y^2 - 2mpy - p^2 = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = 2mp$, $y_1y_2 = -p^2$,

则 $|MN| = x_1 + x_2 + p = m(y_1 + y_2) + 2p = 2m^2p + 2p$,

由题意可知当斜率为 1 时, $m = 1$, 又 $|MN| = 8$, 即 $2p + 2p = 8$,

解得 $p = 2$, 所以 C 的方程为 $y^2 = 4x$;

(2) 由 (1) 知 $p = 2$, 直线 l 的方程为 $x = my + 1$, 抛物线方程 $y^2 = 4x$,

$y_1 + y_2 = 4m$, $y_1y_2 = -4$

所以 R 的纵坐标 $y_R = \frac{y_1 + y_2}{2} = 2m$,

将 R 的纵坐标 $2m$ 代入 $x = my + 1$, 得 $x = 2m^2 + 1$, 所以 R 的坐标 $(2m^2 + 1, 2m)$,

易知抛物线的准线为 $x = -1$, 又因为 l 与 C 的准线交于点 P ,

所以 P 的坐标 $\left(-1, -\frac{2}{m}\right)$, 则直线 OP 的方程为 $x = \frac{m}{2}y$,

把 $x = \frac{m}{2}y$ 代入 $y^2 = 4x$, 得 $y^2 = 2my$, 即 $y = 2m$ 或 $y = 0$,

因为点 Q 异于原点, 从而 Q 的纵坐标为 $2m$,

把 $y = 2m$ 代入 $x = \frac{m}{2}y$, 得 $x = \frac{m}{2}y = m^2$, 所以 $Q(m^2, 2m)$,

因为 R 的坐标 $(2m^2+1, 2m)$, 所以 R, Q 的纵坐标相同,

所以直线 $QR \parallel x$ 轴, 且 $|QR| = |2m^2+1 - m^2| = |m^2+1|$,

所以 $\triangle MNQ$ 面积 $S_{\triangle MNQ} = S_{\triangle MRQ} + S_{\triangle NRQ} = \frac{1}{2}|QR||y_1 - y_2|$,

因为 $|y_1 - y_2|^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2 = 16m^2 + 16$,

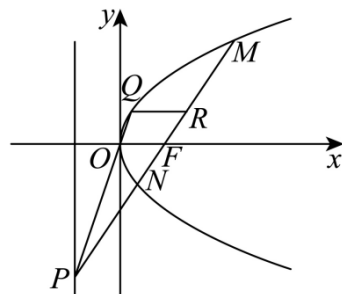
所以 $|y_1 - y_2| = \sqrt{16m^2 + 16} = 4\sqrt{m^2 + 1}$,

所以 $S_{\triangle MNQ} = \frac{1}{2}|m^2 + 1| \times 4\sqrt{m^2 + 1} = 2(m^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = 2|QR|^{\frac{3}{2}}$,

因为点 Q 异于原点, 所以 $m \neq 0$, 所以 $|m^2 + 1| > 0$,

因为 $|QR| \leq 3$, 所以 $1 < |QR| \leq 3$,

所以 $2 < 2|QR|^{\frac{3}{2}} \leq 6\sqrt{3}$, 即 $\triangle MNQ$ 面积的取值范围为 $(2, 6\sqrt{3}]$.



题目 7 (2024 · 浙江丽水 · 二模) 已知抛物线 $E: y^2 = 4x$, 点 A, B, C 在抛物线 E 上, 且 A 在 x 轴上方, B 和 C 在 x 轴下方 (B 在 C 左侧), A, C 关于 x 轴对称, 直线 AB 交 x 轴于点 M , 延长线段 CB 交 x 轴于点 Q , 连接 QA .

(1) 证明: $\frac{|OM|}{|OQ|}$ 为定值 (O 为坐标原点);

(2) 若点 Q 的横坐标为 -1 , 且 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{8}{9}$, 求 $\triangle AQB$ 的内切圆的方程.

【答案】 (1) 1

(2) $\left(x - \frac{1}{9}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$

【分析】 (1) 根据已知条件作出图形, 设出直线 AB 的方程, 与抛物线联立, 利用韦达定理及直线的点斜式方程即可求解;

(2) 根据 (1) 的结论及向量的数量积的坐标表示, 进而得出直线 AB 的方程, 利用直线的斜率公式及直线的点斜式方程, 结合角平分线的性质及圆的标准方程即可求解.

【详解】 (1) 设直线 AB 的方程为 $x = my + t$ ($m > 0$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $C(x_1, -y_1), M(t, 0)$,

由 $\begin{cases} x = my + t \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 消去 x , 得 $y^2 - 4my - 4t = 0$,

$\Delta = 16(m^2 + t) > 0 \Rightarrow m^2 + t > 0$,

所以 $y_1 + y_2 = 4m, y_1y_2 = -4t$,

直线 BC 的方程为 $y + y_1 = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, 化简得 $y = \frac{4x}{y_2 - y_1} - \frac{y_1y_2}{y_2 - y_1}$,

令 $y = 0$, 得 $x_Q = \frac{y_1y_2}{4} = -t$, 所以 $Q(-t, 0)$

因此 $\frac{|OM|}{|OQ|} = \frac{|t|}{|-t|} = 1$.

(2) 因为点 Q 的横坐标为 -1 , 由 (1) 可知, $Q(-1, 0), M(1, 0)$,

设 QA 交抛物线于 D , $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_1, -y_1), D(x_4, y_4)$, 如图所示

又由 (1) 知, $y_1y_2 = -4$, 同理可得 $y_1y_4 = 4$, 得 $y_4 = -y_2$,

$$\text{又 } x_1+x_2=my_1+1+my_2+1=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2,$$

$$x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=1,$$

$$\text{又 } \overrightarrow{MB}=(x_2-1, y_2), \overrightarrow{MC}=(x_1-1, -y_1),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=(x_2-1)(x_1-1)-y_1y_2=x_1x_2-(x_1+x_2)+1+4=4-4m^2,$$

$$\text{故 } 4-4m^2=\frac{8}{9}, \text{ 结合 } m>0, \text{ 得 } m=\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

$$\text{所以直线 } AB \text{ 的方程为 } 3x-\sqrt{7}y-3=0,$$

$$\text{又 } y_1-y_2=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{16m^2+16}=\frac{16}{3},$$

$$\text{则 } k_{AD}=\frac{y_1-y_4}{x_1-x_4}=\frac{y_1-y_4}{x_1-x_4}=\frac{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}{y_1+y_4}=\frac{4}{y_1+y_4}=\frac{4}{y_1-y_2}=\frac{3}{4},$$

$$\text{所以直线 } AD \text{ 的方程为 } 3x-4y+3=0,$$

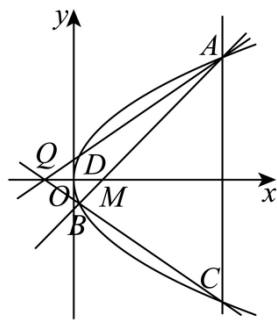
$$\text{设圆心 } T(s, 0) (-1<s<1),$$

因为 QM 为 $\angle AQB$ 的平分线, 故点 T 到直线 AB 和直线 AD 的距离相等,

$$\text{所以 } \frac{|3s+3|}{5}=\frac{|3s-3|}{4}, \text{ 因为 } -1<s<1, \text{ 解得 } s=\frac{1}{9},$$

$$\text{故圆 } T \text{ 的半径 } r=\frac{3s+3}{5}=\frac{2}{3},$$

$$\text{因此圆 } T \text{ 的方程为 } \left(x-\frac{1}{9}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}.$$



题目 8 (2024·江苏苏州·模拟预测) 已知点 $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$ 和动点 $P(x,y)$ 满足 y^2 是 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的等差中项.

(1) 求 P 点的轨迹方程;

(2) 设 P 点的轨迹为曲线 C_1 按向量 $\vec{a}=\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{16}\right)$ 平移后得到曲线 C_2 , 曲线 C_2 上不同的两点 M, N 的连线交 y 轴于点 $Q(0,b)$, 如果 $\angle MON$ (O 为坐标原点) 为锐角, 求实数 b 的取值范围;

(3) 在 (2) 的条件下, 如果 $b=2$ 时, 曲线 C_2 在点 M 和 N 处的切线的交点为 R , 求证: R 在一条定直线上.

【答案】(1) $y=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$;

(2) $b<0$ 或 $b>1$;

(3) 证明见解析.

【分析】(1) 根据题意, 由平面向量的坐标运算, 结合等差中项的定义代入计算, 即可得到结果;

(2) 根据题意, 由平移公式可得曲线 C_2 的方程, 然后与直线 MN 的方程联立, 由平面向量的夹角公式, 代入计算, 即可得到结果;

(3) 根据题意, 求导可得在点 M, N 处的切线方程, 联立两条切线方程, 代入计算, 即可得到结果.

【详解】(1) 由题意可得 $\overrightarrow{PA}=(1-x, -y)$, $\overrightarrow{PB}=(-x, 1-y)$, $\overrightarrow{PC}=(1-x, 1-y)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(1-x)\cdot(-x)+(-y)\cdot(1-y)=x^2+y^2-x-y,$$

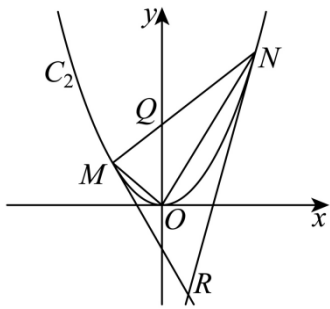
$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(1-x)\cdot(1-x)+(-y)\cdot(1-y)=x^2+y^2-2x-y+1,$$

$$\text{又 } \because y^2 \text{ 是 } \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC} \text{ 的等差中项,}$$

$$\therefore (x^2+y^2-x-y)+(x^2+y^2-2x-y+1)=2y^2,$$

$$\text{整理得点 } P(x,y) \text{ 的轨迹方程为 } y=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}.$$

(2)



由(1)知 $C_1: y = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$,

又 $\because \vec{a} = (-\frac{3}{4}, \frac{1}{16})$, $\therefore$ 平移公式为 $\begin{cases} x' = x - \frac{3}{4} \\ y' = y + \frac{1}{16} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = x' + \frac{3}{4} \\ y = y' - \frac{1}{16} \end{cases}$,

代入曲线 C_1 的方程得到曲线 C_2 的方程为: $y' - \frac{1}{16} = (x' + \frac{3}{4})^2 - \frac{3}{2}(x' + \frac{3}{4}) + \frac{1}{2}$,

即 $y' = x'^2$.

曲线 C_2 的方程为 $y = x^2$.

如图由题意可设 M, N 所在的直线方程为 $y = kx + b$,

由 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = kx + b \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2 - kx - b = 0$,

令 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$, 则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -b \end{cases}$,

$\therefore \overrightarrow{OM} = (x_1, y_1) = (x_1, x_1^2), \overrightarrow{ON} = (x_2, y_2) = (x_2, x_2^2)$,

又 $\because \angle MON$ 为锐角, $\therefore \cos \angle MON = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} > 0$, 即 $\frac{x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} > 0$,

$\therefore x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2 > 0$, 又 $x_1 x_2 = -b$,

$\therefore -b + (-b)^2 > 0$, 得 $b < 0$ 或 $b > 1$.

(3) 当 $b = 2$ 时, 由(2)可得 $\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = -b = -2 \end{cases}$, 对 $y = x^2$ 求导可得 $y' = 2x$,

$\therefore$ 抛物线 C_2 在点,

$M = (x_1, x_1^2), N(x_2, x_2^2)$ 处的切线的斜率分别为 $k_M = 2x_1$,

$k_N = 2x_2$,

$\therefore$ 在点 M, N 处的切线方程分别为 $l_M: y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1), l_N: y - x_2^2 = 2x_2(x - x_2)$,

由 $\begin{cases} y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1) \\ y - x_2^2 = 2x_2(x - x_2) \end{cases} (x_1 \neq x_2)$, 解得交点 R 的坐标 (x, y) .

满足 $\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = x_1 x_2 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = \frac{k}{2} \\ y = -2 \end{cases}$, $\therefore R$ 点在定直线 $y = -2$ 上.

【点睛】关键点睛: 本题主要考查了曲线的轨迹方程问题以及切线问题, 难度较大, 解答本题的关键在于联立方程结合韦达定理计算以及转化为坐标运算.

题目 9 (2024 · 江苏南通 · 二模) 已知双曲线 E 的渐近线为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 左顶点为 $A(-\sqrt{3}, 0)$.

(1) 求双曲线 E 的方程;

(2) 直线 $l: x = t$ 交 x 轴于点 D , 过 D 点的直线交双曲线 E 于 B, C , 直线 AB, AC 分别交 l 于 G, H , 若 O, A, G, H 均在圆 P 上,

①求 D 的横坐标;

②求圆 P 面积的取值范围.

【答案】(1) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$

(2) ① $(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0)$; ② $S > \frac{27\pi}{16}$ 且 $S \neq \frac{7\pi}{4}$

【分析】(1) 根据渐近线方程及顶点求出 a, b 得双曲线方程;

(2) ① 设 $D(t, 0)$, 由四点共圆可得 $k_{AG} \cdot k_{OH} = 1$, 根据斜率公式转化为 B, C 点坐标表示形式, 由直线与双曲线联立得出根与系数的关系, 据此化简即可求出 t ; ② 求出 G 点坐标得出 OG , 利用正弦定理求出外接圆的半径, 根据均值不等式求出半径的最值, 即可得出圆面积的最值.

【详解】(1) 因为双曲线的渐近线关于坐标轴及原点对称, 又顶点在 x 轴上,

可设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

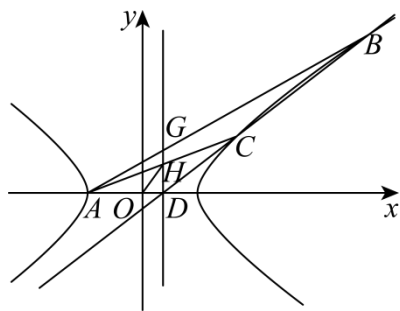
从而渐近线方程为: $y = \pm \frac{b}{a}x$, 由题条件知: $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为双曲线的左顶点为 $A(-\sqrt{3}, 0)$,

所以 $a = \sqrt{3}, b = 1$,

所以双曲线的方程为: $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

(2) 如图,



① $D(t, 0)$, 设直线 BC 的方程为: $my = x - t$,

将 $x = my + t$ 代入方程: $x^2 - 3y^2 - 3 = 0$, 得 $(m^2 - 3)y^2 + 2mty + t^2 - 3 = 0$,

当 $m^2 - 3 \neq 0$ 且 $\Delta = 12(t^2 + m^2 - 3) > 0$ 时,

设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{2mt}{m^2 - 3}, y_1 y_2 = \frac{t^2 - 3}{m^2 - 3}$.

设直线 AG 的倾斜角为 α , 不妨设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则 $\angle AGH = \frac{\pi}{2} - \alpha$,

由于 O, A, G, H 四点共圆知: $\angle HOD = \angle AGH$,

所以直线 OH 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $k_{AG} \cdot k_{OH} = \tan \alpha \cdot \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = 1$.

直线 AC 的方程为: $y = \frac{y_2}{x_2 + \sqrt{3}}(x + \sqrt{3})$,

令 $x = t$, 则 $y = \frac{y_2(t + \sqrt{3})}{x_2 + \sqrt{3}}$, 从而 $H(t, \frac{y_2(t + \sqrt{3})}{x_2 + \sqrt{3}})$,

所以 $k_{OH} = \frac{y_2(t + \sqrt{3})}{t(x_2 + \sqrt{3})}$, 又 $k_{AG} = k_{AB} = \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{3}}$,

得: $\frac{y_1}{x_1 + \sqrt{3}} \times \frac{y_2(t + \sqrt{3})}{t(x_2 + \sqrt{3})} = 1 \Rightarrow (t + \sqrt{3})y_1 y_2 = t(x_1 + \sqrt{3})(x_2 + \sqrt{3})$,

又 $x_1 = my_1 + t, x_2 = my_2 + t$ 代入上式得:

$$\begin{aligned}
(t+\sqrt{3})y_1y_2 &= t(my_1+t+\sqrt{3})(my_2+t+\sqrt{3}), \\
\Rightarrow (t+\sqrt{3})y_1y_2 &= t[m^2y_1y_2+m(t+\sqrt{3})(y_1+y_2)+(t+\sqrt{3})^2], \\
\Rightarrow (t+\sqrt{3}) \cdot \frac{t^2-3}{m^2-3} &= t\left(m^2 \cdot \frac{t^2-3}{m^2-3} + m(t+\sqrt{3}) \cdot \frac{-2mt}{m^2-3} + (t+\sqrt{3})^2\right), \\
\text{化简得: } 4t^2+3\sqrt{3}t-3 &= 0, \text{ 解得: } t=-\sqrt{3}(\text{舍}) \text{ 或 } t=\frac{\sqrt{3}}{4}.
\end{aligned}$$

故点 D 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$.

② 直线 AG 的方程为 $y = \tan\alpha \cdot (x + \sqrt{3})$, 由①知: $t = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

所以 $G\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\tan\alpha\right)$.

直线 OH 方程: $y = \frac{1}{\tan\alpha}x$, 所以 $H\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4\tan\alpha}\right)$,

若 G, H 在 x 轴上方时, G 在 H 的上方, 即 $\tan\alpha > 0$ 时, $\frac{5\sqrt{3}}{4}\tan\alpha > \frac{\sqrt{3}}{4\tan\alpha}$;

若 G, H 在 x 轴下方时, 即 $\tan\alpha < 0$ 时, $\frac{5\sqrt{3}}{4}\tan\alpha < \frac{\sqrt{3}}{4\tan\alpha}$,

所以 $\tan\alpha > \frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\tan\alpha < -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

又直线 AG 与渐近线不平行, 所以 $\tan\alpha \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $0 < \alpha < \pi$, $\tan\alpha > \frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\tan\alpha < -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 且 $\tan\alpha \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $OG = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}\tan\alpha}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{3(1+25\tan^2\alpha)}$,

设圆 P 的半径为 R , 面积为 S , 则 $2R = \frac{OG}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{3(1+25\tan^2\alpha)}}{\sin\alpha}$,

所以 $R^2 = \frac{3}{64} \times \frac{(1+25\tan^2\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{64} \times \frac{(1+25\tan^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha}$

$= \frac{3}{64} \times \frac{(1+25\tan^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)}{\tan^2\alpha} = \frac{3}{64} \left(25\tan^2\alpha + \frac{1}{\tan^2\alpha} + 26\right)$

$\geq \frac{3}{64} \left(2\sqrt{25\tan^2\alpha \cdot \frac{1}{\tan^2\alpha}} + 26\right) = \frac{27}{16}$,

当且仅当 $25\tan^2\alpha = \frac{1}{\tan^2\alpha}$ 即 $\tan\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时, 上述不等式取等号,

$\tan\alpha > \frac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\tan\alpha < -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 且 $\tan\alpha \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 $R^2 > \frac{27}{16}$ 且 $R^2 \neq \frac{7}{4}$, 从而 $S > \frac{27\pi}{16}$ 且 $S \neq \frac{7\pi}{4}$.

【点睛】关键点点睛: 本题的关键点在于利用直线的倾斜角与圆的内接四边形的角的关系, 得出 $k_{AG} \cdot k_{OH} =$

$\tan\alpha \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = 1$ 这一关键数量关系, 再转化为直线与双曲线相交, 利用根与系

数的关系化简求参数的常规问题.

题目 10 (2024·江苏南京·二模) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 有公

共的焦点 F , 且 $p = 4b$. 过 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 与 E 的两条渐近线交于 P, Q 两点 (均位于 y 轴右侧).

(1) 求 E 的渐近线方程;

(2) 若实数 λ 满足 $\lambda\left(\frac{1}{|OP|} + \frac{1}{|OQ|}\right) = \left|\frac{1}{|AF|} - \frac{1}{|BF|}\right|$, 求 λ 的取值范围.

【答案】(1) $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

(2) $\left[0, \frac{1}{2}\right)$

【分析】(1) 由两曲线有公共的焦点 F , 且 $p = 4b$, 得 $c = 2b$, $a = \sqrt{3}b$, 可求渐近线方程;

(2) 通过设直线方程, 联立方程组, 借助韦达定理, 表示出 $\frac{1}{|OP|} + \frac{1}{|OQ|}$ 和 $\frac{1}{|AF|} - \frac{1}{|BF|}$, 由

$\lambda\left(\frac{1}{|OP|} + \frac{1}{|OQ|}\right) = \left|\frac{1}{|AF|} - \frac{1}{|BF|}\right|$ 求 λ 的取值范围.

【详解】(1) 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 与双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 有公共的焦点 F ,

设双曲线 E 的焦距为 $2c$, 则有 $\frac{p}{2} = c$,

又 $p = 4b$, 则 $c = 2b$.

由 $a^2 + b^2 = c^2$, 得 $a = \sqrt{3}b$,

所以 E 的渐近线的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

(2) 设 $l: x = my + c$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

1 与 E 的两条近线交于 P, Q 两点均位于 y 轴右侧, 有 $m^2 < 3$,

由 $\begin{cases} x = my + c \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$, 解得 $y_1 = \frac{c}{\sqrt{3} - m}$, $y_2 = \frac{c}{-\sqrt{3} - m}$,

$$\frac{1}{OP} + \frac{1}{OQ} = \frac{1}{2|y_1|} + \frac{1}{2|y_2|} = \frac{|\sqrt{3} - m| + |-\sqrt{3} - m|}{2c} = \frac{|\sqrt{3} - m - (-\sqrt{3} - m)|}{2c} = \frac{\sqrt{3}}{c}.$$

设 $A(x_3, y_3), B(x_4, y_4)$, 由 $\begin{cases} x = my + c \\ y^2 = 2px \end{cases}$, 消去 x 得 $y^2 - 2pmx - p^2 = 0$,

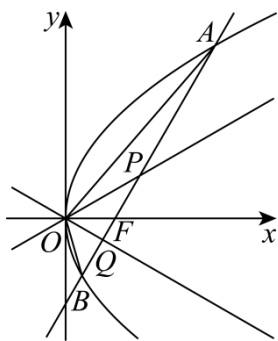
则有 $y_3 + y_4 = 2pm$, $y_3 y_4 = -p^2$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{AF} - \frac{1}{BF} \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{1+m^2}|y_3|} - \frac{1}{\sqrt{1+m^2}|y_4|} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \left| \frac{|y_3| - |y_4|}{|y_3||y_4|} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{|y_3 + y_4|}{|y_3 y_4|} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{|2pm|}{p^2} = \frac{2}{p} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{m^2+1}}, \end{aligned}$$

由 $\lambda\left(\frac{1}{|OP|} + \frac{1}{|OQ|}\right) = \left|\frac{1}{|AF|} - \frac{1}{|BF|}\right|$, $\frac{p}{2} = c$,

有 $\lambda \cdot \frac{\sqrt{3}}{c} = \frac{2}{p} \cdot \sqrt{\frac{m^2}{m^2+1}}$, 即 $\sqrt{3}\lambda = \sqrt{\frac{m^2}{m^2+1}}$,

由 $m^2 < 3$, 有 $\sqrt{3}\lambda \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.



【点睛】方法点睛：

解答直线与圆锥曲线的题目时，时常把两个曲线的方程联立，消去 x (或 y) 建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件建立有关参变量的等量关系，涉及到直线方程的设法时，务必考虑全面，不要忽略直线斜率为 0 或不存在等特殊情形，强化有关直线与圆锥曲线联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题。

题目 11 (2024 · 重庆 · 三模) 已知 $F(2,0)$ ，曲线 C 上任意一点到点 F 的距离是到直线 $x = \frac{1}{2}$ 的距离的两倍。

(1) 求曲线 C 的方程；

(2) 已知曲线 C 的左顶点为 A ，直线 l 过点 F 且与曲线 C 在第一、四象限分别交于 M, N 两点，直线 AM, AN 分别与直线 $x = \frac{1}{2}$ 交于 P, H 两点， Q 为 PH 的中点。

(i) 证明： $QF \perp MN$ ；

(ii) 记 $\triangle PMQ, \triangle HNQ, \triangle MNQ$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 ，则 $\frac{S_1+S_2}{S_3}$ 是否为定值？若是，求出这个定值；若不是，请说明理由。

【答案】(1) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

(2) (i) 证明见解析；(ii) 是， $\frac{1}{2}$

【分析】(1) 设曲线 C 上任意一点坐标为 (x, y) ，利用坐标可得曲线 C 的方程；

(2) (i) 设直线 $MN: x = my + 2$ ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，联立方程组可得 $y_1 + y_2 = -\frac{12m}{3m^2 - 1}$ ， $y_1 y_2 = \frac{9}{3m^2 - 1}$ ，求得直线 $AM: y = \frac{y_1}{x_1 + 1}(x + 1)$ ，求得 P, H ，进而可得 Q 的坐标，求得 $\overrightarrow{FQ}$ 的坐标，直线 MN 的方向向量的坐标，利用向量法可证结论。

(ii) 法一：利用 (i) 可求得 $|MN| = \frac{6(1+m^2)}{1-3m^2}$ ； $|QF| = \frac{3\sqrt{1+m^2}}{2}$ ，进而可得 $S_3 = \frac{1}{2}|MN| \cdot |QF| =$

$\frac{9(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{2(1-3m^2)}$ ，进而求得 $S_1 + S_2 = \frac{1}{4}|PH| \cdot (x_1 + x_2 - 1)$ ，代入运算可求得 $S_1 + S_2 = \frac{9(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{4(1-3m^2)}$ ，可求结论。

法二：(利用双曲线的第二定义) 由 (1) 知， $|MF| = 2(x_1 - \frac{1}{2})$ ，同理 $|NF| = 2(x_2 - \frac{1}{2})$ ，计算可得 $S_1 + S_2 =$

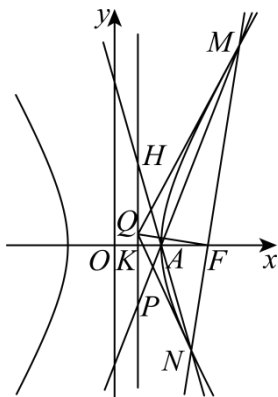
$\frac{1}{8}|PH| \cdot |MN|$ ，又 $S_3 = \frac{1}{2}|MN| \cdot |QF|$ ， $\frac{S_1+S_2}{S_3} = \frac{1}{4} \frac{|PH|}{|QF|}$ ，进而计算可得结论成立。

【详解】(1) 设曲线 C 上任意一点坐标为 (x, y) ，则由题意可知：

$$(x-2)^2 + y^2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow x^2 - \frac{y^2}{3} = 1,$$

故曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) (i) 设直线 $MN: x = my + 2$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,



其中 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < m < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 且 $x_1 > 1$, $x_2 > 1$

$$\begin{cases} x = my + 2 \\ 3x^2 - y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3m^2 - 1)y^2 + 12my + 9 = 0,$$

$$\text{故 } y_1 + y_2 = -\frac{12m}{3m^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{9}{3m^2 - 1};$$

$$\text{直线 } AM: y = \frac{y_1}{x_1 + 1}(x + 1), \text{ 当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } y = \frac{3y_1}{2(x_1 + 1)}, \text{ 故 } P\left(\frac{1}{2}, \frac{3y_1}{2(x_1 + 1)}\right),$$

$$\text{同理 } H\left(\frac{1}{2}, \frac{3y_2}{2(x_2 + 1)}\right), Q \text{ 为 } PH \text{ 中点,}$$

$$\text{故 } y_Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{y_1}{x_1 + 1} + \frac{y_2}{x_2 + 1} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{y_1(x_2 + 1) + y_2(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)};$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = (my_1 + 3)(my_2 + 3) = m^2 y_1 y_2 + 3m(y_1 + y_2) + 9 = \frac{9m^2 - 36m^2 + 9(3m^2 - 1)}{3m^2 - 1} = -\frac{9}{3m^2 - 1}; (*)$$

$$y_1(x_2 + 1) + y_2(x_1 + 1) = y_1(my_2 + 3) + y_2(my_1 + 3) = 2my_1 y_2 + 3(y_1 + y_2) = \frac{18m - 36m}{3m^2 - 1} = -\frac{18m}{3m^2 - 1};$$

$$\text{故 } y_Q = \frac{3}{4} \cdot \frac{18m}{9} = \frac{3m}{2}, \text{ 即 } Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3m}{2}\right), \text{ 则 } \overrightarrow{FQ} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3m}{2}\right),$$

$$\text{直线 } MN \text{ 的方向向量 } \vec{a} = (m, 1), \vec{a} \cdot \overrightarrow{FQ} = -\frac{3m}{2} + \frac{3m}{2} = 0, \text{ 故 } QF \perp MN.$$

$$(ii) \text{ 法一: } |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{\frac{144m^2 - 36(3m^2 - 1)}{(3m^2 - 1)^2}} = \frac{6\sqrt{1 + m^2}}{1 - 3m^2}; (**)$$

$$\text{故 } |MN| = \sqrt{1 + m^2} |y_1 - y_2| = \frac{6(1 + m^2)}{1 - 3m^2}; |QF| = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{3m}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{1 + m^2}}{2},$$

$$\text{又 } QF \perp MN, \text{ 故 } S_3 = \frac{1}{2} |MN| \cdot |QF| = \frac{9(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{2(1 - 3m^2)}.$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} |PQ| \cdot \left(x_1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} |HQ| \cdot \left(x_2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} |PH| \cdot (x_1 + x_2 - 1);$$

$$x_1 + x_2 - 1 = m(y_1 + y_2) + 3 = \frac{-12m^2 + 9m^2 - 3}{3m^2 - 1} = \frac{3(1 + m^2)}{1 - 3m^2};$$

$$|PH| = \left| \frac{3y_1}{2(x_1 + 1)} - \frac{3y_2}{2(x_2 + 1)} \right| = \frac{3}{2} \left| \frac{y_1(x_2 + 1) - y_2(x_1 + 1)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \right|,$$

$$= \frac{3}{2} \left| \frac{y_1(my_2 + 3) - y_2(my_1 + 3)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \right| = \frac{9}{2} \left| \frac{y_1 - y_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \right|,$$

$$\text{由 } (*) \text{ 知 } |(x_1 + 1)(x_2 + 1)| = \frac{9}{1 - 3m^2}, \text{ 由 } (**) \text{ 知 } |y_1 - y_2| = \frac{6\sqrt{1 + m^2}}{1 - 3m^2},$$

$$\text{故 } |PH| = \frac{9}{2} \cdot \frac{6\sqrt{1+m^2}}{1-3m^2} \cdot \frac{1-3m^2}{9} = 3\sqrt{1+m^2},$$

$$\text{故 } S_1+S_2 = \frac{1}{4} \cdot 3\sqrt{1+m^2} \cdot \frac{3(1+m^2)}{1-3m^2} = \frac{9(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{4(1-3m^2)}, \text{ 则 } \frac{S_1+S_2}{S_3} = \frac{1}{2}.$$

法二: (利用双曲线的第二定义) 由 (1) 知, $|MF| = 2(x_1 - \frac{1}{2})$, 同理 $|NF| = 2(x_2 - \frac{1}{2})$,

$$\text{故 } S_1+S_2 = \frac{1}{4}|PH|(x_1+x_2-1) = \frac{1}{8}|PH| \cdot (|MF| + |NF|) = \frac{1}{8}|PH| \cdot |MN|,$$

$$\text{又 } S_3 = \frac{1}{2}|MN| \cdot |QF|, \text{ 故 } \frac{S_1+S_2}{S_3} = \frac{1}{4} \frac{|PH|}{|QF|},$$

$$\text{又 } |y_P y_H| = \frac{9}{4} \left| \frac{y_1 y_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \right|,$$

$$\text{且由 (*) 知 } |y_P y_H| = \frac{9}{4} \left| \frac{\frac{9}{3m^2-1}}{\frac{-9}{3m^2-1}} \right| = \frac{9}{4}, \text{ 记直线 } PH \text{ 与 } x \text{ 轴相交于点 } K,$$

$$\text{由 } |y_P y_H| = \frac{9}{4} \text{ 可得 } |PK| \cdot |HK| = |FK|^2, \text{ 即 } \frac{|PK|}{|FK|} = \frac{|FK|}{|HK|}, \text{ 即 } \triangle PKF \sim \triangle PFH,$$

故 $PF \perp HF$;

$$\text{又 } Q \text{ 为 } PH \text{ 的中点, 故 } |QF| = \frac{1}{2}|PH|, \text{ 即 } \frac{S_1+S_2}{S_3} = \frac{1}{4} \frac{|PH|}{|QF|} = \frac{1}{2}.$$

【点睛】方法点睛: 直线与双曲线联立问题

第一步: 设直线方程: 有的题设条件已知点, 而斜率未知; 有的题设条件已知斜率, 点不定, 都可设出直线方程.

第二步: 联立方程: 把所设直线方程与抛物线方程联立, 消去一个元, 得到一个一元二次方程.

第三步: 求解判别式 Δ : 计算一元二次方程根的判别式 $\Delta > 0$ (有些题可不考虑).

第四步: 写出根之间的关系, 由根与系数的关系可写出.

第五步: 根据题设条件求解问题中的结论.

有些运算量大, 转化是关键, 运算求解能力也是考查点之一.

题目 12 (2024 · 河北 · 二模) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1) 若椭圆 E 过点 $(2, \sqrt{2})$, 求椭圆 E 的标准方程.

(2) 若直线 l_1, l_2 均过点 $P(p_n, 0) (0 < p_n < a, n \in \mathbf{N}^*)$ 且互相垂直, 直线 l_1 交椭圆 E 于 A, B 两点, 直线 l_2 交椭圆 E 于 C, D 两点, M, N 分别为弦 AB 和 CD 的中点, 直线 MN 与 x 轴交于点 $Q(t_n, 0)$, 设 $p_n = \frac{1}{3^n}$.

(i) 求 t_n ;

(ii) 记 $a_n = |PQ|$, 求数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 的前 n 项和 S_n .

$$\text{【答案】(1) } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(2) \text{ (i) } t_n = \frac{2}{3^{n+1}}; \text{ (ii) } S_n = \frac{9}{2}(3^n - 1).$$

【分析】(1) 根据椭圆的离心率得到 a, b 之间的关系, 再结合椭圆过点 $(2, \sqrt{2})$, 求出 b^2 的值, 从而得到椭圆的方程.

(2) (i) 利用根与系数的关系及中点坐标公式求得点 M, N 的坐标, 再根据 M, N, Q 三点共线得 t_n, p_n 之间的关系; (ii) 求得 a_n , 并利用等比数列的前 n 项和公式求得 S_n .

【详解】(1) 因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $a^2 = 2b^2$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

因为椭圆 E 过点 $(2, \sqrt{2})$, 所以 $\frac{4}{2b^2} + \frac{2}{b^2} = 1$, 解得 $b^2 = 4$,

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) (i) 当直线 l_1, l_2 中一条直线的斜率不存在, 另一条直线的斜率为 0 时, 直线 MN 与 x 轴重合, 不符合题意. 故直线 l_1, l_2 的斜率均存在且不为 0.

设直线 l_1 的方程为 $y = k(x - p_n)$ ($k \neq 0$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_M, y_M), N(x_N, y_N)$,

联立方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = k(x - p_n) \end{cases}$, 消去 y 并整理得 $(1 + 2k^2)x^2 - 4k^2p_nx + 2k^2p_n^2 - 2b^2 = 0$,

因为直线与椭圆相交于两个不同的交点, 所以 $\Delta > 0$,

根据韦达定理得, $x_1 + x_2 = \frac{4p_nk^2}{1 + 2k^2}$, $x_1x_2 = \frac{2k^2p_n^2 - 2b^2}{1 + 2k^2}$,

则 $\begin{cases} x_M = \frac{2p_nk^2}{1 + 2k^2} \\ y_M = \frac{-p_nk}{1 + 2k^2} \end{cases}$,

同理可得 $\begin{cases} x_N = \frac{2p_n}{k^2 + 2} \\ y_N = \frac{p_nk}{k^2 + 2} \end{cases}$,

因为 M, N, Q 三点共线, 所以 $y_N(x_N - x_M) = (y_N - y_M)(x_N - t_n)$,

易知 $y_N - y_M \neq 0$,

则 $t_n = \frac{x_M y_N - x_N y_M}{y_N - y_M} = \frac{\frac{2p_nk^2}{1 + 2k^2} \cdot \frac{p_nk}{k^2 + 2} - \frac{2p_n}{k^2 + 2} \cdot \frac{-p_nk}{1 + 2k^2}}{\frac{p_nk}{k^2 + 2} - \frac{-p_nk}{1 + 2k^2}} = \frac{2p_n}{3}$,

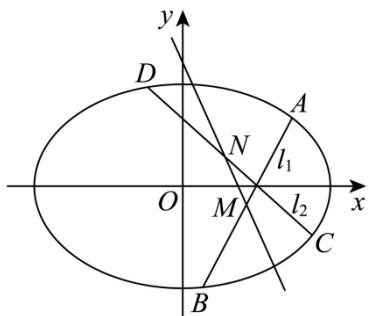
因为 $p_n = \frac{1}{3^n}$, 所以 $t_n = \frac{2}{3^{n+1}}$.

(ii) 结合 (i) 可知 $a_n = |PQ| = |p_n - t_n| = \left| \frac{1}{3^n} - \frac{2}{3^{n+1}} \right| = \frac{1}{3^{n+1}}$,

所以 $\frac{1}{a_n} = 3^{n+1}$,

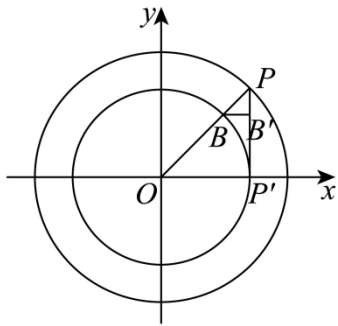
所以数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 是首项为 9, 公比为 3 的等比数列,

所以数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{9(1 - 3^n)}{1 - 3} = \frac{9}{2}(3^n - 1)$.



【点睛】关键点点睛: 本题考查椭圆的几何性质、直线与椭圆相交以及等比数列求和的问题. 其中关键点是联立直线与椭圆的方程, 根据韦达定理和 M, N, Q 三点共线, 求出点 Q 的坐标, 从而得到 t_n .

题目 13 (2024 · 辽宁沈阳 · 二模) 以坐标原点为圆心的两个同心圆半径分别为 $\sqrt{6}$ 和 $\sqrt{3}$, P 为大圆上一动点, 大圆半径 OP 与小圆相交于点 B , $PP' \perp x$ 轴于 P' , $BB' \perp PP'$ 于 B' , B' 点的轨迹为 Ω .



(1) 求 B' 点轨迹 Ω 的方程;

(2) 点 $A(2,1)$, 若点 M, N 在 Ω 上, 且直线 AM, AN 的斜率乘积为 $\frac{1}{2}$, 线段 MN 的中点 G , 当直线 MN 与 y 轴的截距为负数时, 求 $\angle AOG$ 的余弦值.

【答案】 (1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

【分析】 (1) 设 $B'(x, y)$, $\angle POP' = \theta$, 根据条件得到 $\begin{cases} x = |OP|\cos\theta = \sqrt{6}\cos\theta \\ y = |OB|\sin\theta = \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$, 消元即可求出结果;

(2) 法一: 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $y = kx + m$, 联立直线 MN 与椭圆方程得到 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0$, 由韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{-4km}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{2m^2 - 6}{1 + 2k^2}$, 根据题设得到直线 MN 的方程为 $y = -\frac{1}{2}x + m$, 再利用点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 在椭圆上, 得到 $k_{OG} = 1$, 从而有 $\overrightarrow{OG}$ 与 y 轴负半轴所形成的夹角为 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 再求出 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 正半轴所形成的夹角, 即可解决问题; 法二: 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 AM 的方程为 $y = k(x - 2) + 1$, 直接求出 M, N , 再根据条件求出 $k_{MN} = -\frac{1}{2}$, 后面同法一; 法三: 建立新的坐标系, 在新的坐标系中, 得椭圆的方程为 $\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$, 及直线 MN 的方程为 $mx + ny = 1$, 联立直线与椭圆, 再结合条件得到 $n = 2m$, 从而有 $k_{MN} = -\frac{1}{2}$, 后面同法一; 法四: 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $y = kx + m$, 联立椭圆方程得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0$, 进而得到 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = (1 + 2k^2)(x - x_1)(x - x_2)$, 通过令 $x = 2$, 得到 $4(1 + 2k^2) + 8km + 2m^2 - 2 = (1 + 2k^2)(2 - x_1)(2 - x_2)$, 令 $x = \frac{1-m}{k}$, 得到 $\frac{(m-1)^2}{k^2}(1 + 2k^2) + 4km(\frac{1-m}{k}) + 2m^2 - 2 = (1 + 2k^2)(\frac{1-m}{k} - x_1)(\frac{1-m}{k} - x_2)$, 从而有 $4k^2 + 2km + m - 1 = 0$, 下面同方法一.

【详解】 (1) 设 $B'(x, y)$, $\angle POP' = \theta$, 则 $\begin{cases} x = |OP|\cos\theta = \sqrt{6}\cos\theta \\ y = |OB|\sin\theta = \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$,

消去 θ 得 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 所以 B' 点轨迹 Ω 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/275010240214011213>