

陕西省西安市临潼区2024届高三第二次模拟检测数学(文科)

试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

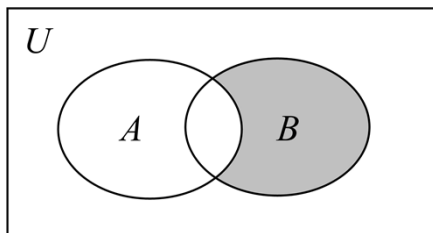
1. 已知复数 $z = (1-i)^2$ (i 为虚数单位), 则复数 z 的虚部为 ()

- A. -2 B. 2 C. $-2i$ D. $2i$

2. 设直线 $x+y-2=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

3. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = (0, 4)$, 则图中的阴影部分表示的集合为 ()



- A. $(3, 4)$ B. $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
C. $(0, 4)$ D. $\{x | -2 \leq x < 4\}$

4. 下列函数中, 既是奇函数又在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减的是 ()

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = x^3$
C. $y = -x|x|$ D. $y = 3^{-x}$

5. 有一组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_8$, 其平均数为 2, 由这组样本数据得到新样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_8, 2$, 那么这两组样本数据一定有相同的 ()

- A. 众数 B. 中位数
C. 方差 D. 极差

6. 保护环境功在当代, 利在千秋, 良好的生态环境既是自然财富, 也是经济财富, 关系社会发展的潜力和后劲. 某工厂将生产产生的废气经过过滤后排放, 已知过滤过程中的污染物的残留数量 P (单位: 毫克/升) 与过滤时间 t (单位: 小时) 之间的函数关系为 $P = P_0 \cdot e^{-kt}$ ($t \geq 0$), 其中 k 为常数, $k > 0, P_0$

为原污染物数量. 该工厂某次过滤废气时, 若前 9 个小时废气中的污染物恰好被过滤掉 80%, 那么再继续过滤 3 小时, 废气中污染物的残留量约为原污染物的 () 参考数据

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 0.585.$$

- A. 9% B. 10% C. 12% D. 14%

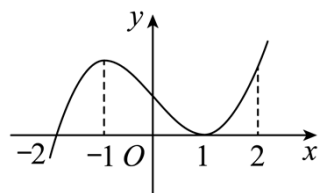
7. “ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ”是“函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 为偶函数”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $2S_n = a_{n+1} - 2$, 则 a_4 的值为 ()

- A. 3 B. 18 C. 54 D. 152

9. 如图是函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象, 下列结论正确的是 ()



- A. $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值 B. $x = 1$ 是函数 $y = f(x)$ 的极值点
C. $x = -2$ 是函数 $y = f(x)$ 的极小值点 D. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递减

10. 已知一个直角三角形的两条直角边的长分别为 1 和 2, 以它的斜边所在直线为旋转轴, 其余两边旋转一周围成一旋转体, 则此旋转体外接球的表面积为 ()

- A. 20π B. 12π C. 5π D. 3π

11. 函数 $y = \sqrt{1 - (x + 2)^2}$ 图像上存在不同的三点到原点的距离构成等差数列, 则以下不可能成为公差的数是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$

12. 过双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F 作 $x^2 + y^2 = a^2$ 的一条切线, 设切点为 T , 该切线与双曲线 E 在第一象限交于点 A , 若 $\overline{FA} = 3\overline{FT}$, 则双曲线 E 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

二、填空题

13. 已知向量 $\vec{a} = (3, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1)$, $\vec{c} = (1, k)$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{c}$, 则实数 k 的值为_____.
14. 某学校举办作文比赛, 共 5 个主题, 每位参赛同学从中随机抽取一个主题准备作文, 则甲、乙两位参赛同学抽到相同主题的概率为_____.
15. 过抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 焦点 F 的直线与 C 交于 A, B 两点, 点 $M(0, p)$, 且 $|AF| = |AM|$, 则直线 AB 的斜率为_____.
16. 已知函数 $f(x) = 3\cos(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$, 若 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 3$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 且 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$ 上没有零点, 则 ω 的一个取值为_____.

三、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b \sin 2C = c \sin B$.

(1) 求 $\sin C$;

(2) 若 $c = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求证: $\triangle ABC$ 是正三角形.

18. 某工厂用 A, B 两台机器生产同一种产品, 产品按质量分为一级品和二级品, 为了比较两台机器生产的产品质量, 分别用两台机器各生产了 100 件产品, 产品的质量情况统计如表:

	一级品	二级品	合计
A 机器	70	30	100
B 机器	80	20	100
合计	150	50	200

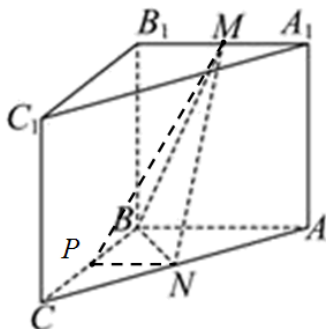
(1) 若用 A, B 两台机器各生产该产品 5 万件, 用频率估计概率, 试估算此次生产的一级品的数量有多少万件?

(2) 能否有 90% 的把握认为 A 机器生产的产品质量与 B 机器生产的产品质量有差异?

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05
k_0	2.072	2.706	3.841

19. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC$, $AB = BC = BB_1 = 2$, M, N, P 分别为 A_1B_1, AC, BC 的中点.



(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 求三棱锥 $B - PMN$ 的体积.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 2, F_1, F_2 分别为其左, 右焦点, 过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, $\triangle F_2MN$ 的周长为 8.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知结论: 若点 (x_0, y_0) 为椭圆 C 上一点, 则椭圆 C 在该点的切线方程为

$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. 点 T 为直线 $x = 8$ 上的动点, 过点 T 作椭圆 C 的两条不同切线, 切点分别为 A, B , 直线 AB 交 x 轴于点 Q . 证明: Q 为定点.

21. 已知函数 $f(x) = ax - x \ln x$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $(e, f(e))$ 处的切线方程;

(2) 讨论 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最大值;

(3) 是否存在实数 a , 使得对任意 $x > 0$, 都有 $f(x) \leq a$? 若存在, 求 a 可取的值组成的集合; 若不存在, 说明理由.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t + m \\ y = \frac{t}{2} \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 以坐标

原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - \rho^2 \cos 2\theta + 3\rho \cos \theta = 3$.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若 l 与 C 有公共点, 求实数 m 的取值范围.

23. 已知函数 $f(x) = |x - a| + |x + 1|$.

- (1) 当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x) \geq 5$ 的解集；
- (2) 若存在实数 x ，使 $f(x) \geq 3$ 成立，求实数 a 的取值范围.

参考答案:

1. A

【分析】

利用复数乘法法则化简 z ，再求虚部即可.

【详解】 $z = (1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$ ，故其虚部为 -2 .

故选：A.

2. B

【分析】先计算圆心到直线的距离，再利用勾股定理求弦长即可.

【详解】圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $O(0,0)$ ，半径为 $r = 2$ ，

$\therefore$ 圆心 O 到直线 $x + y - 2 = 0$ 的距离 $d = \frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$ ，

$\therefore |AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$.

故选：B.

3. A

【分析】分析 Venn 图，图中的阴影部分为属于集合 B 且不属于集合 A 中的元素构成的集合 $B \cap \complement_U A$ ，再根据集合的运算，即可求解.

【详解】由题意，分析 Venn 图，可知阴影部分为 $B \cap (\complement_U A)$ ，

$\complement_U A = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ ，则 $B \cap (\complement_U A) = (3, 4)$ ，

故选：A.

4. C

【分析】A 项，定义域不合题意；B 项，单调性不符合；C 项，先利用定义判断函数的奇偶性，由函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，再结合奇函数图象的对称性可得；D 项，特殊取值可判断不是奇函数.

【详解】选项 A， $y = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，不符合题意，故 A 错误；

选项 B，设 $f(x) = x^3$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ，

因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ，

所以 $f(x) = x^3$ 为奇函数，且在定义域上为增函数，故 B 错误；

选项 C，设 $f(x) = -x|x|$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ，

由 $f(-x) = x|-x| = x|x| = -f(x)$ ，故 $f(x)$ 为奇函数，

当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = -x^2$ ，且 $f(x) = -x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减，

又因为函数图象关于原点对称，所以在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减，故 C 正确；

选项 D，设 $f(x) = 3^{-x}$ ，则 $f(1) = \frac{1}{3}$ ， $f(-1) = 3$ ，

由 $f(-1) \neq -f(1)$ ，知 $f(x)$ 不是奇函数，故 D 错误。

故选：C.

5. D

【分析】

根据众数、中位数、方差以及极差的定义，结合题意，即可判断和选择.

【详解】对 A：假设 $x_1, x_2, \dots, x_8$ 中，有两个 2，两个 3，其它 4 个数据都不相同，且这 8 个数据平均数为 2，那么众数为 2 和 3；

再添加一个 2 后，有三个 2，故众数为 2，众数发生改变，故 A 错误；

对 B：假设 $x_1, x_2, \dots, x_8$ 分别为 $-1, 0, 0, 2, 3, 3, 4, 5$ ，满足平均数为 2，其中位数为 $\frac{2+3}{2} = 2.5$ ；

添加 2 以后，其中位数为 2，中位数发生改变，故 B 错误；

对 C： $x_1, x_2, \dots, x_8$ 的平均数为 2，方差 $S_1 = \frac{1}{8}[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + \dots + (x_8 - 2)^2]$ ；

添加 2 以后，其平均数还是 2，方差 $S_2 = \frac{1}{9}[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + \dots + (x_8 - 2)^2 + (2 - 2)^2] < S_1$ ，

故方差发生改变；

对 D：若 2 是 $x_1, x_2, \dots, x_8$ 的最大值或最小值，因为其平均数为 2，故这组数据都是 2，其极差为 0，添加 2 后，极差也是 0；

若 2 不是 $x_1, x_2, \dots, x_8$ 的最大值，也不是最小值，添加 2 后，最大值和最小值没有改变，极值也不发生变化，故 D 正确.

故选：D.

6. C

【分析】

根据题意可得 $P_0 \cdot e^{-9k} = \frac{1}{5}P_0$, 解得 $e^{-3k} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$, 从而求得关于残留数量与过滤时间的函数关

系式, 再将 $t=12$ 代入即可求得答案.

【详解】因为前 9 个小时废气中的污染物恰好被过滤掉 80%, 所以 $P_0 \cdot e^{-9k} = \frac{1}{5}P_0$, 即 $e^{-9k} = \frac{1}{5}$,

所以 $e^{-3k} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$.

再继续过滤 3 小时, 废气中污染物的残留量约为

$$P_0 \cdot e^{-12k} = P_0 \times \left(e^{-3k}\right)^4 = P_0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{4}{3}} \approx \frac{1}{5} \times 0.585 \times P_0 \approx 12\%P_0.$$

故选: C.

7. A

【解析】根据充分必要条件的定义判断.

【详解】 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $y = \sin(x + \varphi) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ 是偶函数, 充分性满足,

但 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ 时, $y = \sin(x + \varphi) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ 也是偶函数, 必要性不满足.

应是充分不必要条件.

故选: A.

8. C

【分析】当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = a_n - 2$, 两式相减可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$, 因为 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $\frac{a_2}{a_1} = 3$,

令 $n=1$ 时, $2a_1 = a_2 - 2$, 由此解出 a_1 , 再由等比数列的通项公式求出 a_4 的值.

【详解】当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = a_n - 2$,

两式相减可得: $2S_n - 2S_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, 即 $2a_n = a_{n+1} - a_n$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$,

因为 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $\frac{a_2}{a_1} = 3$,

又令 $n=1$ 时, $2a_1 = a_2 - 2$, 所以 $2a_1 = 3a_1 - 2$, 解得: $a_1 = 2$,

所以 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 2$ 为首项, 3 为公比的等比数列,

所以 $a_4 = a_1 \cdot q^3 = 2 \times 3^3 = 54$.

故选: C.

9. C

【分析】

根据导函数的正负即可求解 $y=f(x)$ 的单调性，即可结合选项逐一求解.

【详解】由图象可知：当 $x < -2$ 时， $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减，当 $x \geq -2$ 时， $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 单调递增，

故 $x = -2$ 是函数 $y = f(x)$ 的极小值点， $y = f(x)$ 无极大值.

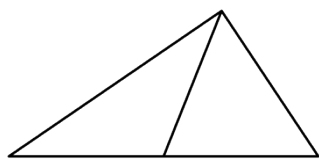
故选：C

10. C

【分析】

根据题设旋转体描述确定其外接球半径长度，再由球体面积公式求表面积即可.

【详解】由题设，所得旋转体为两个圆锥体的组合，它们以三角形斜边上高为底面半径，斜边长为两圆锥高之和，



该旋转体外接球半径为三角形斜边的一半，为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，故表面积为 $4\pi \times (\frac{\sqrt{5}}{2})^2 = 5\pi$.

故选：C

11. D

【分析】

根据题意，利用圆上一点到原点的距离的取值计算出公差的范围，进而判断即可求解.

【详解】

函数等价于 $(x+2)^2 + y^2 = 1 (0 \leq y \leq 1)$,

表示为圆心在 $(-2, 0)$ 半径为 1 的上半圆，

半圆上点到原点的最短距离为 1，最大距离为 3，

若存在不同的三点到原点的距离构成等差数列，

则最大的公差 d 应有 $2d = 3 - 1 = 2$ ，即 $d = 1$ ，

最小的公差应满足 $2d = 1 - 3 = -2$ ，即 $d = -1$ ，

所以公差的取值范围为 $-1 \leq d \leq 1$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/275043214200011132>