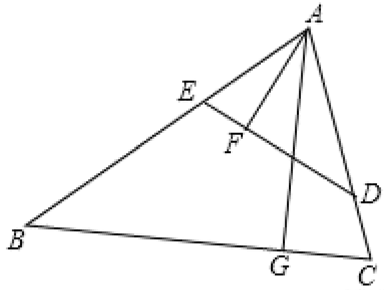
2021年中考九年级数学第三轮冲刺专题复习：三角形的综合练习

1、如图，在锐角三角形ABC中，点D，E分别在边AC，AB上，AG⊥BC于点G，AF⊥DE于点F，∠EAF=∠GAC.

（1）求证：△ADE∽△ABC;

（2）若AD=3，AB=5，求$\frac{AF}{AG}$的值.



2、如图，直角△*ABC*中，∠*BAC*=90°，*D*在*BC*上，连接*AD*，作*BF*⊥*AD*分别交*AD*于*E*，*AC*于*F*.

（1）如图1，若*BD*=*BA*，求证：△*ABE*≌△*DBE*;

（2）如图2，若*BD*=4*DC*，取*AB*的中点*G*，连接*CG*交*AD*于*M*，求证：①*GM*=2*MC*;②$AG^2=AF\cdot AC$.

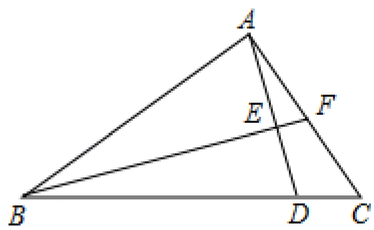


图1

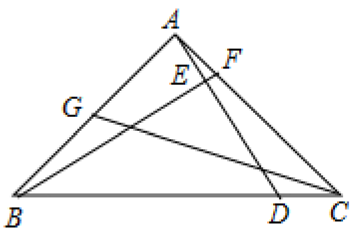


图2

3、已知：△AOB和△COD均为等腰直角三角形，∠AOB=∠COD=90°．连接AD，BC，点H为BC中点，连接OH.

（1）如图1所示，易证：OH=$\frac{1}{2}$AD且OH⊥AD（不需证明）

（2）将△COD绕点O旋转到图2，图3所示位置时，线段OH与AD又有怎样的关系，并选择一个图形证明你的结论.

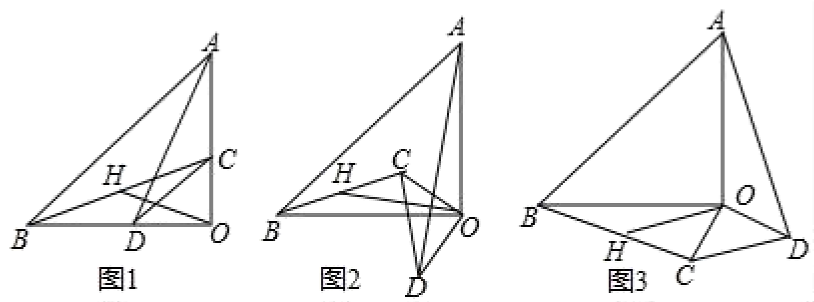
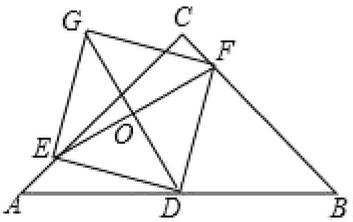


图1　图2　图3

4、如图，在等腰直角三角形 ABC 中，∠ACB=90°，AC=BC=4，D 是 AB 的中点，E，F 分别是 AC，BC 上的点（点 E 不与端点 A，C 重合），且 AE=CF，连接 EF 并取 EF 的中点 O，连接 DO 并延长至点 G，使 GO=OD，连接 DE，DF，GE，GF.

（1）求证：四边形 EDFG 是正方形；

（2）当点 E 在什么位置时，四边形 EDFG 的面积最小？并求四边形 EDFG 面积的最小值.



5、如图，△ABC 中，∠ACB=90°，AC=BC，点 E 是 AC 上一点，连接 BE.

（1）如图 1，若 AB=$4\sqrt{2}$，BE=5，求 AE 的长；

（2）如图 2，点 D 是线段 BE 延长线上一点，过点 A 作 AF⊥BD 于点 F，连接 CD、CF，当 AF=DF 时，求证：DC=BC.

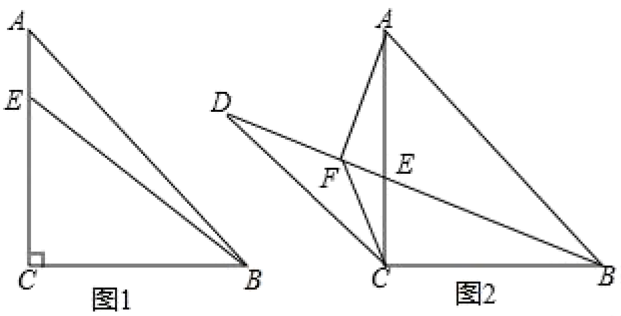
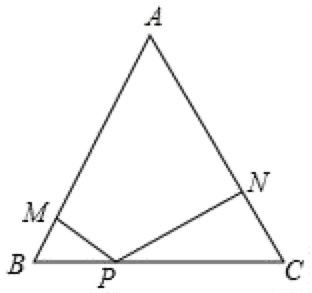


图1　图2

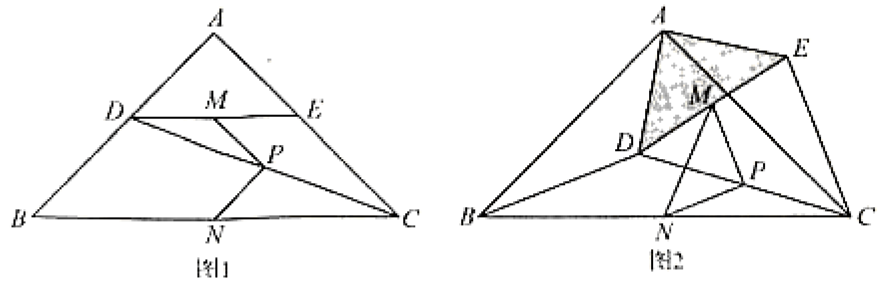
6、在边长为 2 的等边三角形 ABC 中，P 是 BC 边上任意一点，过点 P 分别作 PM⊥A B，PN⊥AC，M、N 分别为垂足.

（1）求证：不论点 P 在 BC 边的何处时都有 PM+PN 的长恰好等于三角形 ABC 一边上的高；

（2）当 BP 的长为何值时，四边形 AMPN 的面积最大，并求出最大值.



7、如图 1，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，点 D，E 分别在边 AB，AC 上，$AD=AE$，连接 DC，点 M，P，N 分别为 DE，DC，BC 的中点.



（1）观察猜想

图 1 中，线段 PM 与 PN 的数量关系是_________，位置关系是_________；

（2）探究证明

把 ΔADE 绕点 A 逆时针方向旋转到图 2 的位置，连接 MN，BD，CE，判断 ΔPMN 的形状，并说明理由；

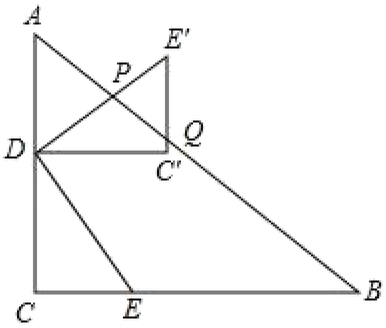
（3）拓展延伸

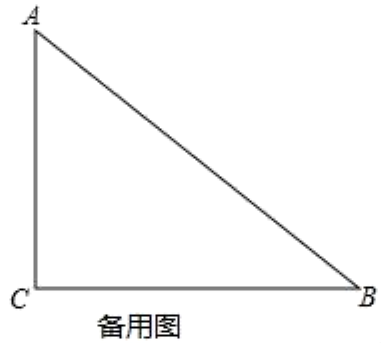
把 ΔADE 绕点 A 在平面内自由旋转，若 $AD=4$，$AB=10$，请直接写出 ΔPMN 面积的最大值.

8、如图，在△ABC 中，∠C=90°，AC=3，BC=4，点 D，E 分别在 AC，BC 上（点 D 与点 A，C 不重合），且∠DEC=∠A，将△DCE 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到△DC′E′．当△DC′E′ 的斜边、直角边与 AB 分别相交于点 P，Q（点 P 与点 Q 不重合）时，设 CD=x，PQ=y.

（1）求证：∠ADP=∠DEC;

（2）求 y 关于 x 的函数解析式，并直接写出自变量 x 的取值范围．





备用图

9、和ΔOQB分别是以OP、OQ为直角边的等腰直角三角形，点C、D、E分别是OA、OB、AB的中点．

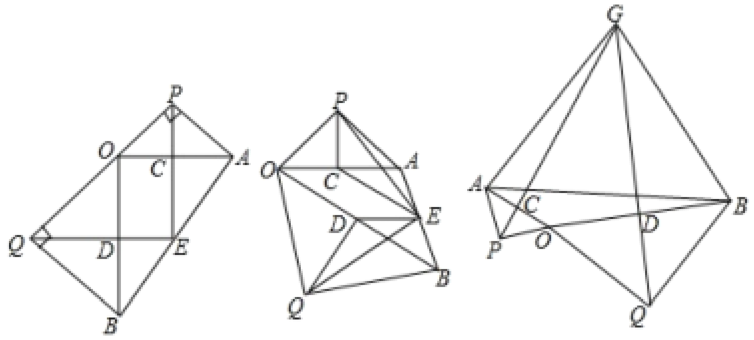


图1　图2　图3

（1）当$\angle AOB=90^{\circ}$时如图 1，连接PE、QE，直接写出EP与EQ的大小关系；

（2）将ΔOQB绕点O逆时针方向旋转，当$\angle AOB$是锐角时如图 2，（1）中的结论是否成立?若成立，请给出证明；若不成立，请加以说明．

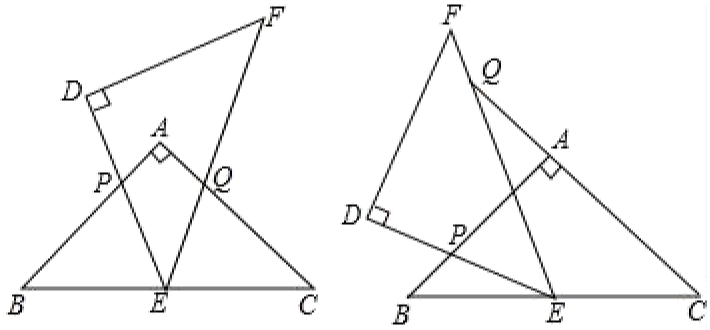
（3）仍将ΔOQB绕点O旋转，当$\angle AOB$为钝角时，延长PC、QD交于点G，使ΔABG为等边三角形如图 3，求$\angle AOB$的度数．

10、△ABC 和△DEF 是两个全等的等腰直角三角形，∠BAC=∠EDF=90°，△DEF 的顶点 E 与△ABC 的斜边 BC 的中点重合，将△DEF 绕点 E 旋转，旋转过程中，线段 DE 与线段 AB 相交于点 P，线段 EF 与射线 CA 相交于点 Q.

（1）如图①，当点 Q 在线段 AC 上，且 AP=AQ 时，求证：△BPE≌△CQE；

（2）如图②，当点 Q 在线段 CA 的延长线上时，求证：△BPE∽△CEQ；并求当

BP=2，CQ=9 时 BC 的长．



图①　　　　图②

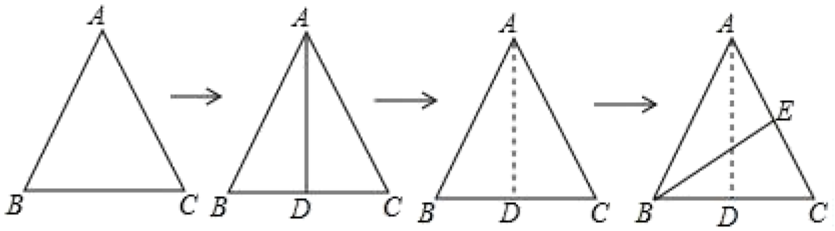
11、如图，将边长为 6 的正三角形纸片 ABC 按如下顺序进行两次折叠，展平后，得折痕 AD，BE（如图①），点 O 为其交点．

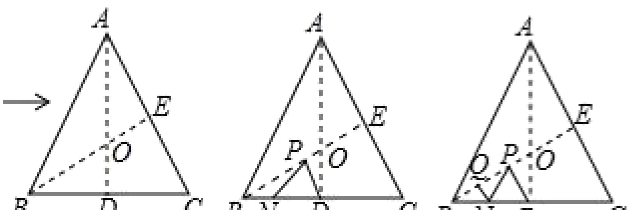
（1）探求 AO 到 OD 的数量关系，并说明理由；

（2）如图②，若 P，N 分别为 BE，BC 上的动点．

①当 PN+PD 的长度取得最小值时，求 BP 的长度；

②如图③，若点 Q 在线段 BO 上，BQ=1，则 QN+NP+PD 的最小值=____．





图①　　图②　　图③

12、如图 1，在△*ABC* 中，*AB*＝*AC*＝20，tan*B*＝$\frac{3}{4}$，点 *D* 为 *BC* 边上的动点（点 *D* 不与点 *B*，*C* 重合）．以 *D* 为顶点作∠*ADE*＝∠*B*，射线 *DE* 交 *AC* 边于点 *E*，过点 *A* 作 *AF*⊥*AD* 交射线 *DE* 于点 *F*，连接 *CF*．

（1）求证：△*ABD*∽△*DCE*；

（2）当 *DE*∥*AB* 时（如图 2），求 *AE* 的长；

（3）点 D 在 BC 边上运动的过程中，是否存在某个位置，使得 $DF=CF$？若存在，求出此时 BD 的长；若不存在，请说明理由．

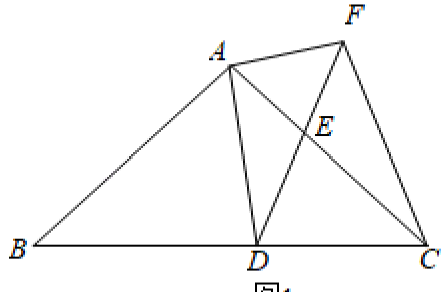


图1

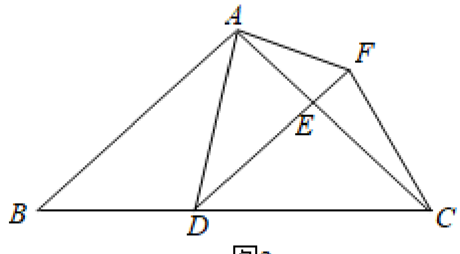


图2

13、如图，∠MAN=60°，AP 平分∠MAN，点 B 是射线 AP 上一定点，点 C 在直线 AN 上运动，连接 BC，将∠ABC（0°＜∠ABC＜120°）的两边射线 BC 和 BA 分别绕点 B 顺时针旋转 120°，旋转后角的两边分别与射线 AM 交于点 D 和点 E．

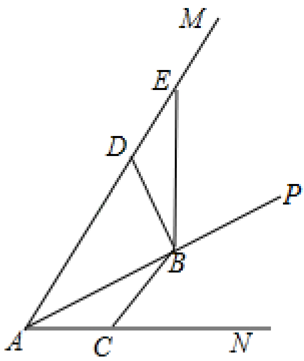


图1

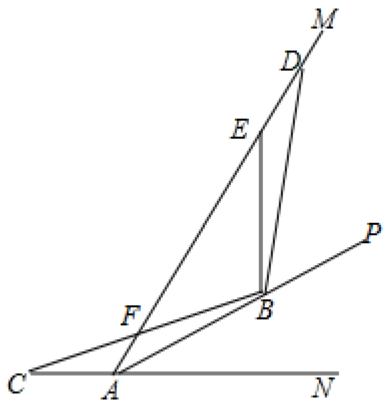


图2

（1）如图 1，当点 C 在射线 AN 上时，

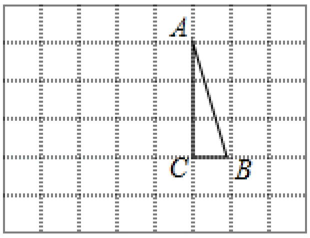
①请判断线段 BC 与 BD 的数量关系，直接写出结论；

②请探究线段 AC，AD 和 BE 之间的数量关系，写出结论并证明；

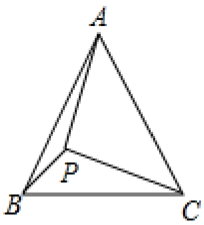
（2）如图 2，当点 C 在射线 AN 的反向延长线上时，BC 交射线 AM 于点 F，若 AB=4，AC=$\sqrt{3}$，请直接写出线段 AD 和 DF 的长．

14、【操作发现】

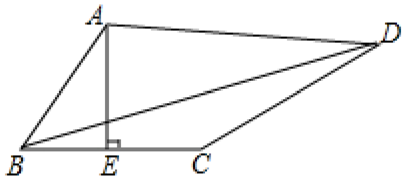
如图①，在边长为 1 个单位长度的小正方形组成的网格中，△ABC 的三个顶点均在格点上．



图①



图②



图③

（1）请按要求画图：将△ABC 绕点 A 按顺时针方向旋转 90°，点 B 的对应点为 B′，点 C 的对应点为 C′，连接 BB′；

（2）在（1）所画图形中，∠AB′B=________.

【问题解决】

如图②，在等边三角形 ABC 中，AC=7，点 P 在△ABC 内，且∠APC=90°，∠BPC=120°，求△APC 的面积.

小明同学通过观察、分析、思考，对上述问题形成了如下想法：

想法一：将△APC 绕点 A 按顺时针方向旋转 60°，得到△AP′B，连接 PP′，寻找 PA，PB，PC 三条线段之间的数量关系；

想法二：将△APB 绕点 A 按逆时针方向旋转 60°，得到△AP′C′，连接 PP′，寻找 PA，PB，PC 三条线段之间的数量关系.

…

请参考小明同学的想法，完成该问题的解答过程.（一种方法即可）

【灵活运用】

如图③，在四边形 ABCD 中，AE⊥BC，垂足为 E，∠BAE=∠ADC，BE=CE=2，CD=5，AD=kAB（k 为常数），求 BD 的长（用含 k 的式子表示）.

15、在等腰三角形△*ABC* 中，*AB*＝*AC*，作 *CM*⊥*AB* 交 *AB* 于点 *M*，*BN*⊥*AC* 交 *AC* 于点 *N*.

（1）在图 1 中，求证：△*BMC*≌△*CNB*;

（2）在图 2 中的线段 *CB* 上取一动点 *P*，过 *P* 作 *PE*∥*AB* 交 *CM* 于点 *E*，作 *PF*∥*AC* 交 *BN* 于点 *F*，求证：*PE*+*PF*＝*BM*;

（3）在图 3 中动点 *P* 在线段 *CB* 的延长线上，类似（2）过 *P* 作 *PE*∥*AB* 交 *CM* 的延长线于点 *E*，作 *PF*∥*AC* 交 *NB* 的延长线于点 *F*，求证：*AM*•*PF*+*OM*•*BN*＝*AM*•*PE*.

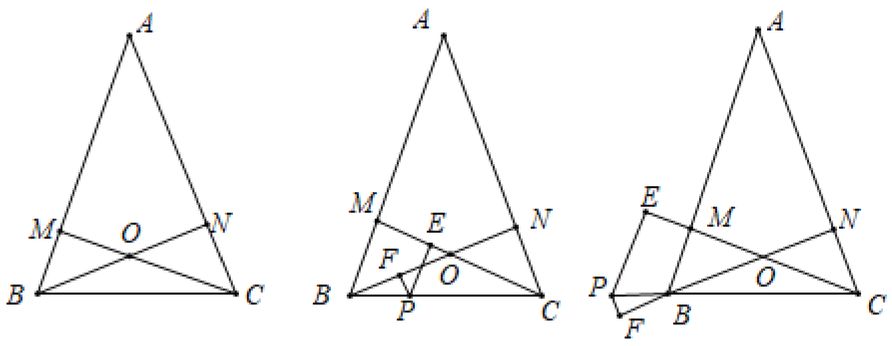


图1　　图2　　图3

16、问题背景：已知∠EDF的顶点D在△ABC的边AB所在直线上（不与A，B重合），DE交AC所在直线于点M，DF交BC所在直线于点N，记△ADM的面积为S_1，△BND的面积为S_2.

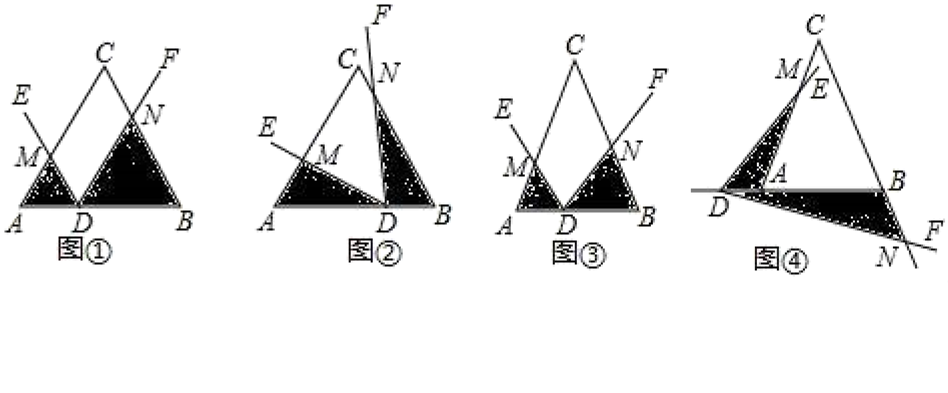
（1）初步尝试：如图①，当△ABC是等边三角形，AB=6，∠EDF=∠A，且DE∥BC，AD=2时，则S_1S_2=_____；

（2）类比探究：在（1）的条件下，先将点D沿AB平移，使AD=4，再将∠EDF绕点D旋转至如图②所示位置，求S_1S_2的值；

（3）延伸拓展：当△ABC是等腰三角形时，设∠B=∠A=∠EDF=α.

（Ⅰ）如图③，当点D在线段AB上运动时，设AD=a，BD=b，求S_1S_2的表达式（结果用a，b和α的三角函数表示）.

（Ⅱ）如图④，当点D在BA的延长线上运动时，设AD=a，BD=b，直接写出S_1S_2的表达式，不必写出解答过程.



图①　　图②　　图③　　图④

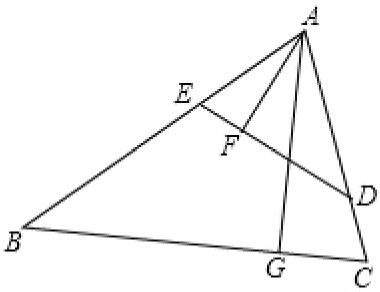
参考答案

2021年中考九年级数学第三轮冲刺专题复习：三角形的综合练习

1、如图，在锐角三角形ABC中，点D，E分别在边AC，AB上，AG⊥BC于点G，AF⊥DE于点F，∠EAF=∠GAC.

（1）求证：△ADE∽△ABC；

（2）若AD=3，AB=5，求$\dfrac{AF}{AG}$的值.



【答案】（1）∵AG⊥BC，AF⊥DE，

∴∠AFE=∠AGC=90°，

∵∠EAF=∠GAC，

∴∠AED=∠ACB，

∵∠EAD=∠BAC，

∴△ADE∽△ABC，

（2）由（1）可知：△ADE∽△ABC，

∴$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{3}{5}$

由（1）可知：∠AFE=∠AGC=90°，

∴∠EAF=∠GAC，

∴△EAF∽△CAG，

∴$\dfrac{AF}{AG}=\dfrac{AE}{AC}$，

$\dfrac{AF}{AG}=\dfrac{3}{5}$

2、如图，直角△*ABC*中，∠*BAC*=90°，*D*在*BC*上，连接*AD*，作*BF*⊥*AD*分别交*AD*于*E*，*AC*于*F*.

（1）如图1，若 $BD=BA$，求证：$\triangle ABE \cong \triangle DBE$；

（2）如图2，若 $BD=4DC$，取 AB 的中点 G，连接 CG 交 AD 于 M，求证：①$GM=2MC$；②$AG^2=AF\cdot AC$。

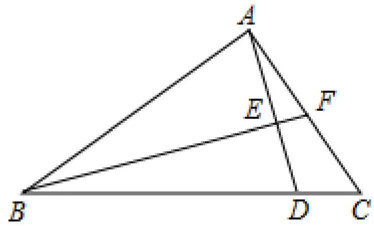


图1

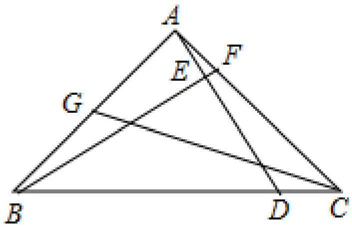


图2

答案：（1）在 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle DBE$ 中，∵ $BA=BD$，$BE=BE$，∴ $\triangle ABE \cong \triangle DBE$；

（2）①过 G 作 $GH\parallel AD$ 交 BC 于 H，∵ $AG=BG$，∴ $BH=DH$，∵ $BD=4DC$，设 $DC=1$，$BD=4$，∴ $BH=DH=2$，∵ $GH\parallel AD$，∴ $\frac{GM}{MC}=\frac{HD}{DC}=\frac{2}{1}$，∴ $GM=2MC$；

②过 C 作 $CN\perp AC$ 交 AD 的延长线于 N，则 $CN\parallel AG$，∴ $\triangle AGM \sim \triangle NCM$，∴ $\frac{AG}{NC}=\frac{GM}{MC}$，由①知 $GM=2MC$，∴ $2NC=AG$，∵ $\angle BAC=\angle AEB=90°$，∴ $\angle ABF=\angle CAN=90°-\angle BAE$，∴ $\triangle ACN \sim \triangle BAF$，∴ $\frac{AF}{CN}=\frac{AB}{AC}$，∵ $AB=AG$，∴ $\frac{AF}{CN}=\frac{2AG}{AC}$，∴ $2CN\cdot AG=AF\cdot AC$，∴ $AG^2=AF\cdot AC$。

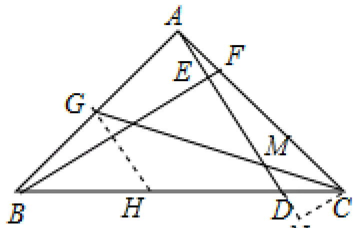
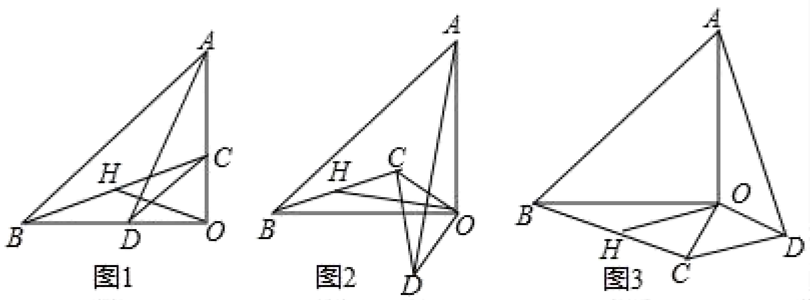


图2

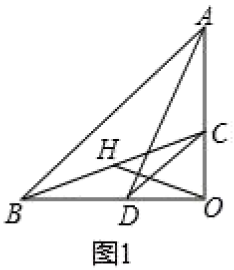
3、已知：△AOB 和△COD 均为等腰直角三角形，∠AOB=∠COD=90°．连接 AD，BC，点 H 为 BC 中点，连接 OH.

（1）如图1所示，易证：$OH=\frac{1}{2}AD$ 且 $OH\perp AD$（不需证明）

（2）将△COD 绕点 O 旋转到图2，图3所示位置时，线段 OH 与 AD 又有怎样的关系，并选择一个图形证明你的结论.



【解答】（1）证明：如图 1 中，



∵△OAB 与△OCD 为等腰直角三角形，∠AOB=∠COD=90°，

∴OC=OD，OA=OB，

∵在△AOD 与△BOC 中，

$$\begin{cases} OA=OB \\ \angle AOD=\angle BOC, \\ OD=OC \end{cases}$$

∴△AOD≌△BOC（SAS），

∴∠ADO=∠BCO，∠OAD=∠OBC，

∵点 H 为线段 BC 的中点，

∴OH=HB，

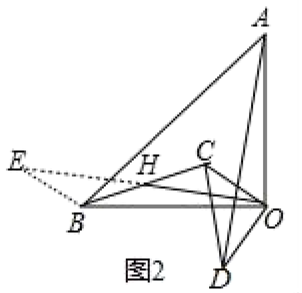
∴∠OBH=∠HOB=∠OAD，

又因为∠OAD+∠ADO=90°，

所以∠ADO+∠BOH=90°，

所以 OH⊥AD

（2）解：①结论：OH=$\frac{1}{2}$AD，OH⊥AD，如图 2 中，延长 OH 到 E，使得 HE=OH，连接 BE，



易证△BEO≌△ODA

∴OE=AD

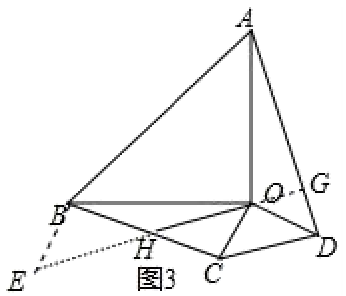
∴OH=$\frac{1}{2}$OE=$\frac{1}{2}$AD

由△BEO≌△ODA，知∠EOB=∠DAO

∴∠DAO+∠AOH=∠EOB+∠AOH=90°，

∴OH⊥AD.

②如图3中，结论不变．延长OH到E，使得HE=OH，连接BE，延长EO交AD于G．



易证△BEO≌△ODA

∴OE=AD

∴OH=$\frac{1}{2}$OE=$\frac{1}{2}$AD

由△BEO≌△ODA，知∠EOB=∠DAO

∴∠DAO+∠AOF=∠EOB+∠AOG=90°，

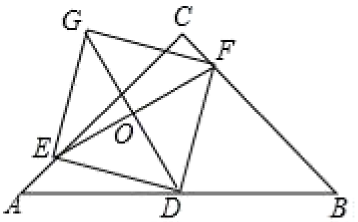
∴∠AGO=90°

∴OH⊥AD.

4、如图，在等腰直角三角形ABC中，∠ACB=90°，AC=BC=4，D是AB的中点，E，F分别是AC，BC上的点（点E不与端点A，C重合），且AE=CF，连接EF并取EF的中点O，连接DO并延长至点G，使GO=OD，连接DE，DF，GE，GF.

（1）求证：四边形 EDFG 是正方形；

（2）当点 E 在什么位置时，四边形 EDFG 的面积最小？并求四边形 EDFG 面积的最小值．



【解答】（1）证明：连接 CD，如图 1 所示．

∵△ABC 为等腰直角三角形，∠ACB=90°，D 是 AB 的中点，

∴∠A=∠DCF=45°，AD=CD．

在△ADE 和△CDF 中，$\begin{cases} AE=CF \\ \angle A=\angle DCF \\ AD=CD \end{cases}$，

∴△ADE≌△CDF（SAS），

∴DE=DF，∠ADE=∠CDF．

∵∠ADE+∠EDC=90°，

∴∠EDC+∠CDF=∠EDF=90°，

∴△EDF 为等腰直角三角形．

∵O 为 EF 的中点，GO=OD，

∴GD⊥EF，且 GD=2OD=EF，

∴四边形 EDFG 是正方形；

（2）解：过点 D 作 DE′⊥AC 于 E′，如图 2 所示．

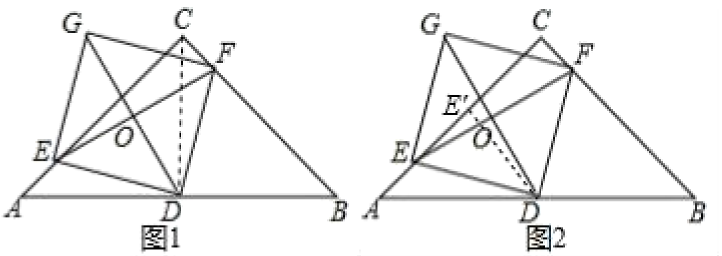
∵△ABC 为等腰直角三角形，∠ACB=90°，AC=BC=4，

∴DE′$=\frac{1}{2}$BC=2，AB=$4\sqrt{2}$，点 E′为 AC 的中点，

∴$2\leqslant DE<2\sqrt{2}$（点 E 与点 E′重合时取等号）．

∴$4\leqslant S_{四边形EDFG}=DE^2<8$．

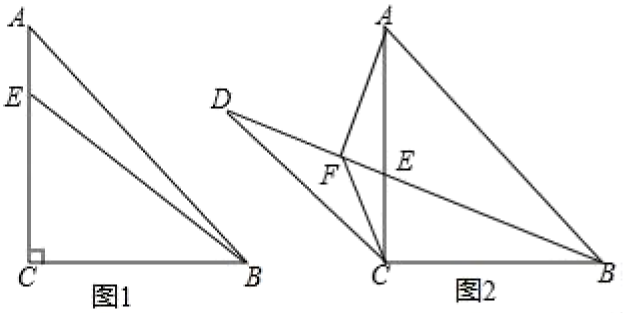
∴当点 E 为线段 AC 的中点时，四边形 EDFG 的面积最小，该最小值为 4．



5、如图，△ABC 中，∠ACB=90°，AC=BC，点 E 是 AC 上一点，连接 BE.

（1）如图 1，若 AB=$4\sqrt{2}$，BE=5，求 AE 的长；

（2）如图 2，点 D 是线段 BE 延长线上一点，过点 A 作 AF⊥BD 于点 F，连接 CD、CF，当 AF=DF 时，求证：DC=BC.



【解答】解：（1）∵∠ACB=90°，AC=BC，

∴AC=BC=$\frac{\sqrt{2}}{2}$AB=4，

∵BE=5，

∴CE=$\sqrt{BE^2-BC^2}$=3，

∴AE=4 - 3=1；

（2）∵∠ACB=90°，AC=BC，

∴∠CAB=45°，

∵AF⊥BD，

∴∠AFB=∠ACB=90°，

∴A，F，C，B 四点共圆，

∴∠CFB=∠CAB=45°，

∴∠DFC=∠AFC=135°，

在△ACF 与△DCF 中，$\begin{cases} AF=DF \\ \angle AFC=\angle DFC, \\ CF=CF \end{cases}$

∴△ACF≌△DCF，

∴CD=AC，

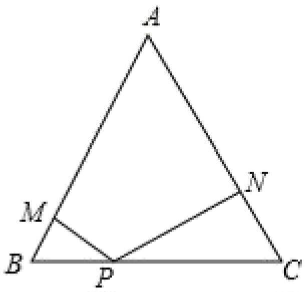
∵AC=BC，

∴AC=BC.

6、在边长为 2 的等边三角形 ABC 中，P 是 BC 边上任意一点，过点 P 分别作 PM⊥A B，PN⊥AC，M、N 分别为垂足.

（1）求证：不论点 P 在 BC 边的何处时都有 PM+PN 的长恰好等于三角形 ABC 一边上的高；

（2）当 BP 的长为何值时，四边形 AMPN 的面积最大，并求出最大值.



【解答】解：（1）连接 AP，过 C 作 CD⊥AB 于 D，

∵△ABC 是等边三角形，

∴AB=AC，

∵$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}$，

∴$\frac{1}{2}ABCD=\frac{1}{2}ABPM+\frac{1}{2}ACPN$，

∴PM+PN=CD，

即不论点 P 在 BC 边的何处时都有 PM+PN 的长恰好等于三角形 ABC 一边上的高；

（2）设 BP=x，则 CP=2 - x，

∵△ABC 是等边三角形，

∴∠B=∠C=60°，

∵PM⊥AB，PN⊥AC，

∴$BM=\frac{1}{2}x$，$PM=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，$CN=\frac{1}{2}(2-x)$，$PN=\frac{\sqrt{3}}{2}(2-x)$，

∴四边形 AMPN 的面积$=\frac{1}{2}\times(2-\frac{1}{2}x)\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}\times[2-\frac{1}{2}(2-x)]\frac{\sqrt{3}}{2}(2-x)=-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-1)^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

∴当 BP=1 时，四边形 AMPN 的面积最大，最大值是$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.