2022-2023 学年人教版八年级数学上册《第 14 章整式乘法与因式分解》

解答优生辅导训练题（附答案）

1．若一个四位数的千位数字和个位数字相等，且各数位上的数字之和大于 7，称这样的数为“始终如一数”．对于“始终如一数”n，若其个位数字为 a，记 $D(n)=\frac{n-11a}{10}$．

例如：2232 是“始终如一数”，

∵其千位数字和个位数字都等于 2，且 2+2+3+2＝9＞7

∴2232 是“始终如一数”

（1）①判定 2102 是否为“始终如一数”并说明理由；

②计算 D（3423）；

（2）若“始终如一数”n 的个位数字是 1，且满足$\frac{n-2-D(n)}{9}$是完全平方数，求符合条件的所有 n．

2．阅读材料：

利用公式法，可以将一些形如 ax^2+bx+c（$a\neq0$）的多项式变形为 $a(x+m)^2+n$ 的形式，我们把这样的变形方法叫做多项式 ax^2+bx+c（$a\neq0$）的配方法，运用多项式的配方法及平方差公式能对一些多项式进行因式分解例如 $x^2+4x-5=x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2-5=(x+2)^2-9=(x+2+3)(x+2-3)=(x+3)(x-1)$．

根据以上材料，解答下列问题．

（1）分解因式（利用公式法）：x^2+2x-8；

（2）求多项式 x^2+4x-3 的最小值；

（3）已知 a，b，c 是△ABC 的三边长，且满足 $a^2+b^2+c^2+50=6a+8b+10c$，求△ABC 的周长．

3．我们把多项式 $a^2+2ab+b^2$ 及 $a^2-2ab+b^2$ 这样的式子叫做完全平方式．如果一个多项式不是完全平方式，我们常做如下变形：先添加一个适当的项，使式子中出现完全平方式，再减去这个项，使整个式子的值不变，这种方法叫做配方法．配方法是一种亚要的解决问题的数学方法，不仅可以将一个看似不能分解的多项式分解因式，还能解决一些与非负数有关的问题或求代数式的最大值、最小值等．

例如：分解因式 x^2+2x-3．

原式＝$(x^2+2x+1-1)-3=(x+1)^2-4=(x+1+2)(x+1-2)=(x+3)(x-1)$．

求代数式 $2x^2+4x-6$ 的最小值．

$2x^2+4x-6=2(x^2+2x+1-1)-6=2(x+1)^2-8$，可知当 $x=-1$ 时，$2x^2+4x-6$ 有最小值 -8.

根据阅读材料用配方法解决下列问题：

（1）填空：x^2+_______$+36=(x+6)^2$；$3m^2+6m=3(m+1)^2-$_______；

（2）利用配方法分解因式：$x^2-6x-27$；（注意：用十字相乘法直接写出答案不给分）

（3）当 x 为何值时，多项式 $-x^2-4x+1$ 有最大值，并求出这个最大值.

4．通常情况下，$a+b$ 不一定等于 ab，观察下列几个式子：

第 1 个：$2+2=2\times2$；

第 2 个：$3+\frac{3}{2}=3\times\frac{3}{2}$；

第 3 个：$4+\frac{4}{3}=4\times\frac{4}{3}$ …

我们把符合 $a+b=ab$ 的两个数叫做“和积数对”.

（1）写出第 4 个式子.

（2）写出第 n 个式子，并检验.

（3）若 m，n 是一对“和积数对”，求代数式 $\frac{-3(m+n)^2+4m^2n^2}{4m^2+4n^2+8mn}$ 的值.

5．问题：已知多项式 $x^4+mx^3+nx-16$ 含有因式（$x-1$）和（$x-2$），求 m、n 的值.

解答：设 $x^4+mx^3+nx-16=A(x-1)(x-2)$（其中 A 为整式），

∴取 $x=1$，得 $1+m+n-16=0$，①

∴取 $x=2$，得 $16+8m+2n-16=0$，②

由①、②解得 $m=-5$，$n=20$.

根据以上阅请材料解决下列问题：

（1）若多项式 $3x^3+ax^2-2$ 含有因式（$x-1$），求实数 a 的值；

（2）若多项式 $2x^2+mxy+ny^2-4x+2y$ 含有因式（$x+y-2$），求实数 m、n 的值；

（3）如果一个多项式与某非负数的差含有某个一次因式，则称这个非负数是这个多项式除以该一次因式的余数．请求出多项式 $x^{2022}+2x^{1011}+5$ 除以一次因式（$x+1$）的余数.

6．材料一：如果一个三位正整数满足十位数字大于个位数字，且十位数字与个位数字之和等于百位数字，那么称这个数为“下降数”．例如：$m=321$，满足 $2>1$，且 $1+2=3$，所以 321 是“下降数”；$n=542$，满足 $4>2$，但 $4+2\neq5$，所以 542 不是“下降数”.

材料二：对于一个“下降数” $m=100a+10b+c$（$1\leqslant a$，b，$c\leqslant9$，且 a，b，c 为整数），交

换其百位和十位得到 $m'=100b+10a+c$，规定 $F(m)=\frac{m+m'-2c}{10}$，例如：321 是“下降数”，$m'=231$，$F(m)=\frac{321+231-2\times 1}{10}=55$.

（1）判断：743 ______“下降数”，523 ______“下降数”（填“是”或“不是”）；

（2）设 m 为任意一个“下降数”，求证：$F(m)$ 能被 11 整除；

（3）若 s，t 都是“下降数”，其中 $s=100x+10y+51$，$t=100a+40+b$（$1\leqslant x$，y，a，$b\leqslant 9$，且 x，y，a，b 均为整数），若 $\frac{F(s)\cdot F(t)}{121}=117$，求满足条件的 s 和 t 的值.

7．若一个四位数 M 的个位数字与十位数字的平方和恰好是 M 去掉个位与十位数字后得到的两位数，则这个四位数 M 为“勾股和数”.

例如：$M=2543$，$\because 3^2+4^2=25$，$\therefore$2543 是“勾股和数”；

又如：$M=4325$，$\because 5^2+2^2=29$，$29\neq 43$，$\therefore$4325 不是“勾股和数”.

（1）判断 2022，5055 是否是“勾股和数”，并说明理由；

（2）一个“勾股和数”M 的千位数字为 a，百位数字为 b，十位数字为 c，个位数字为 d，记 $G(M)=\frac{c+d}{9}$，$P(M)=\frac{|10(a-c)+(b-d)|}{3}$. 当 $G(M)$，$P(M)$ 均是整数时，求出所有满足条件的 M.

8．[知识生成]通常，用两种不同的方法计算同一个图形的面积，可以得到一个恒等式.

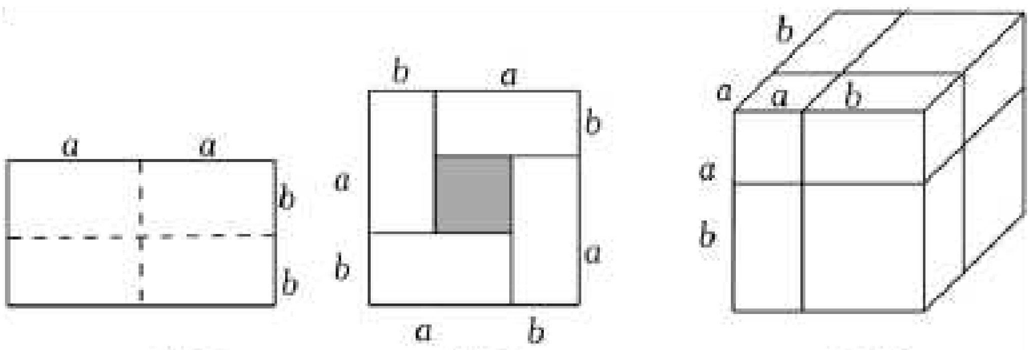
例如：如图①是一个长为 $2a$，宽为 $2b$ 的长方形，沿图中虚线用剪刀均分成四个小长方形，然后按图②的形状拼成一个正方形．请解答下列问题：

（1）观察图②，请你写出 $(a+b)^2$、$(a-b)^2$、ab 之间的等量关系是 ______；

（2）根据（1）中的等量关系解决如下问题：若 $x+y=6$，$xy=\frac{11}{2}$，求 $(x-y)^2$ 的值；[知识迁移]类似地，用两种不同的方法计算同一几何体的体积，也可以得到一个恒等式.

（3）根据图③，写出一个代数恒等式：______；

（4）已知 $a+b=3$，$ab=1$，利用上面的规律求 $\frac{a^3+b^3}{2}$ 的值.



图①　图②　图③

9．规定两数 a，b 之间的一种运算记作 a※b，如果 $a^c=b$，那么 a※$b=c$．例如：因为 $3^2=9$，所以 3※9＝2．

（1）根据上述规定，填空：2※16＝_______，_______※36＝－2；

（2）小明在研究这种运算时发现一个现象：3^n※4^n＝3※4，小明给出了如下的证明；

设 3^n※$4^n=x$，则（3^n）$^x=4^n$，即（3^x）$^n=4^n$，

所以 $3^x=4$，即 3※4＝x，

所以 3^n※4^n＝3※4．

请你尝试运用这种方法解决下列问题：

①证明：5※7+5※9＝5※63；

②猜想：$(x-2)^n$※$(y+1)^n+(x-2)^n$※$(y-3)^n$＝_______※_______（结果化成最简形式）．

10．对于一个四位自然数 M，如果 M 满足各数位上的数字互不相同，它的千位上的数字比十位上的数字大 1，百位上的数字比个位上的数字大 1，则称 M 为“仲伯数”．对于一个“伯仲数” $M=\overline{abcd}$（a，b，c，d 是整数且 $1\leqslant a\leqslant 9$，$0\leqslant b$，c，$d\leqslant 9$），它的千位数字和百位数字组成的两位数为 $\overline{ab}$，十位数字和个位数字组成的两位数为 $\overline{cd}$，将这两个两位数求和记作 s；它的千位数字和十位数字组成的两位数为 $\overline{ac}$，它的百位数字和个位数字组成的两位数为 $\overline{bd}$，将这两个两位数求和记作 t．规定：$F(M)=\frac{s-t}{9}$．

例如：$M=4231$，因为 $4-3=1$，$2-1=1$，所以 4231 是“仲伯数”，$s=42+31=73$，1＝43+21＝64，则 $F(M)\frac{73-64}{9}=1$．

（1）请判断 2716，7352 是不是“仲伯数”，说明理由；如果是，求出对应的 $F(M)$ 的值．

（2）若四位数 P、Q 均为“仲伯数”，P 的百位数字为 1，$F(P)\neq 0$，Q 的百位数字为 $2n$，其中 $1\leqslant n\leqslant 4$ 且 n 为正整数，十位数字为 $m-1$，其中 $2\leqslant m\leqslant 9$ 且 m 为正整数，当 $\frac{F(P)}{F(Q)}$ 能被 5 整除时，求出所有满足条件的四位数 Q．

11．材料：对于一个四位自然数，满足十位数字与百位数字之和等于个位数字与千位数字之和的 2 倍，则称这个数为“和倍数”．若规定 $P(N)$ 为千位数字的 3 倍与个位数字的差，$Q(N)$ 为千位数字与个位数字之和，令 $F(N)=\frac{P(N)}{Q(N)}$．

例如：3621，∵6+2＝2×（1+3），∴3621 是“和倍数”，$F(3621)=\frac{3\times 3-1}{3+1}=2$．

再比如4271，∵2+7≠2×（1+4），∴4271不是“和倍数”.

（1）判断3531，4682是否是“和倍数”，并说明理由；如果是，请计算F（N）的值；

（2）若四位自然数是“和倍数”，其十位数字能被5整除，且个位数字与百位数字的和能被3整除，F（n）为整数，求出符合条件的n.

12．分解因式：

（1）$3a(b^2+9)^2-108ab^2$；

（2）$2b^3-b^2-6b+5a-10ab+3$；

（3）计算：$\dfrac{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})(6^4+\frac{1}{4})}{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})(5^4+\frac{1}{4})}$；

（4）$4x^2-14xy+6y^2-7x+y-2$.

13．对任意一个四位正整数m，如果m的百位数字等于个位数字与十位数字之和，m的千位数字等于十位数字的2倍与个位数字之和，那么称这个数m为“筋斗数”．例如：m＝5321，满足1+2＝3，2×2+1＝5，所以5321是“筋斗数”．例如：m＝8523，满足2+3＝5，但2×2+3＝7≠8，所以8523不是“筋斗数”.

（1）判断5413和9582是不是“筋斗数”，并说明理由；

（2）若m是“筋斗数”，且m与25的和能被11整除，求满足条件的所有“筋斗数”m.

14．学习整式乘法时，老师拿出三种型号卡片，如图1.

（1）利用多项式与多项式相乘的法则，计算：$(a+2b)(a+b)$＝_______；

（2）选取1张A型卡片，4张C型卡片，则应取_______张B型卡片才能用他们拼成一个新的正方形，此新的正方形的边长是 _______（用含a，b的代数式表示）；

（3）选取4张C型卡片在纸上按图2的方式拼图，并剪出中间正方形作为第四种D型卡片，由此可检验的等量关系为 _______；

（4）选取1张D型卡片，3张C型卡片按图3的方式不重复的叠放长方形$MNPQ$框架内，已知NP的长度固定不变，MN的长度可以变化，且MN≠0．图中两阴影部分（长方形）的面积分别表示为S_1，S_2，若$S_1-S_2=3b^2$，则a与b有什么关系？请说明理由.

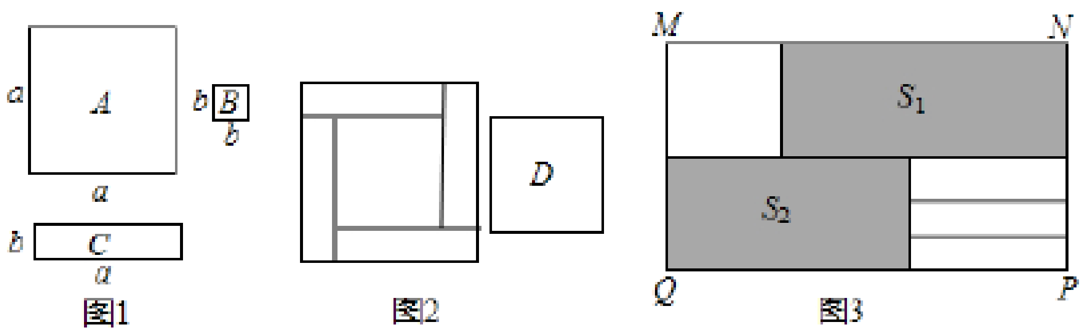


图1 图2 图3

15．阅读材料解决问题：当 $a-b>0$ 时，一定有 $a>b$；当 $a-b=0$ 时，一定有 $a=b$；当 $a-b<0$ 时，一定有 $a<b$.

（1）用“＞”或“＜”填空：∵（$a+1$）－（$a-1$）_______0，∴（$a+1$）_______（$a-1$）；

（2）已知 n 为自然数，$P=(n+1)(n+4)$，$Q=(n+2)(n+3)$，试比 P 与 Q 的大小；

（3）已知 $A=654321\times654324$，$B=654322\times654323$，直接写出 A 与 B 的大小比较结果.

16．阅读下列材料：

材料 1、将一个形如 x^2+px+q 的二次三项式因式分解时，如果能满足 $q=mn$ 且 $p=m+n$，则可以把 x^2+px+q 因式分解成（$x+m$）（$x+n$）

（1）$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$（2）$x^2-4x-12=(x-6)(x+2)$

材料 2、因式分解：$(x+y)^2+2(x+y)+1$

解：将“$x+y$”看成一个整体，令 $x+y=A$，则原式$=A^2+2A+1=(A+1)^2$

再将“A”还原，得：原式$=(x+y+1)^2$

上述解题用到“整体思想”，整体思想是数学解题中常见的一种思想方法，请你解答下列问题：

（1）根据材料 1，把 x^2-6x+8 分解因式.

（2）结合材料 1 和材料 2，完成下面小题：

①分解因式：$(x-y)^2+4(x-y)+3$；

②分解因式：$m(m+2)(m^2+2m-2)-3$.

17．如果一个四位自然数的百位数字大于或等于十位数字，且千位数字等于百位数字与十位数字的和，个位数字等于百位与十位数字的差，则我们称这个四位数为亲密数，例如：自然数 4312，其中 $3>1$，$4=3+1$，$2=3-1$，所以 4312 是亲密数；

（1）最小的亲密数是_______，最大的亲密数是_______；

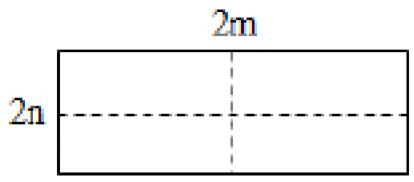
（2）若把一个亲密数的千位数字与个位数字交换，得到的新数叫做这个亲密数的友谊数，请证明任意一个亲密数和它的友谊数的差都能被原亲密数的十位数字整除；

（3）若一个亲密数的后三位数字所表示的数与千位数字所表示的数的 7 倍之差能被 13 整除，请求出这个亲密数.

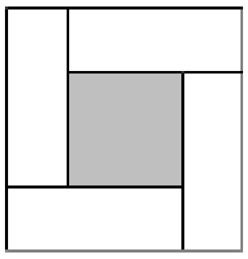
18．如图①所示是一个长为 $2m$，宽为 $2n$ 的长方形，沿图中虚线用剪刀均分长四个小长方形，然后按图②的方式拼成一个正方形.

（1）图②中的大正方形的边长为_______；阴影部分的正方形的边长为_______；

（2）请用两种方式表示图②中阴影部分的面积．



①



②

19．数学课上，老师用图1中的一张边长为 a 的正方形纸片 A，1张边长为 b 的正方形纸片 B 和2张宽与长分别为 a 与 b 的长方形纸片 C，拼成了如图2所示的大正方形，观察图形并解答下列问题：

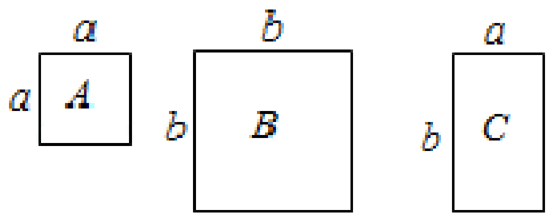


图1

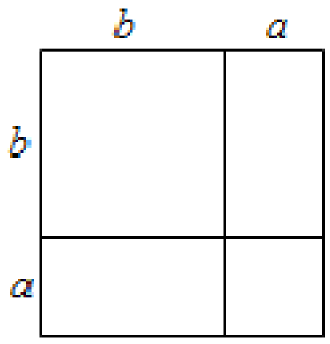


图2

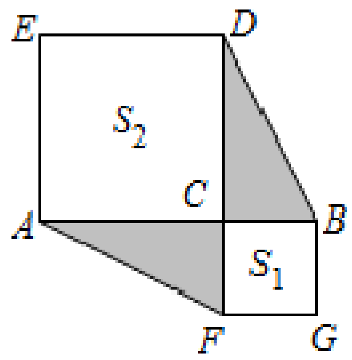


图3

（1）由图1和图2可以得到的等式为（用含 a，b 的等式表示）；

（2）莉莉想用这三种纸片拼出一个面积为（$2a+b$）（$a+2b$）的大长方形，求需 A，B，C 三种纸片各多少张；

（3）如图3，S_1，S_2 分别表示边长为 p，q 的正方形的面积，且 A，B，C 三点在一条直线上，$S_1+S_2=20$，$p+q=6$．求图中阴影部分的面积．

20．阅读并解决问题．

对于形如 $x^2+2ax+a^2$ 这样的二次三项式，可以用公式法将它分解成（$x+a$）^{2} 的形式．但对于二次三项式 $x^2+2ax-3a^2$，就不能直接运用公式了．此时，我们可以在二次三项式 $x^2+2ax-3a^2$ 中先加上一项 a^2，使它与 x^2+2ax 的和成为一个完全平方式，再减去 a^2，整个式子的值不变，于是有：

$x^2+2ax-3a^2=(x^2+2ax+a^2)-a^2-3a^2=(x+a)^2-(2a)^2=(x+3a)(x-a)$．

像这样，先添－适当项，使式中出现完全平方式，再减去这个项，使整个式子的值不变的方法称为“配方法”．

（1）利用“配方法”分解因式：a^2-6a+8．

（2）若 $a+b=5$，$ab=6$，求：①a^2+b^2；②a^4+b^4 的值．

（3）已知 x 是实数，试比较 x^2-4x+5 与 $-x^2+4x-4$ 的大小，说明理由．

参考答案

1．解：（1）①∵2102的个位数字和千位数字相同，但2+1+0+2＝5＜7，

故2102不是“始终如一数”；

②D（3423）$=\frac{3423-11\times 3}{10}=\frac{3390}{10}=339$；

（2）∵n的个位数字是1，

$\therefore D(n)=\frac{n-11a}{10}=\frac{n-11}{10}$，

$\therefore \frac{n-2-D(n)}{9}=\frac{9n-9}{90}=\frac{n-1}{10}$，

即$\frac{n-1}{10}$是完全平方数，

设$n=1000a+100b+10d+1$（$a\neq 0$），（$0<a\leqslant 9$，$0\leqslant b$，$d\leqslant 9$），

$\therefore \frac{n-1}{10}=100a+10b+d$，

∵n是“始终如一数”，

$\therefore a=1$，

$\therefore a+b+d+1>7$，

$\therefore b+d>5$，

$\therefore 100a+10b+d=10b+d+100$，

①$d=4$，$b=4$，$144=12^2$，

②$d=6$，$b=9$，$196=14^2$，

③$d=9$，$b=6$，$169=13^2$，

∴n可以取144，196，169．

2．解：（1）x^2+2x-8

$=x^2+2x+1-1-8$

$=(x+1)^2-9$

$=(x+1-3)(x+1+3)$

$=(x-2)(x+4)$；

（2）设$y=x^2+4x-3$，

$y=x^2+4x+4-4-3$，

$y=(x+2)^2-7$，

∴多项式x^2+4x-3的最小值是-7．

（3）$a^2+b^2+c^2+50=6a+8b+10c$，

即 $a^2+b^2+c^2+50-6a-8b-10c=0$，

$(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2-9-16-25+50=0$，

$(a-3)^2+(b-4)^2+(c-5)^2=0$，

∴$a=3$，$b=4$，$c=5$，

∴△ABC 的周长为 $3+4+5=12$．

3．解：（1）$x^2+2x\times6+36=x^2+12x+36=(x+6)^2$；

$3m^2+6m=3(m^2+2m)=3(m^2+2m+1-1)=3(m^2+2m+1)-3=3(m+1)^2-3$

故答案为：$12x$；3；

（2）$x^2-6x-27$

$=x^2-6x+9-36$

$=(x-3)^2-6^2$

$=(x-3+6)(x-3-6)$

$=(x+3)(x-9)$；

（3）$-x^2-4x+1$

$=-(x^2+4x+4-4)+1$

$=-(x^2+4x+4)+4+1$

$=-(x+2)^2+5$，

∵$(x+2)^2\geqslant0$，

∴$-(x+2)^2\leqslant0$，即 $-(x+2)^2+5\leqslant5$，

则当 $x=-2$ 时，多项式 $-x^2-4x+1$ 有最大值，最大值为 5．

4．解：（1）第 4 个式子为 $5+\frac{5}{4}=5\times\frac{5}{4}$；

（2）第 n 个式子 $(n+1)+\frac{n+1}{n}=(n+1)\times\frac{n+1}{n}$；

检验：左边$=\frac{n(n+1)}{n}+\frac{n+1}{n}=\frac{(n+1)(n+1)}{n}=$右边；

（3）∵m，n 是一对“和积数对”，

∴$m+n=mn$，

设 $m+n=mn=x$，

原式$=\frac{-3(m+n)^2+4(mn)^2}{4(m^2+n^2+2mn)}=\frac{-3x^2+4x^2}{4x^2}=\frac{1}{4}$；

5．解：（1）设 $3x^3+ax^2-2=M(x-1)$（其中 M 为整式），

∴取 $x=1$，得 $3+a-2=0$；

解得 $a=-1$；

（2）设 $2x^2+mxy+ny^2-4x+2y=N(x+y-2)$（其中 N 为整式）；

∴取 $x=0$，$y=2$，得 $4n+4=0$①；

取 $x=1$，$y=1$，得 $2+m+n-4+2=0$②；

由①②的 $m=1$，$n=-1$；

（3）设这个非负数为 a，另一因式为 Q，

∴可得到关系式为 $x^{2022}+2x^{1011}+5-a=Q(x+1)$，

将 $x=-1$ 代入，得 $1-2+5-a=0$；

解得 $a=4$．

故 $x^{2022}+2x^{1011}+5$ 除以一次因式 $(x+1)$ 的余数为 4．

6．（1）解：对于 743，满足 4＞3，且 3+4＝7，所以 743 是下降数．

对于 523．不满足 2＞3，所以 523 不是下降数；

故答案为：是，不是；

（2）证明：设 m 为任意一个下降数，令 $m=100a+10b+c$（$1\leqslant a$，b，$c\leqslant 9$），且 a，b，c 为整数），

则 $m'=100b+10a+c$，

∴$F(m)=\dfrac{m+m'-2c}{10}=\dfrac{110a+110b}{10}=11(a+b)$，

∵a，b 为整数，

∴$F(m)$ 能被 11 整除；

（3）解：∵s，t 为下降数，

定义 $s=100x+10y+51=100x+10(y+5)+1$，

显然，当 $6\leqslant y\leqslant 9$ 时，$s=100(x+1)+10(y-5)+1$，

∴$F(s)=11(x+1+y-5)=11(x+y-4)$，

又∵$F(t)=11(a+4)$，

∴$\dfrac{F(s)\cdot F(t)}{121}=(x+y-4)(a+4)=117$，

∵$1\leqslant x$，y，$a\leqslant 9$，

∴$117=9\times 13$，