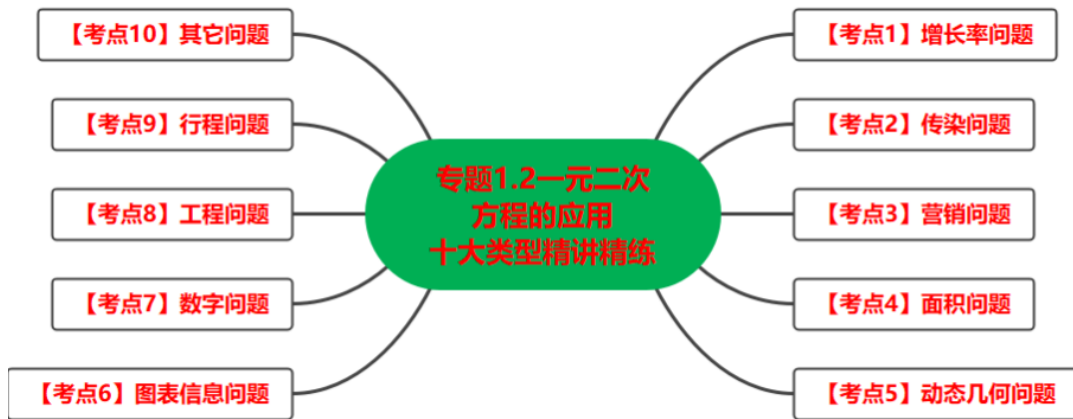


专题 1.2 一元二次方程的应用十大类型精讲精练

(知识梳理+典例剖析+变式训练)



【知识梳理】

1、列方程解决实际问题的步骤是：审清题意设未知数，列出方程，解所列方程求所列方程的解，检验和作答。

2、列一元二次方程解应用题中常见问题：

(1) 数字问题：个位数为 a ，十位数是 b ，则这个两位数表示为 $10b+a$ 。

(2) 增长率问题：增长率=增长数量/原数量 $\times 100\%$ 。如：若原数是 a ，每次增长的百分率为 x ，则第一次增长后为 $a(1+x)$ ；第二次增长后为 $a(1+x)^2$ ，即 原数 $\times(1+\text{增长百分率})^2$ =后来数。

(3) 形积问题：①利用勾股定理列一元二次方程，求三角形、矩形的边长。②利用三角形、矩形、菱形、梯形和圆的面积，以及柱体体积公式建立等量关系列一元二次方程。

(4) 运动点问题：物体运动将会沿着一条路线或形成一条痕迹，运行的路线与其他条件会构成直角三角形，可运用直角三角形的性质列方程求解。

(5) 销售问题：

利润=售价-进价=进价 \times 利润率，总利润=销售量 \times 单件利润

3. 列一元二次方程解应用题的“六字诀”

(1) 审：理解题意，明确未知量、已知量以及它们之间的数量关系。

(2) 设：根据题意，可以直接设未知数，也可以间接设未知数。

(3) 列：根据题中的等量关系，用含所设未知数的代数式表示其他未知量，从而列出方程。

(4) 解：准确求出方程的解。

(5) 验：检验所求出的根是否符合所列方程和实际问题。

(6) 答：写出答案.

【典例剖析】

【考点1】增长率问题

【例1】(2022·新疆·乌鲁木齐市第七十四中学九年级期末)为应对新冠疫情,较短时间内要实现全国医用防护服产量成倍增长,有效保障抗击疫情一线需要,某医用防护服生产企业1月份生产9万套防护服,该企业不断加大生产力度,3月份生产达到12.96万套防护服.

(1)求该企业1月份至3月份防护服的月平均增长率.

(2)若平均增长率保持不变,4月份该企业防护服的产量能否达到16万套?请说明理由.

【答案】(1)该企业1月份至3月份防护服的月平均增长率为20%

(2)不能达到,理由见解析

【分析】(1)设企业1月份至3月份防护服的月平均增长率为 x ,根据题意列出关于 x 的一元二次方程即可求解;

(2)根据条件算出4月份该企业防护服的产量,即可判断.

(1)

解:设企业1月份至3月份防护服的月平均增长率为 x ,

由题意可得: $9(1+x)^2=12.96$,

解得: $x_1=20%$, $x_2=-2.2$ (舍去)

答:该企业1月份至3月份防护服的月平均增长率为20%;

(2)

解: $12.96 \times (1+20\%) = 15.552$ (万套),

$\because 15.552 < 16$,

\therefore 4月份该企业防护服的产量不能达到16万套.

【点睛】本题主要考查一元二次方程的应用,根据条件列出一元二次方程是解题的关键.

【变式1.1】(2021·云南·富源县第七中学九年级期中)2020年疫情期间,某地教育局出台《中小学线上教学工作实施方案》,推出名师公益大课堂,为学生提供线上直播教学.据统计,第一批次公益课受益的学生为4万人,第三批次公益课受益的学生为4.84万人,每个批次受益学生人数的平均增长率相同.

(1)求每个批次的平均增长率;

(2)按照这个增长率,预计第四批次公益课受益的学生将达到多少万人?

【答案】(1)10%

(2)5.324万

【分析】(1)设每批次的增长率为 x ,根据一批次公益课受益的学生为4万人,第三批次公益课受益的学生为4.84万人,列出方程,解出方程,即可;

(2)根据题(1)求出的增长率,根据 $4.84 \times (1+x)$,即可求出第四批的人数.

(1)

解：设每批次的增长率为 x

∴第二批次的人数为： $4 \times (1 + x)$

∴第三批次的人数为： $4 \times (1 + x) \times (1 + x) = 4.84$

∴ $4 \times (1 + x)^2 = 4.84$

解得： $x_1 = 0.1$ ， $x_2 = -2.1$ （舍去）

∴ $x = 0.1$

∴增长率为10%.

(2)

∴增长率为10%

∴第四批的人数： $4.84 \times (1 + 10\%) = 5.324$ 万人

故第四批次公益课受益的学生将达到5.324万人.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的知识，解题的关键是理解题意，列出方程，解一元二次方程.

【变式 1.2】 (2021·甘肃·静宁县阿阳实验学校九年级阶段练习) 受益于国家支持新能源汽车发展和“一带一路”发展战略等多重利好因素，某市某汽车零部件生产企业的利润逐年提高，据统计 2017 年利润为 2 亿元，2019 年利润为 3.38 亿元.

(1) 求该企业从 2017 年到 2019 年利润的年平均增长率；

(2) 若 2020 年保持前两年利润的年平均增长率不变，该企业 2020 年的利润能否超过 4 亿元？

【答案】 (1) 该企业从 2017 年到 2019 年利润的年平均增长率为 30%；

(2) 该企业 2020 年的利润能超过 4 亿元

【分析】 (1) 设该企业从 2017 年到 2019 年利润的年平均增长率为 x ，根据“2017 年利润为 2 亿元，2019 年利润为 3.38 亿元”列方程求解即可；

(2) 根据该企业从 2017 年到 2019 年利润的年平均增长率求出该企业 2020 年的利润即可作答.

(1)

解：设该企业从 2017 年到 2019 年利润的年平均增长率为 x ，

根据题意得： $2(1 + x)^2 = 3.38$ ，

解得： $x_1 = 0.3 = 30\%$ ， $x_2 = -2.3$ （不合题意，舍去），

答：该企业从 2017 年到 2019 年利润的年平均增长率为 30%；

(2)

若 2020 年保持前两年利润的年平均增长率不变，

那么该企业 2020 年的利润为： $3.38 \times (1 + 30\%) = 4.394 > 4$ ，

故该企业 2020 年的利润能超过 4 亿元.

【点睛】此题考查一元二次方程的应用，根据题意寻找相等关系列方程是关键，难度不大。

【变式 1.3】（2022·浙江金华·八年级期末）金华市某超市以原价为 40 元/瓶的价格对外销售某种洗手液，为了减少库存，决定降价销售，经过两次降价后，售价为 32.4 元/瓶。

(1)求平均每次降价的百分率。

(2)金华市某学校为确保疫情复学后工作安全、卫生、健康、有序，学校决定购买一批洗手液(超过 200 瓶)。该超市对购买量大的客户有优惠措施，在 32.4 元/瓶的基础上推出方案一：每瓶打九折；方案二：不超过 200 瓶的部分不打折，超过 200 瓶的部分打八折。学校应该选择哪一种方案更省钱？请说明理由。

【答案】(1)平均每次降价的百分率为10%

(2)当购买洗手液大于 200 瓶而小于 400 瓶时，学校选择方案一更省钱；当购买 400 瓶洗手液时，学校选择方案一、方案二的费用相同；当购买洗手液超过 400 瓶时，学校选择方案二更省钱。

【分析】(1)根据“售价 = 原价 \times (1 - 平均每次降价的百分率)²”建立方程，解方程即可得；

(2)设学校购进这种洗手液 $m(m > 200)$ 瓶，先分别求出两种方案所需的费用，再比较大小，解方程或不等式即可得。

(1)

解：设平均每次降价的百分率为 x ，

由题意得： $40(1 - x)^2 = 32.4$ ，

解得 $x_1 = 0.1 = 10\%$ ， $x_2 = 1.9 > 1$ （不合题意，舍去），

答：平均每次降价的百分率为10%。

(2)

解：设学校购进这种洗手液 $m(m > 200)$ 瓶，

则选择方案一所需费用为 $32.4 \times 0.9m = 29.16m$ （元），

选择方案二所需费用为 $32.4 \times 200 + 32.4 \times 0.8(m - 200) = (1296 + 25.92m)$ （元），

①当 $29.16m > 1296 + 25.92m$ 时，

解得 $m > 400$ ，

\therefore 当 $m > 400$ 时，学校选择方案二更省钱；

②当 $29.16m = 1296 + 25.92m$ 时，解得 $m = 400$ ，

\therefore 当 $m = 400$ 时，学校选择方案一、方案二的费用相同；

③当 $29.16m < 1296 + 25.92m$ 时，解得 $m < 400$ ，

\therefore 当 $200 < m < 400$ 时，学校选择方案一更省钱；

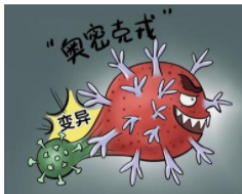
综上，当购买洗手液大于 200 瓶而小于 400 瓶时，学校选择方案一更省钱；当购买 400 瓶洗

手液时，学校选择方案一、方案二的费用相同；当购买洗手液超过 400 瓶时，学校选择方案二更省钱。

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用、一元一次不等式和一元一次方程的应用，正确建立方程和不等式是解题关键。

【考点 2】传染问题

【例 2】 (2022·浙江绍兴·八年级期末) 请根据图片内容，回答下列问题：



我叫 *Omicrom* (奥密克戎)，是新冠病毒的变异毒株，我的传染性很强，传播速度很快。有一次我感染了 1 个人，此人未被有效隔离，经过两轮传染后共有 121 名感染者。

(1) 每轮传染中，平均一个人传染了几个人？

(2) 按照这样的速度传染，第三轮将新增多少名感染者（假设每轮传染人数相同）？

【答案】 (1) 每轮传染中，平均一个人传染了 10 个人

(2) 第三轮将新增 1210 名感染者

【分析】 (1) 设平均一个人传染了 x 个人，第一轮传染了 x 人，第一轮传染后一共有 $(1+x)$ 名感染者；第二轮传染时这 $(1+x)$ 人每人又传染了 x 人，则第二轮传染了 $x(1+x)$ 人，列出方程求解即可；

(2) 根据 (1) 中的结果进行计算即可。

(1)

解：设平均一个人传染了 x 个人。

则可列方程： $1 + x + (1 + x) \cdot x = 121$ 。

解得 $x_1 = 10$ ， $x_2 = -12$ (舍去)。

答：每轮传染中，平均一个人传染了 10 个人。

(2)

$121 \times 10 = 1210$ (名)。

答：按照这样的速度传染，第三轮将新增 1210 名感染者。

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程的实际应用，正确地理解题意，找出题目中的等量关系列出方程求解是解题的关键。

【变式 2.1】 (2022·云南红河·九年级期末) 截止到 2022 年 1 月，新冠肺炎疫情在中国已经得到有效控制，但在全球却持续蔓延，这是对人类的考验，将对全球造成巨大影响。新冠肺炎具有人传人的特性，若一人携带病毒，未进行有效隔离，经过两轮传染后共有 196 人患新冠肺炎，求每轮传染中平均每个人传染了几个人？

【答案】 每轮传染中平均每个人传染了 13 个人

【分析】 根据题意设每轮传染中平均每个人传染了 x 个人，根据题意列出一元二次方程，解

方程即可求解.

【详解】根据题意设每轮传染中平均每个人传染了 x 个人, 根据题意可得:

$$(1+x)^2 = 196,$$

解得 $x_1 = 13, x_2 = -15$ (舍去),

答: 每轮传染中平均每个人传染了 13 个人.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用, 根据题意列出方程是解题的关键.

【变式 2.2】(2022·全国·九年级课时练习) 某种电脑病毒传播非常快, 如果一台电脑被感染, 经过两轮感染后就会有 81 台电脑被感染, 请用一元二次方程的知识分析, 每轮感染中平均一台电脑会感染几台电脑? 若病毒得不到有效控制, 那么经过三轮感染后, 被感染的电脑共有多少台?

【答案】每轮感染中平均一台电脑会感染 8 台电脑; 经过三轮感染后, 被感染的电脑共有 729 台

【分析】设每轮感染中平均一台电脑会感染 x 台电脑, 则有 $1+x+(1+x)x=81$, 再解方程求出满足条件的 x 的值, 然后计算 $81(1+x)$ 即可.

【详解】解: 设每轮感染中平均一台电脑会感染 x 台电脑, 得:

$$1+x+(1+x)x=81$$

$$\text{即 } (1+x)^2=81$$

解得 $x_1=8, x_2=-10$ (不合题意, 舍去),

所以经过三轮感染后, 被感染的电脑共有 $81+81\times 8=729$ 台.

答: 每轮感染中平均一台电脑会感染 8 台电脑. 经过三轮感染后, 被感染的电脑共有 729 台.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用, 根据题意列出方程是本题的关键.

【变式 2.3】(2022·全国·九年级) 2020 年 3 月, 新冠肺炎疫情在中国已经得到有效控制, 但在全球却开始持续蔓延, 这是对人类的考验, 将对全球造成巨大影响. 新冠肺炎具有人传人的特性, 若一人携带病毒, 未进行有效隔离, 经过两轮传染后共有 64 人患新冠肺炎 (假设每轮传染的人数相同). 求:

(1) 每轮传染中平均每个人传染了几个人?

(2) 如果这些病毒携带者, 未进行有效隔离, 按照这样的传染速度, 第三轮传染后, 共有多少人患病?

【答案】(1) 7 人

(2) 512 人

【分析】(1) 设每轮传染中平均每个人传染了 x 个人, 根据一人患病后经过两轮传染后共有 64 人患病, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 解之即可得出结论;

(2) 根据经过三轮传染后患病人数=经过两轮传染后患病人数 $\times(1+x)$, 即可求出结论.

(1)

设每轮传染中平均每个人传染了 x 个人，

依题意，得： $1+x+x(1+x)=64$ ，

解得： $x_1=7$ ， $x_2=-9$ （不合题意，舍去）。

答：每轮传染中平均每个人传染了 7 个人。

(2)

$64 \times (1+7) = 512$ （人）。

答：按照这样的传染速度，第三轮传染后，共有 512 人患病。

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键。

【考点 3】营销问题

【例 3】（2022·安徽·合肥市五十中学新校八年级期中）某商场销售一批运动服，平均每天可售出 30 套，每套盈利 100 元，为了扩大销售，增加盈利，减少库存，商场决定采取适当的降价措施。经调查发现，每套运动服每降价 2 元，商场平均每天可多售出 1 套。

(1) 当每套运动服降价 x 元时，商场每天可售出运动服_____套。（用含 x 的代数式表示）：

(2) 若商场每天要盈利 3150 元，则每套运动服应降价多少元？

(3) 商场每天的盈利能否达到 3250 元？若能，请求出此时每套运动服应降价多少元？若不能，请说明理由。

【答案】(1) $(30+\frac{1}{2}x)$

(2) 每套运动服应降价 30 元

(3) 不能，理由见解析

【分析】(1) 根据题意列代数式即可；

(2) 设每套运动服应降价 x 元，由每套运动服每降价 2 元，商场平均每天可多售出 1 套，可知每套运动服每降价 1 元，商场平均每天可多售出 $\frac{1}{2}$ 套，则每套运动服降价 x 元，商场平均每天可多售出 $\frac{x}{2}$ 套；根据总利润=销售量×每套的利润，列方程可求得；

(3) 设每套运动服应降价 x 元，根据题意得到方程 $(100-x)(30+\frac{x}{2})=3250$ ，整理得： $x^2-40x+500=0$ ，由于 $\Delta=1600-2000<0$ ，于是得到商场每天的盈利不能达到 3250 元。

(1)

解：当每套运动服降价 x 元时，商场每天可售出运动服 $(30+\frac{x}{2})$ 套，

故答案为： $(30+\frac{x}{2})$ ；

(2)

解：设每套运动服应降价 x 元，由题意得

$$(100-x)\left(30+\frac{x}{2}\right)=3150,$$

解得： $x=10$ 或 $x=30$ ，

∵扩大销售，增加盈利，减少库存，

∴ $x=30$ ，

答：每套运动服应降价 30 元；

(3)

解：设每套运动服应降价 x 元，根据题意得

$$(100-x)\left(30+\frac{x}{2}\right)=3250,$$

整理得： $x^2-40x+500=0$ ，

∵ $\Delta=1600-2000<0$ ，

故方程没有实数根，

∴商场每天的盈利不能达到 3250 元。

【点睛】本题考查了列代数式、一元二次方程的应用，属于销售利润问题，理解题意，明确总利润=销售数量×每套的利润是解答的关键。

【变式 3.1】(2022·浙江宁波·八年级期末)位于宁波市江北区的保国寺以其精湛绝伦的建筑工程闻名全国，其中大雄宝殿(又称无梁殿)更是以四绝“鸟不栖，虫不入，蜘蛛不结网，梁上无灰尘”吸引了各地游客前来参观.据统计，假期第一天保国寺的游客人数为 5000 人次，第三天游客人数达到 7200 人次。

(1)求游客人数从假期第一天到第三天的平均日增长率；

(2)据悉，景区附近商店推出了保国寺旅游纪念章，每个纪念章的成本为 5 元，当售价为 10 元时，平均每天可售出 500 个，为了让游客尽可能得到优惠，商店决定降价销售.市场调查发现，售价每降低 0.5 元，平均每天可多售出 100 个，若要使每天销售旅游纪念章获利 2800 元，则售价应降低多少元？

【答案】(1)20%

(2)要使每天销售旅游纪念章获利 2800 元，售价应降低 1.5 元

【分析】(1) 设游客人数从假期第一天到第三天的平均日增长率为 x ，根据题意得关于 x 的一元二次方程，解方程，然后根据问题的实际意义作出取舍即可；

(2) 设售价应降低 m 元，根据每个的利润乘以销售量，等于 2800，列方程并求解，再结合问题的实际意义作出取舍即可。

(1)

解：设游客人数从假期第一天到第三天的平均日增长率为 x ，

根据题意，得 $5000(1+x)^2=7200$ ，

解得 $x_1=0.2$ ， $x_2=-2.2$ (舍去)。

答：平均增长率为 20%；

(2)

设售价应降低 m 元，则每天的销量为 $(500 + \frac{100}{0.5}m)$ 个，根据题意得，

$$(10 - m - 5)(500 + \frac{100}{0.5}m) = 2800,$$

解得 $m_1 = 1.5$, $m_2 = 1$,

为了让游客尽可能得到优惠，则 $m = 1.5$.

答：要使每天销售旅游纪念章获利 2800 元，售价应降低 1.5 元.

【点睛】 本题考查了一元二次方程在增长率问题和销售问题中的应用，根据题意，找到等量关系，正确列出方程是解题的关键.

【变式 3.2】 (2022·黑龙江哈尔滨·八年级期末) 为积极响应新旧动能转换，提高公司经济效益，某科技公司近期研发出一种新型高科技设备，经过市场调研发现，每台售价为 45 万元时，年销售量为 550 台. 假定该设备的年销售量 y (单位：台) 和销售单价 x (单位：万元) 成一次函数关系 $y = -10x + b$.

(1) 求年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式；

(2) 已知每台设备成本价为 30 万元，根据相关规定，此设备的销售单价不得高于 70 万元，如果该公司想获得 10000 万元的年利润，则该设备的销售单价应是多少万元？

【答案】 (1) $y = -10x + 1000$

(2) 50 万元/台

【分析】 (1) 把 $x = 45$, $y = 550$ 代入 $y = -10x + b$, 即可求解；

(2) 根据题意，列出方程，即可求解.

(1)

解：把 $x = 45$, $y = 550$ 代入 $y = -10x + b$

$$\therefore 550 = -10 \times 45 + b$$

$$\therefore b = 1000$$

$$\therefore y = -10x + 1000$$

即年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y = -10x + 1000$.

(2)

解：根据题意得： $(x - 30)(-10x + 1000) = 10000$

解得： $x_1 = 50, x_2 = 80$.

\therefore 此设备的销售单价不得高于 70 万元，

$$\therefore x = 50.$$

答：该设备的销售单价应是 50 万元/台.

【点睛】 本题主要考查了求一次函数解析式，一元二次方程的应用，明确题意，准确得到等量关系是解题的关键.

【变式 3.3】. (2022·山东淄博·八年级期末) 2022 年北京冬季奥运会于 2 月 4 日至 2 月 20 日在北京市和河北省张家口市联合举行, 冬奥会吉祥物为“冰墩墩”.



(1)据市场调研发现, 某工厂今年二月份共生产 500 个“冰墩墩”, 为增大生产量, 该工厂平均每月生产量增加 20%, 则该工厂在四月份能生产多少个“冰墩墩”?

(2)已知某商店“冰墩墩”平均每天可销售 20 个, 每个盈利 40 元, 在每个降价幅度不超过 10 元的情况下, 每下降 2 元, 则每天可多售 10 件. 如果每天要盈利 1440 元, 则每个“冰墩墩”应降价多少元?

【答案】(1)720 个

(2)4 元

【分析】(1) 先根据增长率列式求解即可;

(2) 设每个应降价 x 元, 则每个盈利 $(40 - x)$ 元, 平均每天可售出 $(20 + \frac{x}{2} \times 10)$ 个, 根据关系式“每件服装的盈利 \times (原来的销售量 + 增加的销售量) = 盈利”, 列出一元二次方程, 求解并进行判断即可.

(1)

解: $500 \times (1 + 20\%)^2 = 500 \times 1.44 = 720$ (个).

答: 该工厂在四月份能生产 720 个“冰墩墩”;

(2)

解: 设每个应降价 x 元, 则每个盈利 $(40 - x)$ 元, 平均每天可售出 $(20 + \frac{x}{2} \times 10)$ 个,

依题意, 得 $(40 - x)(20 + \frac{x}{2} \times 10) = 1440$,

整理, 得 $x^2 - 36x + 128 = 0$,

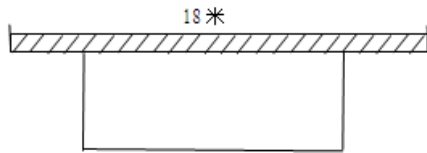
解得 $x_1 = 4$, $x_2 = 32$ (不符合题意, 舍去).

答: 每个“冰墩墩”应降价 4 元.

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的应用, 根据每天盈利得到相应的等量关系是解决本题的关键.

【考点 4】面积问题

【例 4】(2021·湖北·襄阳市樊城区青泥湾中学九年级阶段练习) 如图所示, 学校准备在教学楼后面搭建一简易矩形自行车车棚, 一边利用教学楼的后墙(可利用的墙长为 18m), 另外三边利用学校现有总长 38m 的铁栏围成.



(1)若围成的面积为 180m^2 ，试求出自行车车棚的长和宽；

(2)为使用方便，决定在车棚左右两侧各开一个宽为 1m 的小门，此时能围成的车棚的面积能否为 200m^2 吗？如果能，请你给出设计方案；如果不能，请说明理由。

【答案】(1)自行车车棚的长和宽分别为 18m ， 10m

(2)能围成面积为 200m^2 的自行车车棚，此时长和宽分别为 20m ， 10m

【分析】(1)利用长方形的周长表示出各边长，即可表示出矩形面积，求出即可；

(2)利用长方形的面积列方程，解答即可。

(1)

解：设长方形的宽为 $x\text{m}$ ，则长为 $(38-2x)\text{m}$ ，

根据题意，得 $x(38-2x)=180$ ，

解得 $x_1=10$ ， $x_2=9$

当 $x=10$ 时， $38-2x=18$ ；

当 $x=9$ 时， $38-2x=20>18$ ，不符合题意，舍去。

答：若围成的面积为 180m^2 ，自行车车棚的长和宽分别为 18m ， 10m 。

(2)

解：能围成面积为 200m^2 的自行车车棚，理由如下：

根据题意，得 $x(38-2x+2)=200$ ，

整理，得 $x^2-20x+100=0$ ，

解得： $x=10$ ，

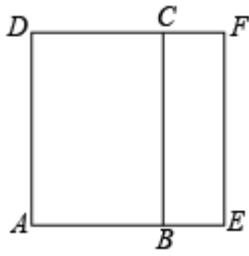
$\therefore 38-10-10+2=18$ ，

\therefore 能围成面积为 200m^2 的自行车车棚。

\therefore 此时长和宽分别为 20m ， 10m 。

【点睛】本题考查一元二次方程的应用，正确理解题意找到等量关系列出方程是解题关键。

【变式 4.1】(2021·四川·荣县一中九年级阶段练习)今年荣县一中计划扩大校园绿地面积，现有一块长方形绿地 $ABCD$ ，它的短边 AB 长为 6m ，若将短边 AB 增大到与长边 AD 相等(长边不变)，使扩大后的绿地的形状是正方形 $Aefd$ ，则扩大后的绿地面积比原来增加 16m^2 ，求扩大后的正方形绿地边长。



【答案】 8m.

【分析】 设扩大后的正方形绿地边长为 x m, 根据“扩大后的绿地面积比原来增加 16m^2 ”建立方程, 再解方程求解即可.

【详解】 解: 设扩大后的正方形绿地边长为 x m, 根据题意得 $x(x-6)=16$,

解得 $x_1=8$, $x_2=-2$ (舍去).

答: 扩大后的正方形绿地边长为 8m.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用, 解题的关键是弄清题意, 利用长方形的面积解决问题.

【变式 4.2】. (2022·浙江杭州·八年级期末) 某小区计划用 40 米的篱笆围一个矩形花坛, 其中一边靠墙 (墙足够长, 篱笆要全部用完).



图1

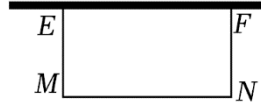


图2

(1) 如图 1, 问 AB 为多少米时, 矩形 $ABCD$ 的面积为 200 平方米?

(2) 如图 2, 矩形 $EMNF$ 的面积比 (1) 中的矩形 $ABCD$ 面积减小 20 平方米, 小明认为只要此时矩形的长 MN 比图①中矩形的长 BC 少 2 米就可以了. 请你通过计算, 判断小明的想法是否正确.

【答案】 (1) 10 米

(2) 不正确, 理由见解析

【分析】 (1) 设 $AB = x$ 米, 则 $BC = (40 - 2x)$ 米, 根据矩形 $ABCD$ 的面积为 200 平方米, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 解之即可得出结论;

(2) 代入 $x = 10$ 可求出 BC 的长, 由 $MN = BC - 2$, 可求出 MN 的长, 结合篱笆要全部用完, 可求出 EM 的长, 再利用矩形的面积计算公式, 即可求出矩形 $EMNF$ 的面积, 将其与 $(200 - 20)$ 比较后即可得出结论.

(1)

解: 设 $AB = x$ 米, 则 $BC = (40 - 2x)$ 米,

依题意得: $x(40 - 2x) = 200$,

整理得： $x^2 - 20x + 100 = 0$ ，

解得： $x_1 = x_2 = 10$ 。

答： AB 为10米时，矩形 $ABCD$ 的面积为200平方米。

(2)

由(1)可知： $BC = 40 - 2x = 40 - 2 \times 10 = 20$ 。

$\therefore MN = BC - 2 = 20 - 2 = 18$ (米)，

$\therefore EM = \frac{40 - MN}{2} = \frac{40 - 18}{2} = 11$ (米)，

\therefore 矩形 $EMNF$ 的面积 = $MN \cdot EM = 18 \times 11 = 198$ (平方米)， $200 - 20 = 180 \neq 198$ ，

\therefore 小明的想法不正确。

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键。

【变式 4.3】 (2022·浙江绍兴·八年级期末) 有一块长28cm，宽12cm的矩形铁皮。



图 1

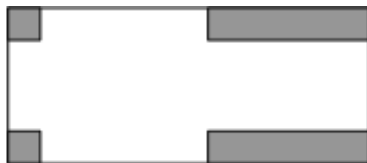


图 2

(1)如图1，如果在铁皮的四个角裁去四个边长一样的正方形后，将其折成底面积为 192cm^2 的无盖长方体盒子，求裁去的正方形的边长。

(2)由于需要，计划制作一个有盖的长方体盒子，为了合理利用材料，某学生设计了如图2的裁剪方案，阴影部分为裁剪下来的边角料，其中左侧的两个阴影部分为正方形，若剩余部分恰好能折成一个底面积为 130cm^2 的有盖盒子，请你求出裁去的左侧正方形的边长。

【答案】 (1)2cm

(2)1cm

【分析】 (1) 设裁去的正方形边长为 $x\text{cm}$ ，然后根据长方形面积公式列出方程求解即可；

(2) 设裁去的左侧正方形的边长为 $a\text{cm}$ ，然后根据长方形面积公式列出方程求解即可。

(1)

解：设裁去的正方形边长为 $x\text{cm}$ ，

由题意得： $(28 - 2x)(12 - 2x) = 192$ ，

解得 $x_1 = 2$ ， $x_2 = 18$ (舍去)

答：裁去的正方形边长为2cm。

(2)

解：设裁去的左侧正方形的边长为 $a\text{cm}$ ，

由题意得： $(12 - 2a) \frac{(28 - 2a)}{2} = 130$ ，

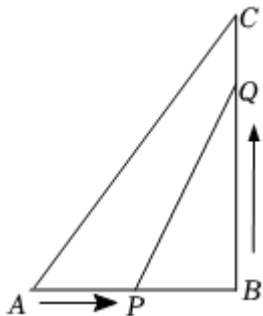
解得 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 19$ (舍去)

答：裁去的左侧正方形的边长为1cm.

【点睛】本题主要考查了一元二次的应用，正确理解题意列出方程求解是解题的关键.

【考点5】动态几何问题

【变式5.1】(2022·安徽合肥·八年级期末)如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AB = 6\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$. 点 P 从点 A 出发，沿 AB 边以 1cm/s 的速度向点 B 移动；点 Q 从点 B 同时出发，沿 BC 边以 2cm/s 的速度向点 C 移动. 规定其中一个动点到达终点时，另一个动点也随之停止运动. 问经过几秒后， P ， Q 两点的距离是 $4\sqrt{2}\text{cm}$?



【答案】 $\frac{2}{5}$ 秒或2秒

【分析】设经过 t 秒后， P ， Q 两点的距离是 $4\sqrt{2}\text{cm}$ ，利用勾股定理列出方程并解答即可.

【详解】解：设经过 t 秒后， P ， Q 两点的距离是 $4\sqrt{2}\text{cm}$ ，

根据题意，得 $(2t)^2 + (6 - t)^2 = (4\sqrt{2})^2$ ，

整理，得 $(5t - 2)(t - 2) = 0$ ，

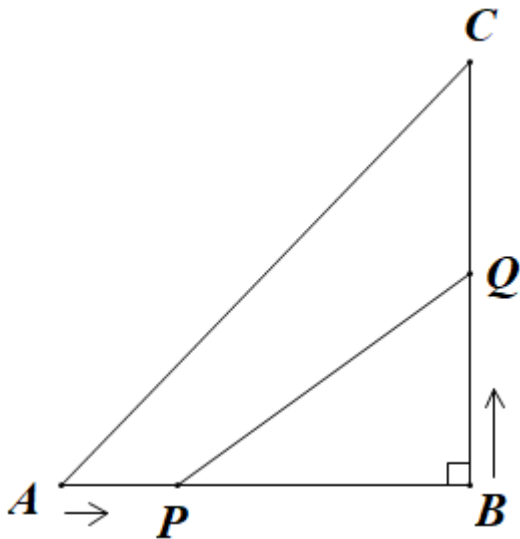
解得 $t_1 = \frac{2}{5}$ ， $t_2 = 2$.

当 $t = 2$ 时， $2t = 4 < 8$ ，符合题意，

答： $\frac{2}{5}$ 秒或2秒后， P ， Q 两点间的距离等于 $4\sqrt{2}\text{cm}$.

【点睛】此题考查的是一元二次方程的应用，根据路程 = 速度 × 时间，表示线段的长度，将问题转化到三角形中，利用勾股定理或者面积关系建立等量关系，是解应用题常用的方法.

【变式5.2】.(2022·山东泰安·八年级期末)如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 5\text{cm}$ ， $BC = 7\text{cm}$ ，点 P 从点 A 开始沿 AB 边向点 B 以 1cm/s 的速度移动，点 Q 同时从点 B 开始沿 BC 边向点 C 以 2cm/s 的速度移动.



(1)几秒后, $\triangle PBQ$ 的面积等于 4cm^2 ?

(2)几秒后, PQ 的长度等于 5cm ?

(3) $\triangle PBQ$ 的面积能否等于 8cm^2 ?

【答案】(1)1 秒

(2)2 秒

(3)不能, 理由见解析

【分析】对于(1), 先表示出 PB , BQ , 再根据面积公式, 解一元二次方程求出解即可;

对于(2), 根据(1) PB , BQ 的长, 再根据勾股定理, 解一元二次方程求出解;

对于(3), 根据(1) PB , BQ 的长, 结合面积公式, 判断方程的根即可得出答案.

(1)

设运动是 t 秒, 可知 $AP=t\text{cm}$, $BQ=2t\text{cm}$, 得 $BP=(5-t)\text{cm}$, 根据题意, 得

$$S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2} \times BP \cdot BQ,$$

$$\text{即} \frac{1}{2}(5-t) \times 2t = 4,$$

解得 $t=1$ 或 $t=4$ (不符合题意, 舍去).

所以 1 秒时, $\triangle PBQ$ 的面积是 4cm^2 ;

(2)

由(1)知 $BQ=2t\text{cm}$, $BP=(5-t)\text{cm}$, 根据勾股定理, 得

$$BQ^2 + BP^2 = PQ^2,$$

$$\text{即} (2t)^2 + (5-t)^2 = 5^2,$$

解得 $t=0$ (舍去) 或 $t=2$.

所以 2 秒时 PQ 的长度是 5cm ;

(3)

由(1)知 $BQ=2t\text{cm}$, $BP=(5-t)\text{cm}$, 根据题意, 得

$$S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2} \times BP \cdot BQ,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 2t \times (5-t) = 8,$$

$$\text{则 } t^2 - 5t + 8 = 0,$$

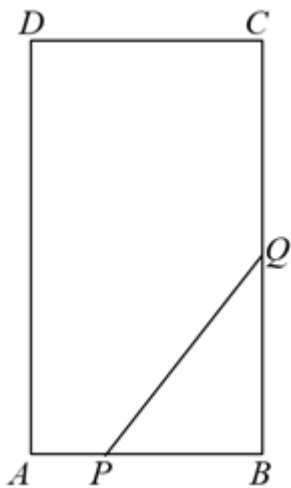
$$\therefore b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 8 = -7 < 0,$$

则原方程无解.

所以 $\triangle PBQ$ 的面积不能等于 8cm^2 .

【点睛】这是一道关于动点的综合问题, 解答此类问题的常用方法是先表示出相应线段的长, 再结合公式解答.

【变式 5.3】. (2021·江苏泰州·九年级期中) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, 点 P 从点 A 出发, 沿 AB 边向点 B 以 $1\text{cm}/\text{秒}$ 的速度运动, 同时, 点 Q 从点 B 出发沿 BC 边向点 C 以 $2\text{cm}/\text{秒}$ 的速度移动. 如果 P 、 Q 两点在分别到达 B 、 C 两点后就停止移动, 回答下列问题:



(1) 点 P 运动开始后第几秒时, $\triangle PBQ$ 的面积等于 8cm^2 ;

(2) 设点 P 运动开始后第 t 秒时, 五边形 $APQCD$ 的面积为 $S\text{cm}^2$, 写出 S 与 t 的函数关系式, 并指出 t 的取值范围.

【答案】 (1) 2秒或4秒

$$(2) S = t^2 - 6t + 72 (0 < t < 6)$$

【分析】 (1) 根据 t 秒时, P 、 Q 两点的运动路程, 分别表示 PB 、 BQ 的长度, 可得 $\triangle PBQ$ 的面积, 后令其为 8cm^2 , 求出 t 的值即可;

(2) 用 $S = S_{\text{矩形}ABCD} - S_{\triangle PBQ}$ 求面积即可.

(1)

解: 第 t 秒钟时, $AP = t$, $BQ = 2t$,

$$\therefore PB = 6 - t,$$

$$\therefore S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}(6-t) \cdot 2t = -t^2 + 6t,$$

当 $\triangle PBQ$ 面积等于 8 时，得： $-t^2 + 6t = 8$ ，

解得： $t_1 = 2$ ， $t_2 = 4$ ，

\therefore 点 P 运动开始后第 2 秒或第 4 秒时， $\triangle PBQ$ 的面积等于 8cm^2 。

(2)

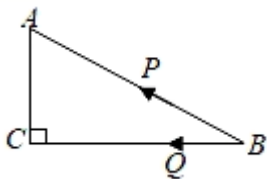
\therefore 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 12$ ，

$$\therefore S_{\text{矩形}ABCD} = 6 \times 12 = 72,$$

$$\therefore S = S_{\text{矩形}ABCD} - S_{\triangle PBQ} = t^2 - 6t + 72 (0 < t < 6).$$

【点睛】 本题考查一元二次方程的应用，矩形的性质，三角形的面积。解题关键是根据所设字母，表示相关线段的长度，再计算面积。

【变式 5.4】. (2022·浙江湖州·八年级阶段练习) 如图， $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 4\sqrt{3}\text{cm}$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ 。点 P 从点 B 出发，沿 $B \rightarrow A \rightarrow C$ 以每秒 3cm 的速度向终点 C 运动，同时点 Q 从点 B 出发以每秒 $\sqrt{3}\text{cm}$ 的速度向终点 C 运动，其中一点到达终点即停止。设点 P 的运动时间为 t 。



(1) 当 $t = 2$ 秒时，求 $\triangle BPQ$ 的面积；

(2) PQ 能否与 $\triangle ABC$ 的一条边平行，如果能，求出此时 t 的值；如不能，说明理由；

(3) $\triangle BPQ$ 的面积能否为 $\triangle ABC$ 面积的三分之一？如果能，请求出的值；如果不能，请说明理由。

【答案】 (1) $3\sqrt{3}\text{cm}^2$

(2) 不能，理由见解析

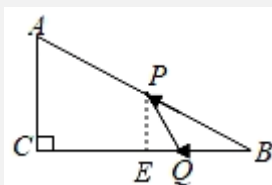
(3) 能， $t = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 或 $\frac{6+2\sqrt{5}}{3}$

【分析】 (1) 过点 P 作 $PE \perp BC$ 于 E ，由含 30° 度角的直角三角形的性质可求 PE 的长，即可求解；

(2) 分三种情况讨论，由平行线的判定可求解；

(3) 分两种情况讨论，由三角形的面积公式可求解。

(1) 解：如图，过点 P 作 $PE \perp BC$ 于 E ，



当 $t = 2$ 秒时， $PB = 6\text{cm}$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/276034012134010223>