

# 第6章 时变电磁场

6.1 法拉第电磁感应定理  $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$

6.2 位移电流和麦克斯韦第一方程

6.3 麦克斯韦方程组

6.4 电磁场的边界条件

6.5 电磁能量——坡印廷定理

6.6 波动方程

6.7 正弦电磁场

## 6.1 法拉第电磁感应定理

在人类对于电磁相互转换的认识上，法拉第起到了关键的作用。奥斯特首先发现电可转换为磁（即线圈可等效为磁铁），而法拉第坚信磁也可转换为电。经过长时间无数次的实验，1831年法拉第首次发现电磁感应现象。当穿过闭合导体回路的磁通量 $\Psi$ 发生变化时，回路中就会产生感应电流，这表明回路中感应了电动势，这就是法拉第电磁感应定律，可表示为

$$\varepsilon = -\frac{d\psi}{dt} \quad (6-1)$$

式中的负号表示感应电流产生的磁场总是阻碍原磁通  $\psi$  的变化。这里规定感应电动势的正方向和磁通正方向之间存在右手螺旋关系，如图6-1所示。🔥

式（6-1）表示任何时刻回路中感应电动势的大小和方向。感应电动势的方向也可以表述如下：感应电动势的方向总是企图阻止回路中磁通的变化。当穿过回路的磁通增大时，感应电动势的方向是将以它自己产生的电流引起的磁通来抵消原来的磁通；而当穿过回路的磁通减小时，感应电动势将以它自己产生的电流引起的磁通来补充原来的磁通。

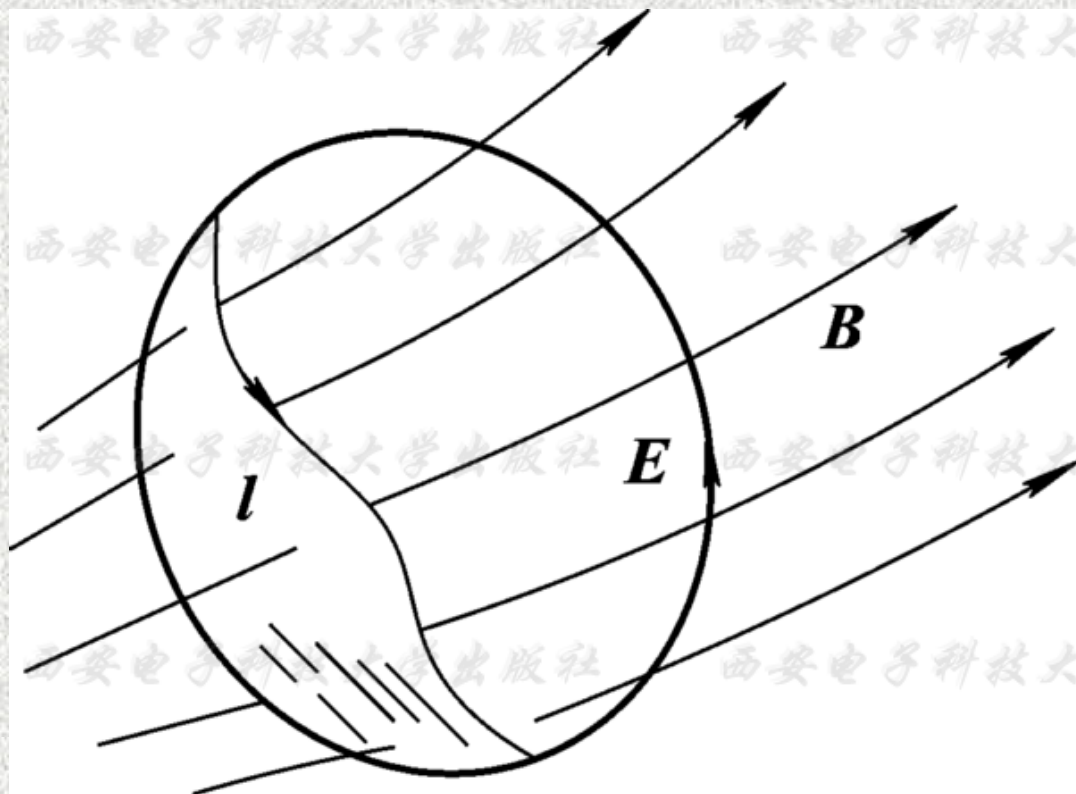


图6-1感应电动势的参考方向



因为导体回路上的电流是电场力推动电荷作定向运动而形成的，所以导体回路上有感应电流就表明空间有电场存在。可见，磁场的变化要在其周围空间激发电场。这种电场不同于静电场，不是由电荷激发的，通常称这种电场为感应电场。因此，闭合回路中的感应电动势又可用感应电场强度 $E$ 沿整个闭合回路的线积分来表示，即

$$\varepsilon = \oint_{\text{N}} E \cdot dl \quad (6-2)$$

式中 $E$ 是回路 $l$ 上线元 $dl$ 处的电场强度。

而穿过回路的磁通量为

$$\psi = \oint_s B \cdot dS \quad (6-3)$$

因而法拉第电磁感应定律式 (6-1) 可以写成

$$\oint_l E \cdot dl = - \frac{\partial}{\partial t} \oint_s B \cdot dS \quad (6-4)$$

式 (6-4) 为法拉第电磁感应定律的积分形式, 也称麦克斯韦第二方程的积分形式。

实验发现，感应电动势的大小与 $\Psi$ 随时间的变化率有关，而与引起 $\Psi$ 变化时的物理因素无关。因此，这个定律既适用于导体不动磁场变化的情形，也适用于导体运动而磁场不变的情形。分析引起回路磁通量 $\Psi$ 发生变化的情形不外乎下面三种：🔥

(1) 回路不变，磁场 $B$ 随时间变化。

因为

$$\psi = \int_S B \cdot dS$$

所以

$$\varepsilon = -\frac{d\psi}{dt} = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$$

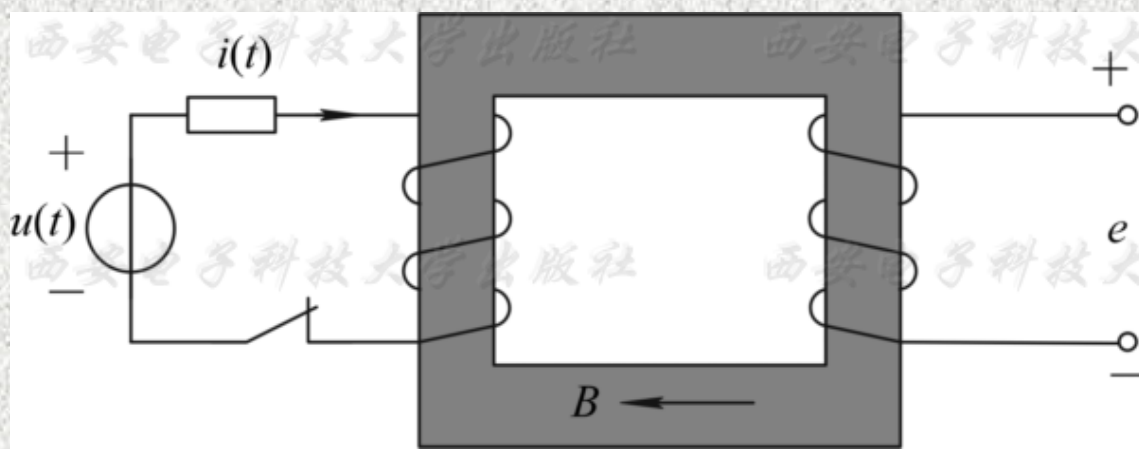


图6-2变压器工作原理图



(2) 磁场 $B$ 不随时间变化，而回路切割磁力线运动。

我们知道，当导体以速度 $v$ 在磁场中运动时，导体中的电荷以速度 $v$ 相对于磁场运动，因而受到一个磁场力（洛仑兹力），即

$$F = qv \times B \quad (6-5)$$

它与运动方向和磁场方向相垂直。电荷在磁场力作用下对导体发生相对运动，其结果是在导体的一端聚积正电荷，另一端聚积负电荷，说明在导体中出现了感应电场，即

$$E = \frac{F}{q} = v \times B \quad (6-6)$$

感应电场产生的感应电动势为

$$\varepsilon = \int_l E g dl = \int_l v \times B g dl \quad (6-7)$$

这样产生的感应电动势叫做动生电动势，这正是图6-3所示的发电机工作原理。

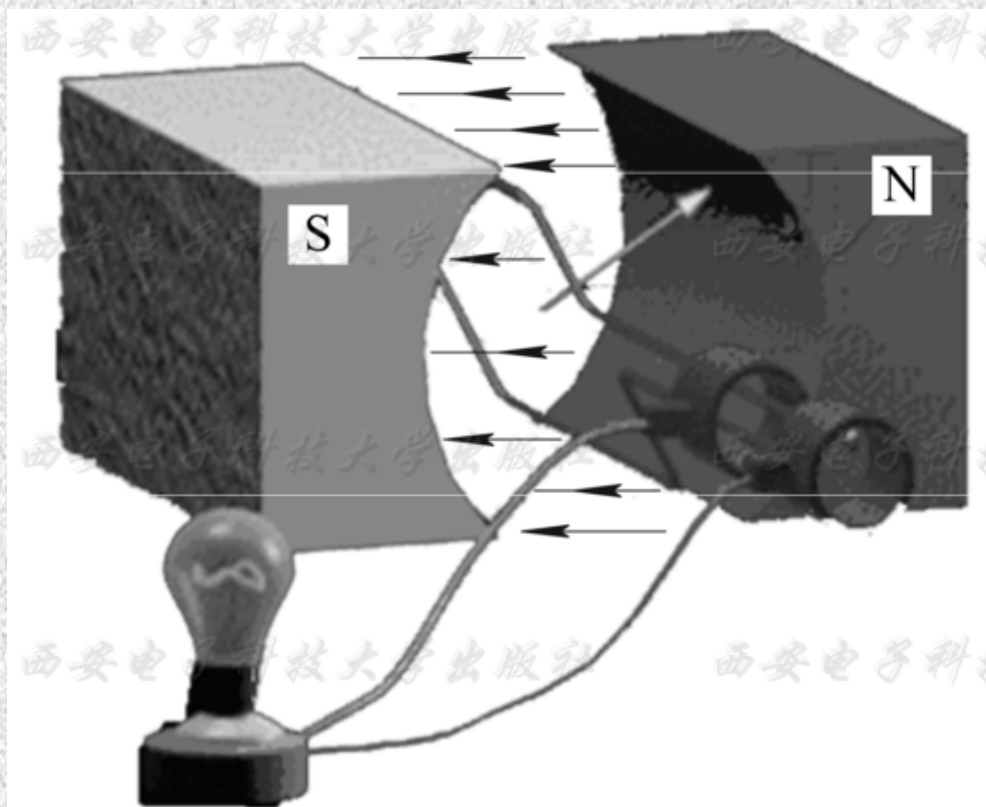


图6-3发电机工作原理图

(3) 磁场 $B$ 随时间变化，同时回路切割磁力线运动。这时的感应电动势是感生电动势和动生电动势的叠加，即

$$\varepsilon = \int_l E \cdot dl - \int_l v \times B \cdot dl - \iint_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad (6-8)$$

在理解电磁感应现象时，感应电动势是比感应电流更为本质的物理量。因此，电磁感应定律可以推广到任意媒质内的假想回路中，电磁波的发现完全证明了这一假设是正确的。🌿🌿



法拉第定律的微分形式可以直接由式(6-4)式导出, 即

$$\oint E \cdot dl = \iint_s \nabla \times E \cdot dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_s B \cdot dS \quad (6-9)$$

$$\iint_s \left( \nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} \right) \cdot dS = 0 \quad (6-10)$$

因为 $S$ 是任意的表面, 所以式(6-10)中被积函数必须等于零, 于是我们得到

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (6-11)$$



## 6.2 位移电流和麦克斯韦第一方程

感应电场的概念揭开了电场与磁场联系的一个方面——变化的磁场产生电场。在研究从库仑到法拉第等前人成果的基础上，深信电场、磁场有着密切关系且具有对称性的麦克斯韦，通过解决安培环路定律用于时变场时出现的矛盾，提出了位移电流的假说，揭示了电场与磁场联系的另一个方面——变化的电场产生磁场。🔥

已知恒定磁场中的安培环路定律

$$\nabla \times H = J \quad (6-12)$$

是在稳定情况下导出的，其中 $J$ 代表传导电流。对 $\nabla \times H = J$ 两端取散度，有

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot J$$

因为 $\nabla \cdot (\nabla \times H) = 0$

所以 
$$\nabla \cdot J = 0 \quad (6-13)$$

但是在时变场中，根据电荷守恒定律应有

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (6-14)$$

比较式（6-13）式与式（6-14），可见安培环路定律与电荷守恒定律出现了矛盾。

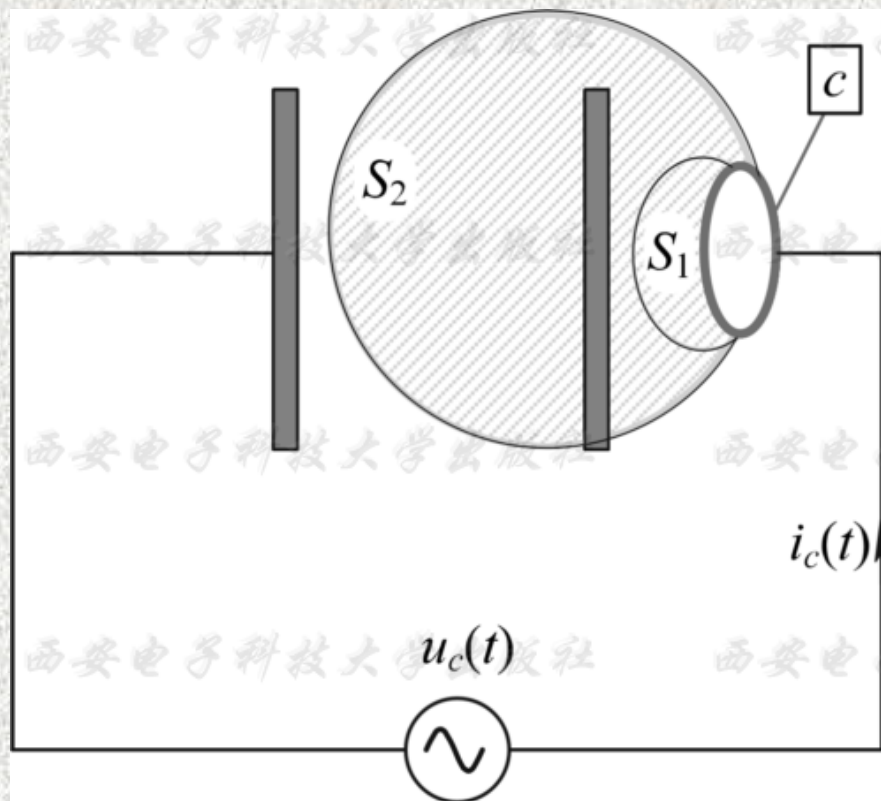


图6-4平板电容器



如图6-4所示，作闭合曲线 $c$ 与回路铰链，由式（6-12）安培环路定理，经过 $S_1$ 面时， $\oint H \cdot dl = i_c$ 。而经过 $S_2$ 面时，由于没有电流流过，则 $\oint_c H \cdot dl = 0$ 。显然，结果出现了矛盾。

上述矛盾导致麦克斯韦断言：电容器中必有电流存在。由于该电流不能由传导产生，麦克斯韦称其为“位移电流”。电荷守恒定律是大量实验总结的普遍规律，而安培环路定律则是根据稳恒电流的实验定律导出的特殊规律。为此，麦克斯韦在安培定理中加入一项，以保证它对时变场也是正确的。我们可由高斯定理和电荷守恒定理得出此项。

假设静电场中的高斯定理  $\nabla \cdot D = \rho$  仍然成立并把它代入电荷守恒定律公式, 得

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot D = -\nabla \cdot \frac{\partial D}{\partial t}$$

或

$$\nabla \cdot \left( J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0 \quad (6-15)$$

式 (6-15) 称为全电流连续方程, 其中  $\frac{\partial D}{\partial t}$  是电位移矢量随时间的变化率, 它的单位是安培/米<sup>2</sup> ( $\text{A/m}^2 = (\text{F/m}) \cdot (\text{V/m}) \cdot (1/\text{s}) = \text{C}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ ), 与电流密度的单位一致, 因此称为位移电流密度, 记为

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (6-16)$$

在介质中，由于

$$D = \varepsilon_0 E + P$$

因此位移电流密度为

$$J_d = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} \quad (6-17)$$

式(6-17)说明，在介质中位移电流由两部分构成，一部分是由随时间变化的电场引起的，它在真空中同样存在，它并不代表任何形式的电荷运动，只是在产生磁效应方面和一般意义下的电流等效。另一部分是由于极化强度的变化引起的，称为极化电流，它代表束缚于原子中的电荷运动。



位移电流的引入推广了电流的概念。平常所说的电流是电荷作有规则的运动形成的，在导体中，它就是自由电子定向运动形成的传导电流，设导体的电导率为 $\sigma$ ，其传导电流密度 $J_c = \sigma E$ ；在真空或气体中，带电粒子的定向运动也形成电流，称为运流电流，设电荷运动速度为 $v$ ，其运流电流密度 $J_v = \rho v$ 。位移电流并不代表电荷的运动，它与传导电流和运流电流不同。传导电流、运流电流以及位移电流之和称为全电流，即

$$J_{total} = J_c + J_v + J_d \quad (6-18)$$

式(6-15)中的 $J = J_c + J_v$ ，其中 $J_c$ 和 $J_v$ 分别存于不同媒质中。固体导电媒质 $\sigma \neq 0$ ，只有传导电流 $J_c$ ，没有运流电流 $J_v = 0$ 。



式(6-15)比式(6-13)增加了一项位移电流密度,从而解除了图6-4中电流不连续的困扰。事实上,在传导电流 $i_c$ 流进封闭曲面 $S_2$ 的时刻,电容器极板被充电,电介质中的电位移矢量增大,产生位移电流,即

$$i_d = \oint_{S_2} \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS$$

$i_d$ 流出该封闭曲面,形成全电流的连续。

于是麦克斯韦把安培环路定律修改为

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (6-19)$$

对式 (6-19) 应用斯托克斯 (Stokes) 定理, 得到全安培环路定理的积分形式:

$$\oint_{\epsilon} H \cdot dl = \iint_s \left( J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS \quad (6-20)$$

静态场可看成  $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$  的特例。此时, 式 (6-19) 退化为  $\nabla \times H = J$ 。这样, 全安培环路定理就具有普遍的意义, 而且在时变电磁场中, 高斯定律

$$\nabla \cdot D = \rho$$

不必作任何改动, 也不会发生新的矛盾。❖

如果  $J=0$ , 则式 (6-19) 简化为

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

【例6-1】如图6-5所示，已知平板电容器面积为 $S$ ，相距为 $d$ ，介电常数为 $\varepsilon$ ，极板间电压 $u_c = V_0 \sin \omega t$ ，求：❖

- (1) 位移电流 $i_d$ 和传导电流 $i_c$ 。❖
- (2) 求距离导线 $r$ 处的磁场强度。

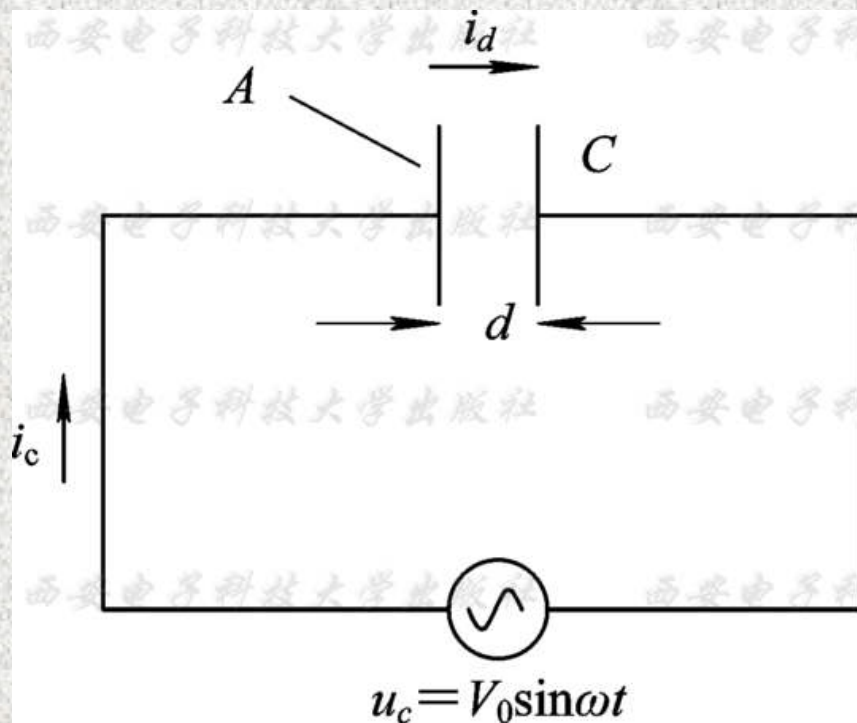


图6-5 例6-1用图

解 (1) 假设电压  $u_c$  在两极板间的介质中建立的电场强度均匀分布, 忽略边缘效应, 则有

$$E = \frac{u_c}{d}$$

$$D = \varepsilon E = \varepsilon \frac{V_o}{d} \sin \omega t$$

位移电流为

$$i_d = \int_A \frac{\partial D}{\partial t} \cdot ds = \varepsilon \frac{V_o}{d} \omega \cos \omega t \times A = \frac{\varepsilon A}{d} V_o \omega \cos \omega t$$

根据已知条件, 平板电容器电容为

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$



导线中的传导电流为

$$i_c = C \frac{dv_e}{dt} = CV_o \omega \cos \omega t = \frac{\epsilon A}{d} V_o \omega \cos \omega t$$

比较可知： $i_d = i_c$ 。

(2) 距离导线 $r$ 处的磁场强度可利用安培环路定理求出。参见图6-4，做围线 $c$ ，但是以 $c$ 为边缘的开曲面有两种，一种是曲面 $S_1$ ，另一种是通过电介质区域的曲面 $S_2$ 。不论哪一种，都满足

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_s \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = i_c + i_d$$

由于导线本身的对称性，磁场只有 $H_\phi$ 分量，因此方程左边为

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H_\phi$$

对于面 $S_1$ ，方程右边只有第一项不等于零。因为沿导线没有电荷积累， $D=0$ ，所以第二项等于零，即

$$\iint_s J \cdot ds = i_c = CV_o \omega \cos \omega t$$

对于曲面 $S_2$ ，由于穿过电介质，不可能有传导电流流过，因此 $i_c=0$ 。如果没有位移电流，则方程右边等于零，出现与前者相矛盾的情形。但是因为麦克斯韦引入位移电流，上述矛盾迎刃而解，正如（1）中已经证明的那样 $i_d=i_c$ ，所以，无论取 $S_1$ 面还是 $S_2$ 面，结果都是相同的：

$$H_\varphi = \frac{CV_o \omega \cos \omega t}{2\pi r}$$

【例6-2】已知自由空间的磁场强度为 $H=H_0\sin\theta e_y(\text{A/m})$ ，此处 $\theta=\omega t-\beta z$ ， $\beta$ 为常数。求：(1)位移电流密度；(2)电场强度。

解 自由空间的传导电流密度为零。这样由式(6-17)，位移电流密度等于 $\nabla\times H$ ，亦即

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial t} &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_0 \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial D}{\partial t} [H_0 \sin \theta] + \frac{\partial}{\partial x} [H_0 \sin \theta] e_z \\ &= \beta H_0 \cos \theta e_x (\text{A/m}^2)\end{aligned}$$

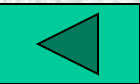


这样，位移电流密度的幅值为  $\beta H_0(\text{A}/\text{m}^2)$ 。将位移电流密度对时间积分，即得电通密度为

$$D = \frac{\beta}{\omega} H_0 \sin \theta e_x (\text{C} / \text{m}^2)$$

最后，自由空间的电场强度为

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0} H_0 \sin \theta e_x (\text{V} / \text{m})$$



## 6.3 麦克斯韦方程组

前面已经得到了麦克斯韦第一、第二方程。再将静态场中的高斯定理以及磁通连续性原理推广应用到时变场中，就得到麦克斯韦方程组的微分形式，即

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (6-21a)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (6-21b)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (6-21c)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (6-21d)$$

方程组的积分形式为

$$\oint_{l} H \cdot dl = \iint_{s} \left( J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot ds \quad (6-22a)$$

$$\oint_{l} E \cdot dl = - \iint_{s} \frac{\partial B \cdot ds}{\partial t} \quad (6-22b)$$

$$\oiint_{s} B \cdot ds = 0 \quad (6-22c)$$

$$\oiint_{s} D \cdot ds = q \quad (6-22d)$$

### 6.3.1 麦克斯韦方程组中的独立方程与非独立方程 $\psi$

麦克斯韦方程组的四个方程并不完全独立，其中两个旋度方程以及电流连续性方程是独立方程，即

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (6-23a)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (6-23b)$$

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (6-23c)$$



由这三个独立方程可以导出麦克斯韦方程组中的两个散度方程。对式（6-23a）两边取散度运算：

$$\nabla \cdot (\nabla \times H) = \nabla \cdot \left( J + \frac{\partial D}{\partial t} \right)$$

由于  $\nabla \cdot (\nabla \times H) = 0$ ，考虑到电流连续性方程  $\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ，可得到

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot D - \rho) = 0$$

因此  $\nabla \cdot D = \rho$ ，即为式（6-21d）

因此两个旋度方程及电流连续性方程是独立方程，两个散度方程是非独立方程。但是，这两个散度方程并不是多余的。根据亥姆霍兹定理，一个在无穷远处趋于零的矢量场是由它的散度和旋度共同唯一确定的。这里需要说明的是，独立方程与非独立方程的区分不是绝对的，但是麦克斯韦方程组四个方程中只有三个是独立的，可组成七个标量方程。这七个标量方程中共有五个未知矢量（ $E$ 、 $D$ 、 $B$ 、 $H$ 和 $J$ ）和一个未知标量  $\rho$ ，共16个未知标量。要确定这16个未知量还必须补充另外9个独立的标量方程。这9个独立的方程就是 $D$ 与 $E$ ， $B$ 和 $H$ 以及 $J$ 与 $E$ 之间的关系式，这些关系式又被称为介质电磁性质的本构关系式或麦克斯韦方程组的辅助方程，它们描述的是媒质的存在对电磁场的影响。

一般而言，表征媒质宏观电磁特性的本构关系为

$$D = \varepsilon_0 E + P \quad (6-24a)$$

$$B = \mu_0 (H + M) \quad (6-24b)$$

$$J = \sigma E \quad (6-24c)$$

对于各向同性的线性媒质，则有

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E = \varepsilon E \quad (6-25a)$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu H \quad (6-25b)$$

$$J = \sigma E \quad (6-25c)$$

### 6.3.2 麦克斯韦方程组的限定形式与非限定形式 $\Psi$

麦克斯韦方程组适用于任何媒质，不受限制，因此称做麦克斯韦方程组的非限定形式。  $\Psi$

利用媒质的本构关系可消去非限定形式中的  $D$ 、 $B$ 、 $J$ ，此时麦克斯韦方程组可用  $E$ 、 $H$  两个矢量表示：

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} (\epsilon E) + \sigma E \quad (6-26a)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu H) \quad (6-26b)$$

$$\nabla \cdot \mu H = 0 \quad (6-26c)$$

$$\nabla \cdot \epsilon E = \rho \quad (6-26d)$$



### 6.3.3 麦克斯韦方程组的物理意义 $\psi$

麦克斯韦方程组是麦克斯韦继承和发展了前人在电磁学方面的实践和理论于1864年提出的，麦克斯韦方程组是宏观电磁现象基本规律的高度概括和完整总结，它是分析各种经典问题的出发点。第一方程称为全电流安培环路定律，表明传导电流和时变的电场都能激发磁场，它们是磁场的涡旋源；第二方程称为法拉第电磁感应定律，表明时变的磁场可以激发电场，它是感应电场的涡旋源；第三方程称为磁通连续性原理，表明磁场是无源的，不存在“磁荷”，磁力线总是闭合的；第四方程称为高斯定理，表明电荷是电场的通量源，电荷以发散的形式产生电场（变化的磁场以涡旋的形式产生电场）。仔细观察麦克斯韦方程组，其蕴含了以下深刻的物理意义：

(1) 第一、第二方程左边的物理量为磁(或电)，而右边的物理量为电(或磁)。这中间的等号深刻揭示了电与磁的相互转化，相互依赖，相互对立，共存于统一的电磁波中，见图6-6。正是由于电不断转换为磁，而磁又不断转化为电，才会发生能量交换和储存。

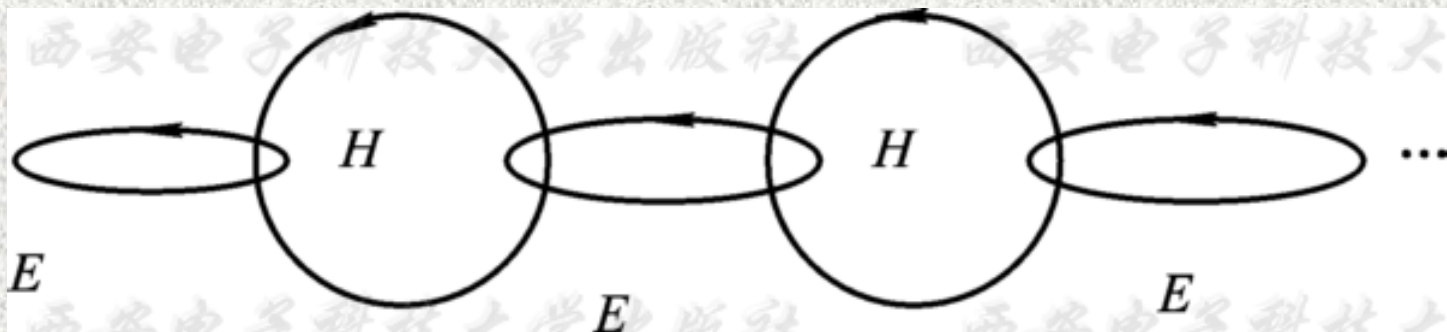


图6-6电磁转换

人类对于电磁的相互转化在认识上走了很多弯路。奥斯特首先发现电可转化为磁(即线圈等效为磁铁)，而法拉第坚信磁也可以转化为电，但是无数次实验均以失败而告终。在10年后的一次实验中，无意间把磁铁一拔，奇迹出现了，连接线圈的电流计指针出现了晃动。这一实验不仅证实了电磁转换，而且明确了只有动磁才能转换为电。然而电磁转换只是为电磁波的出现提供了必要条件，例如图6-7所示电磁振荡也是典型的电磁转换，但却没有引起波动。



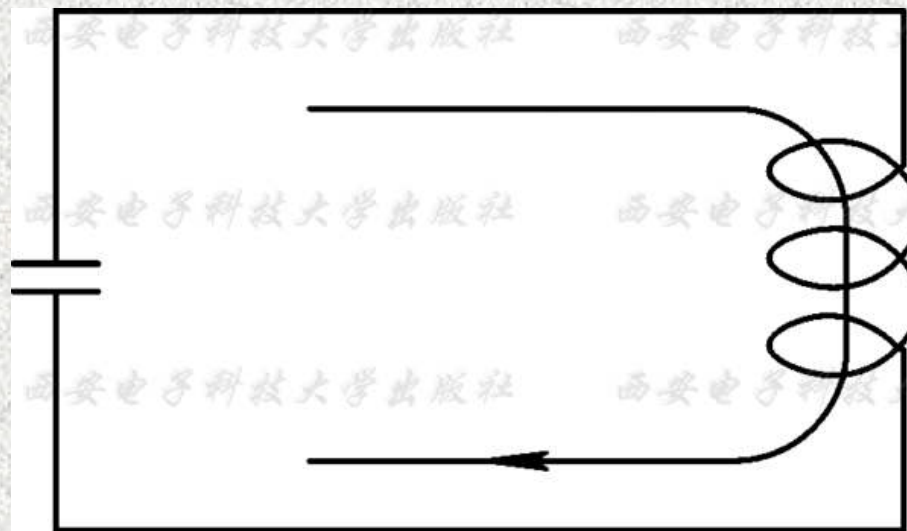



图6-7电磁振荡

(2)从物理学角度来讲，运算反映一种作用(Action)。进一步研究麦克斯韦方程两边的运算，方程的左边是空间的运算(旋度)；方程的右边是时间的运算(导数)，中间用等号连接。它深刻揭示了电(或磁)场任一地点的变化会转化成磁(或电)场时间的变化；反过来，场的时间变化也会转化成地点变化，构成时空变换的四维空间。正是这种空间和时间的相互变化构成了波动的外在形式。用通俗的一句话来说，即一个地点出现过的事物，过了一段时间又在另一地点出现了。

(3) 写出麦克斯韦第一、第二方程的时谐表达式

$$\nabla \times H = J + j\omega D$$

$$\nabla \times E = -j\omega B$$

表明电磁转化有一个重要条件，即频率  $\omega$ 。直流情况则没有转换。 

(4) 麦克斯韦方程表明：不仅电荷和电流能激发电磁场，而且变化着的电场和磁场可以互相激发。因此，在某处只要发生电磁扰动，由于电磁场互相激发，就会在紧邻的地方激发起电磁场，在这些地方形成新的电磁扰动，新的扰动又在更远一些地方激发起电磁场，如此继续下去，形成电磁波的运动。由此可见，电磁扰动的传播是不依赖于电荷、电流而独立进行的。





## 6.4 电磁场的边界条件

### 6.4.1 场矢量 $D$ 和 $B$ 的法向分量的边界条件

先推导 $D$ 的法向分量的边界条件。为此，在分界面上取一扁平圆柱面高斯盒，如图6-8所示。圆柱面的高度为 $\Delta h$ ，上、下底面的面积为 $\Delta S$ ，且很小，以致可认为每一底面上的场是均匀的。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/276055035115011010>