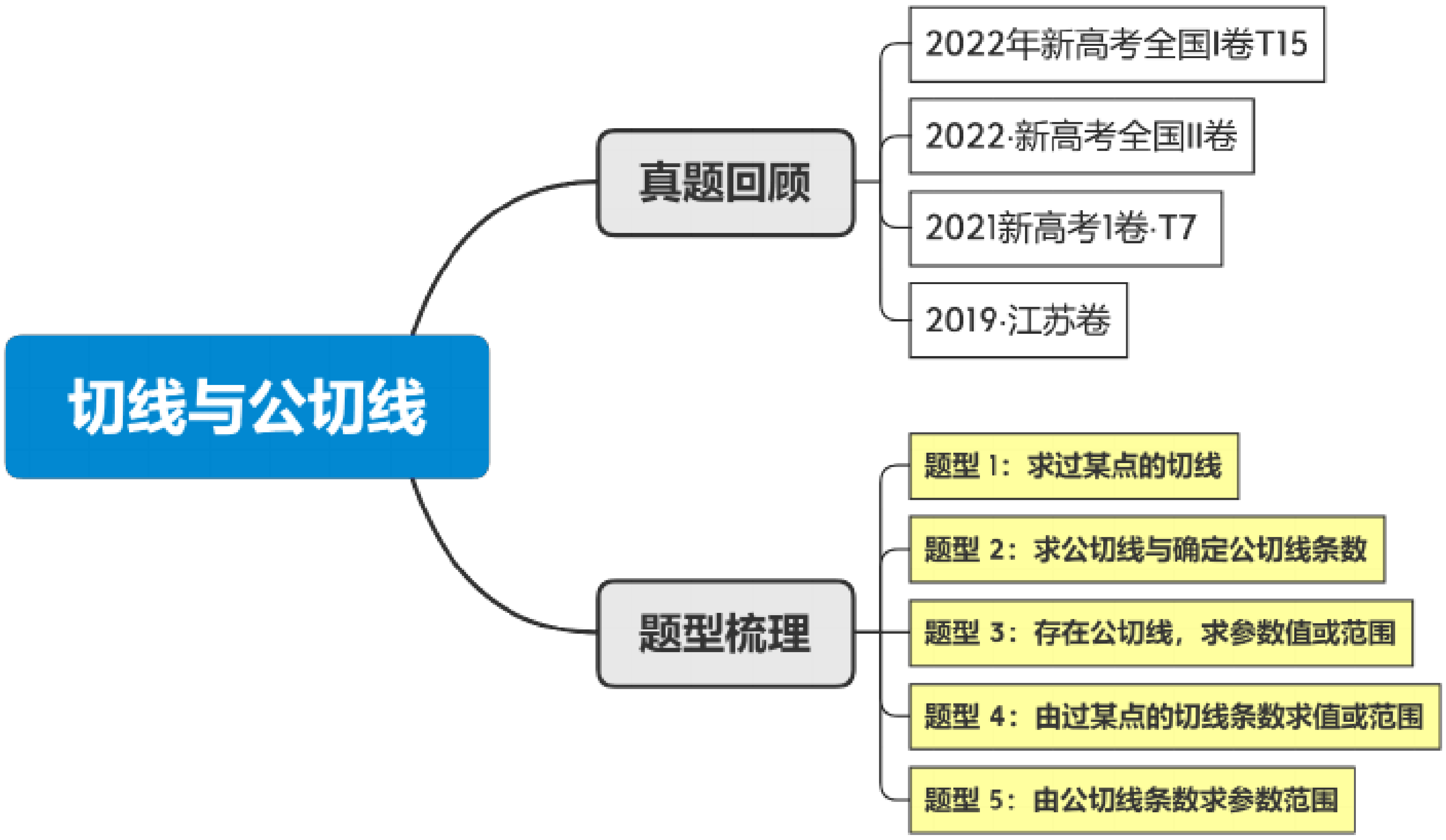
专题 1-4　切线与公切线

思维导图



目录

知识点•梳理

易混淆知识点补充：

直线与曲线公共点的个数不是切线的本质，直线与曲线只有一个公共点，直线不一定是曲线的切线，同样，直线是曲线的切线，则直线与曲线可能有两个或两个以上的公共点.

过一点 $A(m,n)$ 的切线方程

①设切点为 $P(x_0, y_0)$，则斜率 $k=f'(x_0)$

②利用切点和斜率写出切线方程为：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，

③又因为切线方程过点 $A(m,n)$，点入切线得 $n-y_0=f'(x_0)(m-x_0)$ 然后解出 x_0 的值.（x_0 有几个值，就有几条切线）

注意：在做此类题目时要分清题目是在点P 处（P 为切点），还是过点P 的切线（P 不一定为切点）

求公切线方程

已知其中一曲线上的切点，利用导数几何意义求切线斜率，进而求出另一曲线上的切点；不知切点坐标，则应假设两切点坐标，通过建立切点坐标间的关系式，解方程

具体做法为：设公切线在 $y=f(x)$ 上的切点 $P_1(x_1, f(x_1))$，在 $y=g(x)$ 上的切点 $P_2(x_2, g(x_2))$，

则 $f'(x_1)=g'(x_2)=\dfrac{f(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

由公切线求参数的值或范围问题

由公切线求参数的值或范围问题，其关键是列出函数的导数等于切线斜率的方程.

高考真题梳理

高考真题•回顾

2022 年新高考全国 I 卷 T15——已知过某点的切线条数求参

1．若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是______________.

2022·新高考全国 II卷——求过原点的切线

2. 曲线$y = \ln|x|$过坐标原点的两条切线的方程为__________，__________.

2021 新高考 1 卷·7——已知过某点的切线条数，求参数间的关系

3. 若过点(a,b)可以作曲线$y = e^x$的两条切线，则（ ）

A．e^b a　　　　B．e^a b

C．0 a e^b　　　　D．0 b e^a

2019·江苏卷——已知切线过某点，求切点

4. 在平面直角坐标系xOy中，点A在曲线$y=\ln x$上，且该曲线在点A处的切线经过点（$-e$，-1）(e为自然对数的底数)，则点A的坐标是____.

重点题型·归类精讲

题型一　求过某点的切线

1. 已知直线$y = kx$是曲线$y = e^x$的切线，则实数k的值为__________.

题型二　求公切线与确定公切线条数

浙江绍兴二模 T15

2. 与曲线$y = e^x$和$y = \frac{x^2}{4}$都相切的直线方程为__________.

浙江嘉兴二模 T15

3. 已知直线l与曲线$C_1: y = x^2$和$C_2: y = \frac{1}{x}$均相切，则该直线与两坐标轴围成的三角形的面积为____________.

2023届广东省燕博园高三下综合能力测试T16

4．曲线$y=e^x$与$y=\ln x$的公共切线的条数为________．

题型三　存在公切线，求参数值或范围

广东省汕头市2022-2023学年高二下期末

5．已知直线$y=ax+b(a\in R,b>0)$是曲线$f(x)=e^x$与曲线$g(x)=\ln x+2$的公切线，则$a+b$的值为__________.

2023福建厦门•5月适应性考试T16

6．已知函数$f(x)=mx+\ln x, g(x)=x^2-mx$，若曲线$y=f(x)$与曲线$y=g(x)$存在公切线，则实数$m$的最大值为__________.

长沙雅礼中学2022届月考（六）T16

7．已知函数$f(x)=2\ln x$，$g(x)=ax^2-x-\frac{1}{2}(a>0)$，若直线$y=2x-b$与函数$y=f(x)$，$y=g(x)$的图象均相切，则$a$的值为________；若总存在直线与函数$y=f(x)$，$y=g(x)$图象均相切，则$a$的取值范围是________

2024届•江苏省南通，连云港质量调研(一)——以公切线为背景的指数对数计算求值问题

8．已知直线l分别与曲线$f(x)=\ln x, g(x)=e^x$相切于点$(x_1,\ln x_1)$，(x_2,e^{x_2})，则$\frac{1}{x_1}-\frac{2}{x_2-1}$的值为__________.

题型四　由过某点的切线条数求值或范围

2024届广东省六校高三第一次联考T8

9．已知函数$f(x)=-x^3+2x^2-x$，若过点$P(1,t)$可作曲线$y=f(x)$的三条切线，则t的取值范围是（　　）

A． $(0,\frac{1}{30})$　　B． $(0,\frac{1}{29})$　　C． $(0,\frac{1}{28})$　　D． $(0,\frac{1}{27})$

2024 届 •广州中山大学附属中学校考

10．过点 $(3,0)$ 作曲线 $f(x)=xe^x$ 的两条切线，切点分别为 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，则 $x_1+x_2=$（　）

A． 3　B． $\sqrt{3}$　C． $\sqrt{3}$　D．3

广东省深圳市 2022-2023 学年高二下期末 T8

11．已知点 A 在直线 $x=2$ 上运动，若过点 A 恰有三条不同的直线与曲线 $y=x^3\quad x$ 相切，则点 A 的轨迹长度为（　）

A．2　B．4　C．6　D．8

2023 届 • 深圳高级中学高三上学期期中 T7

12．若曲线 $f(x)=\frac{x}{e^x}$ 有三条过点 $(0,a)$ 的切线，则实数 a 的取值范围为（　）

A． $0,\frac{1}{e^2}$　　B． $0,\frac{4}{e^2}$　　C． $0,\frac{1}{e}$　　D． $0,\frac{4}{e}$

安徽省合肥市 2022-2023 学年高三上期末联考

13．已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$，过点 $(0,m)$ 有两条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，则实数 m 的取值范围是_______.

14．（多选）已知函数 $f(x)=\quad x^3+2x^2\quad 3x$，若过点 $P(2,m)(m\quad Z)$ 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，则 m 的值可以为（　）

A．3　　B．4　　C．21　　D．22

15．（多选）已知函数 $f(x)=x^3\quad mx$，若过点 $P(1,1)$ 恰能作 3 条曲线 $y=f(x)$ 的切线，则 m 的值可以为（　）

A． $\frac{3}{4}$　B． $\frac{4}{3}$　C． $\frac{5}{3}$　D． $\frac{3}{5}$

16．若过点 $(a,b)(a\quad 0)$ 可以作曲线 $y=x^3\quad 3x$ 的三条切线，则（ ）

A．$b\quad 3a$　　B．$3a\quad b\quad a^3\quad 3a$

C． $b \quad a^3 \quad 3a$　　　　D． $b = \quad 3a$ 或 $b = a^3 \quad 3a$

题型五　由公切线条数求参数范围

2023 广东深圳·统考一模 T8

17．已知函数 $f(x) = 2 + \ln x$， $g(x) = a\sqrt{x}$，若总存在两条不同的直线与函数 $y = f(x)$， $y = g(x)$ 图象均相切，则实数 a 的取值范围为（　）

A． $(0,1)$　　B． $(0,2)$　　C． $(1,2)$　　D． $(1,e)$

18．若曲线 $C_1 : y = x^3$ 与曲线 $C_2 : y = ae^x (a \quad 0)$ 存在 2 条公共切线，则 a 的值是________．

目录

知识点·梳理

易混淆知识点补充：

直线与曲线公共点的个数不是切线的本质，直线与曲线只有一个公共点，直线不一定是曲线的切线，同样，直线是曲线的切线，则直线与曲线可能有两个或两个以上的公共点.

过一点 $A\left(m,n\right)$ 的切线方程

①设切点为 $P(x_0, y_0)$，则斜率 $k = f (x_0)$

②利用切点和斜率写出切线方程为：$y \quad y_0 = f (x_0)(x \quad x_0)$，

③又因为切线方程过点 $A(m, n)$，点入切线得 $n \quad y_0 = f (x_0)(m \quad x_0)$ 然后解出 x_0 的值.（x_0 有几个值，就有几条切线）

注意：在做此类题目时要分清题目是在点 P 处（P 为切点），还是过点 P 的切线（P 不一定为切点）

求公切线方程

已知其中一曲线上的切点，利用导数几何意义求切线斜率，进而求出另一曲线上的切点；不知切点坐标，则应假设两切点坐标，通过建立切点坐标间的关系式，解方程

具体做法为：设公切线在 $y=f(x)$ 上的切点 $P_1(x_1, f(x_1))$，在 $y=g(x)$ 上的切点 $P_2(x_2, g(x_2))$，

则 $f (x_1)=g (x_2)=\dfrac{f(x_1) \quad g(x_2)}{x_1 \quad x_2}$

由公切线求参数的值或范围问题

由公切线求参数的值或范围问题，其关键是列出函数的导数等于切线斜率的方程.

高考真题·回顾

高考真题梳理

2022 年新高考全国 I 卷 T15——已知过某点的切线条数求参

1．若曲线 $y = (x + a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是____________.

【答案】$\left(\quad , \ 4\right) \cup \left(0, + \quad \right)$

【分析】设出切点横坐标 x_0，利用导数的几何意义求得切线方程，根据切线经过原点得到关于 x_0 的方程，根据此方程应有两个不同的实数根，求得 a 的取值范围．

【详解】∵ $y=(x+a)e^x$，∴ $y=(x+1+a)e^x$，

设切点为 (x_0,y_0),则 $y_0=(x_0+a)e^{x_0}$,切线斜率 $k=(x_0+1+a)e^{x_0}$,

切线方程为：$y\quad(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(x\quad x_0)$,

∵切线过原点，∴ $(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(\quad x_0)$,

整理得：$x_0^2+ax_0\quad a=0$,

∵切线有两条，∴ $\quad=a^2+4a\quad 0$,解得 $a<-4$ 或 $a\quad 0$,

∴ a 的取值范围是 $(\quad,\quad 4)\cup(0,+\quad)$

2022·新高考全国 II 卷——求过原点的切线

2．曲线 $y=\ln|x|$ 过坐标原点的两条切线的方程为__________，__________．

【答案】 $y=\frac{1}{e}x$ $y=\quad\frac{1}{e}x$

【分析】分 $x\quad 0$ 和 $x\quad 0$ 两种情况，当 $x\quad 0$ 时设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，求出函数的导函数，即可求出切线的斜率，从而表示出切线方程，再根据切线过坐标原点求出 x_0，即可求出切线方程，当 $x\quad 0$ 时同理可得；

【详解】[方法一]：化为分段函数，分段求

分 $x\quad 0$ 和 $x\quad 0$ 两种情况，当 $x\quad 0$ 时设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，求出函数的导函数，即可求出切线的斜率，从而表示出切线方程，再根据切线过坐标原点求出 x_0，即可求出切线方程，当 $x\quad 0$ 时同理可得；

解： 因为 $y=\ln|x|$，

当 $x\quad 0$ 时 $y=\ln x$，设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，由 $y=\frac{1}{x}$，所以 $y|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以切线方程为 $y\quad \ln x_0=\frac{1}{x_0}(x\quad x_0)$，

又切线过坐标原点，所以 $\ln x_0=\frac{1}{x_0}(\quad x_0)$，解得 $x_0=e$，所以切线方程为 $y\quad 1=\frac{1}{e}(x\quad e)$，即 $y=\frac{1}{e}x$；

当 $x\quad 0$ 时 $y=\ln(\quad x)$，设切点为 $(x_1,\ln(\quad x_1))$，由 $y=\frac{1}{x}$，所以 $y|_{x=x_1}=\frac{1}{x_1}$，所以切线方程为

$y\quad \ln(\quad x_1)=\frac{1}{x_1}(x\quad x_1)$，

又切线过坐标原点，所以 $\ln(\quad x_1)=\frac{1}{x_1}(\quad x_1)$，解得 $x_1=\quad e$，所以切线方程为 $y\quad 1=\frac{1}{e}(x+e)$，即 $y=\quad\frac{1}{e}x$；

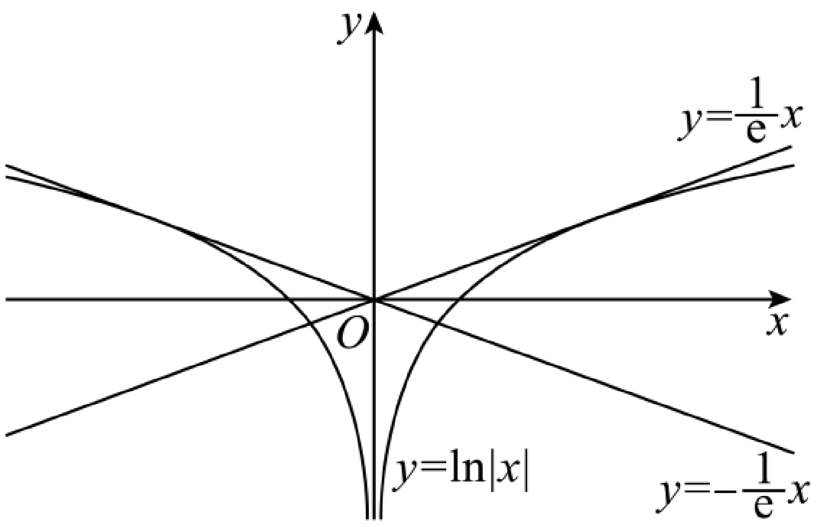
故答案为：$y=\frac{1}{e}x$；$y=\quad\frac{1}{e}x$

[方法二]：根据函数的对称性，数形结合

当 $x\quad 0$ 时 $y=\ln x$，设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，由 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以切线方程为 $y\quad \ln x_0=\frac{1}{x_0}(x\quad x_0)$，

又切线过坐标原点，所以 $\ln x_0=\frac{1}{x_0}(\quad x_0)$，解得 $x_0=e$，所以切线方程为 $y\quad 1=\frac{1}{e}(x\quad e)$，即 $y=\frac{1}{e}x$；

因为 $y=\ln|x|$ 是偶函数，图象为：



所以当 $x\quad 0$ 时的切线，只需找到 $y=\frac{1}{e}x$ 关于 y 轴的对称直线 $y=\quad\frac{1}{e}x$ 即可.

[方法三]：

因为 $y=\ln|x|$，

当 $x\quad 0$ 时 $y=\ln x$，设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，由 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $y'|_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以切线方程为 $y\quad \ln x_0=\frac{1}{x_0}(x\quad x_0)$，

又切线过坐标原点，所以 $\ln x_0=\frac{1}{x_0}(\quad x_0)$，解得 $x_0=e$，所以切线方程为 $y\quad 1=\frac{1}{e}(x\quad e)$，即 $y=\frac{1}{e}x$；

当 $x\quad 0$ 时 $y=\ln(\quad x)$，设切点为 $(x_1,\ln(\quad x_1))$，由 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $y'|_{x=x_1}=\frac{1}{x_1}$，所以切线方程为 $y\quad \ln(\quad x_1)=\frac{1}{x_1}(x\quad x_1)$，

又切线过坐标原点，所以 $\ln(\quad x_1)=\frac{1}{x_1}(\quad x_1)$，解得 $x_1=\quad e$，所以切线方程为 $y\quad 1=\frac{1}{\quad e}(x+e)$，即 $y=\quad\frac{1}{e}x$；

故答案为：$y=\frac{1}{e}x$；$y=\quad\frac{1}{e}x$.

2021 新高考 1 卷·7——已知过某点的切线条数，求参数间的关系

3．若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=e^x$ 的两条切线，则（ ）

A．$e^b\quad a$　　　　B．$e^a\quad b$

C．$0\quad a\quad e^b$　　　　D．$0\quad b\quad e^a$

【答案】D

【分析】解法一：根据导数几何意义求得切线方程，再构造函数，利用导数研究函数图象，结合图形确定

结果；

解法二：画出曲线 $y=e^x$ 的图象，根据直观即可判定点 (a,b) 在曲线下方和 x 轴上方时才可以作出两条切线.

【详解】在曲线 $y=e^x$ 上任取一点 $P(t,e^t)$，对函数 $y=e^x$ 求导得 $y'=e^x$，

所以，曲线 $y=e^x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-e^t=e^t(x-t)$，即 $y=e^tx+(1-t)e^t$，

由题意可知，点 (a,b) 在直线 $y=e^tx+(1-t)e^t$ 上，可得 $b=ae^t+(1-t)e^t=(a+1-t)e^t$，

令 $f(t)=(a+1-t)e^t$，则 $f'(t)=(a-t)e^t$.

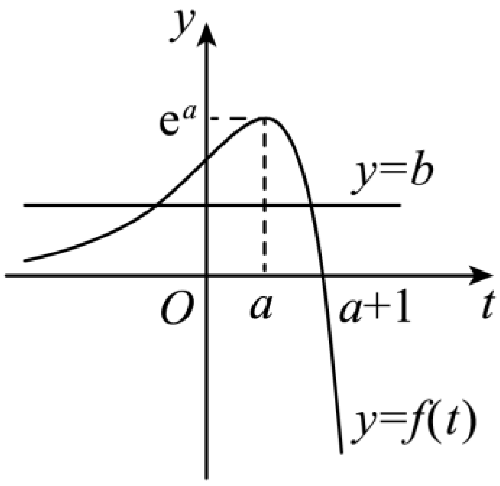
当 $t<a$ 时，$f'(t)>0$，此时函数 $f(t)$ 单调递增，

当 $t>a$ 时，$f'(t)<0$，此时函数 $f(t)$ 单调递减，

所以，$f(t)_{max}=f(a)=e^a$，

由题意可知，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图象有两个交点，则 $b<f(t)_{max}=e^a$，

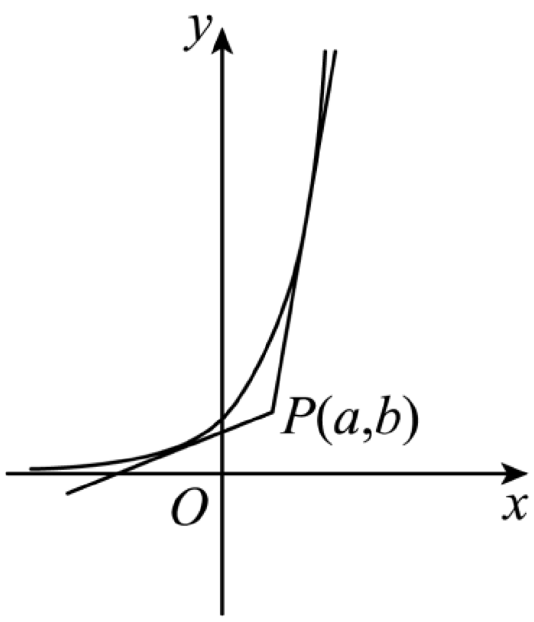
当 $t<a+1$ 时，$f(t)>0$，当 $t>a+1$ 时，$f(t)<0$，作出函数 $f(t)$ 的图象如下图所示：



由图可知，当 $0<b<e^a$ 时，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图象有两个交点.

故选：D.

解法二：画出函数曲线 $y=e^x$ 的图象如图所示，根据直观即可判定点 (a,b) 在曲线下方和 x 轴上方时才可以作出两条切线.由此可知 $0<b<e^a$.



2019·江苏卷——已知切线过某点，求切点

4．在平面直角坐标系Oy中，点A在曲线y=lnx上，且该曲线在点A处的切线经过点（-e，-1）(e为自然对

数的底数），则点 A 的坐标是____ .

【答案】$(e,\ 1)$

【分析】设出切点坐标，得到切线方程，然后求解方程得到横坐标的值可得切点坐标.

【详解】设点 $A(x_0, y_0)$，则 $y_0 = \ln x_0$.又 $y' = \dfrac{1}{x}$，

当 $x = x_0$ 时，$y' = \dfrac{1}{x_0}$，

点 A 在曲线 $y = \ln x$ 上的切线为 $y - y_0 = \dfrac{1}{x_0}(x - x_0)$，

即 $y - \ln x_0 = \dfrac{x}{x_0} - 1$，

代入点 $(-e,\ -1)$，得 $-1 - \ln x_0 = \dfrac{-e}{x_0} - 1$，

即 $x_0 \ln x_0 = e$，

考查函数 $H(x) = x\ln x$，当 $x \in (0,1)$ 时，$H(x) < 0$，当 $x \in (1,+\infty)$ 时，$H(x) > 0$，

且 $H'(x) = \ln x + 1$，当 $x > 1$ 时，$H'(x) > 0$，$H(x)$ 单调递增，

注意到 $H(e) = e$，故 $x_0 \ln x_0 = e$ 存在唯一的实数根 $x_0 = e$，此时 $y_0 = 1$，

故点 A 的坐标为 $A(e, 1)$.

重点题型 •归类精讲

题型一　求过某点的切线

1．已知直线 $y = kx$ 是曲线 $y = e^x$ 的切线，则实数 k 的值为 ________.

【答案】e

【分析】本题先设切点得到切线方程，再根据其过原点，代入解出切点横坐标，最后得到 k 值即可.

【详解】若 $y = e^x$，则 $y' = e^x$，设曲线 $y = e^x$ 上切点的坐标为 (x_0, e^{x_0})，

则切点处切线的斜率 $k = y'|_{x=x_0} = e^{x_0}$，

此时切线方程为：$y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$，

切线为 $y = kx$，则切线过坐标原点，即 $0 - e^{x_0} = e^{x_0}(0 - x_0)$，

解得：$x_0 = 1$，则：$k = y'|_{x=x_0} = e^1 = e$.