应用统计学

兰燕飞

Yanfei Lan

天津大学

Tianjin University

lanyf@tju.edu.cn

参考教材：

《概率论与数理统计》

盛骤　谢式千　潘承毅　主编

高等教育出版社

第五讲 随机事件的独立性

1 复习：条件概率、Bayes公式、全概率公式
2 事件的独立性
3 习题

条件概率 Conditional Probability

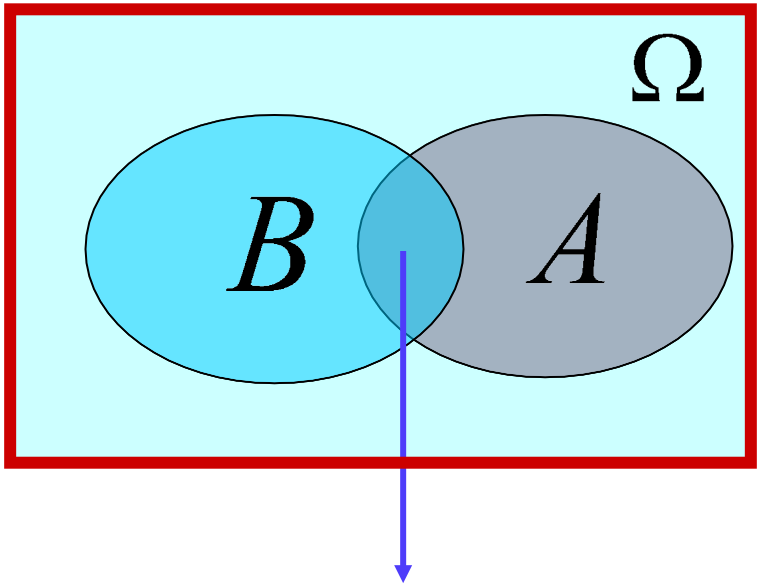
- 定义

设A， B为同一个随机试验中的两个随机事件，且P（B）＞0， 则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

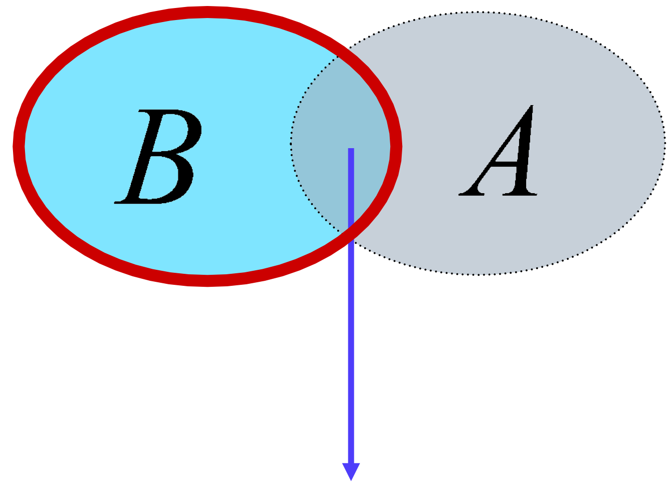
为在事件B发生的条件下，事件A发生的**条件概率**.

条件概率 P(A|B)的样本空间



Sample space

$$P(AB)$$



Reduced sample space given event B

$$P(A\mid B)$$

乘法法则

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$= P(B)P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

- 推广

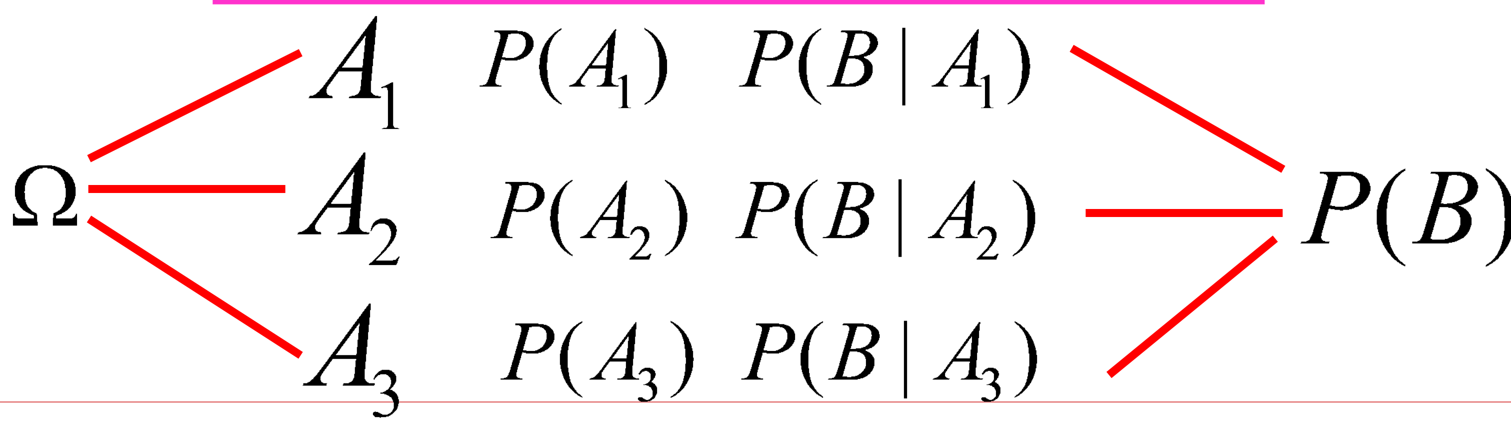
$$P(ABC) = P(A)P(B|A)\,P(C \mid AB)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1A_2))\cdots P(A_n|(A_1A_2\cdots A_{n-1}))$$

全概率公式

设A_1，A_2，…，A_n构成一个完备事件组，且$P(A_i)>0$，$i=1$，2，…，n，则对任一随机事件B，有

$$\boxed{P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}$$



贝叶斯公式 Bayes' Theorem

设A_1，A_2，…, A_n构成完备事件组，且诸P（A_i）>0)

B为样本空间的任意事件，P（B）>0, 则有

$$\boxed{P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}}$$

(k =1 , 2 , … , n)

证明

$$P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k B)}{P(B)}=\frac{P(A_k)P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

一、事件的独立性引例

$$\boxed{P(B|A)=P(B)}$$

例 一个盒子中有 6 只黑球、 4 只白球，从中有放回地摸球。求（1） 第一次摸到黑球的条件下，第二次摸到黑球的概率；（2） 第二次摸到黑球的概率。

解 A={第一次摸到黑球}，B={第二次摸到黑球}

则 $P(B|A)=\dfrac{6}{10}=0.6$

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

$$=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=0.6$$

事件的独立性 independence

- 定义

设A、B为任意两个随机事件，如果

$$P(B|A)=P(B)$$

即事件B发生的可能性不受事件A的影响，则称事件B对于事件A独立.

显然，B对于A独立，则A对于B也独立，故称A与B相互独立.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(B|A)}=\frac{P(AB)}{P(AB)/P(A)}=P(A)$$

事件的独立性 判别

- 事件 A 与事件 B 独立的充分必要条件是

$$\boxed{P(AB)=P(A)P(B)}$$

证明　由乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$ 和

独立性定义 $P(B|A)=P(B)$ 可得

- 实际问题中，事件的独立性可根据问题的实际意义来判断

如甲乙两人射击，“甲击中”与“乙击中”可以

认为相互之间没有影响，即可以认为相互独立

例一个家庭中有若干个小孩，假设生男生女是等可能的，令A={一个家庭中有男孩、又有女孩}，B={一个家庭中最多有一个女孩}，对下列两种情形，讨论A与B的独立性：

1）家庭中有两个小孩；2）家庭中有三个小孩。

解　情形（1）的样本空间为

Ω={（男男），（男女），（女男），（女女）}

$$P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{3}{4}, P(AB)=\frac{1}{2}$$

此种情形下，事件A、B是不独立的。

例 一个家庭中有若干个小孩，假设生男生女是等可能的，令A={一个家庭中有男孩、又有女孩}，B={一个家庭中最多有一个女孩}，对下列两种情形，讨论A与B的独立性：（1）家庭中有两个小孩；（2）家庭中有三个小孩。

解 情形（2）的样本空间为

Ω={（男男男），（男男女），（男女男），（女男男）（男女女），（女男女），（女女男），（女女女）}

$$P(A)=\frac{6}{8},P(B)=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{3}{8}$$

此种情形下，事件A、B是独立的。