

角和余角补角

一、课堂目标

- 1.掌握角的定义和表示，会比较角的大小。
- 2.理解角平分线的定义，能正确完成角度的相关计算和换算。
- 3.理解余角补角的定义与性质，能正确完成余角补角的相关计算。

【备注】**【目标解读】**

a.关联知识：本讲属于初中数学——几何初步这个模块，学好本讲知识将在后面的几何知识学习中帮助学生完成角的计算或数量关系的确定；本讲知识在阶段性考试中属于必考内容.

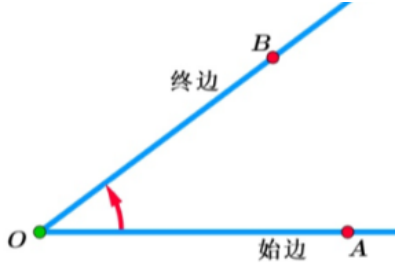
b.本讲解读：本讲重点内容是角的相关计算，请教师通过【经典例题】的讲解来展示角度计算的思路和完整的解答过程，并在后面的【题目练习】中重点关注学生解题过程的书写；本讲的难点内容是：余角补角的性质，请教师先讲解余角补角性质、再展示直接运用性质完成计算或确定数量关系.

c.能力素养：主要培养学生的几何直观能力和计算能力.

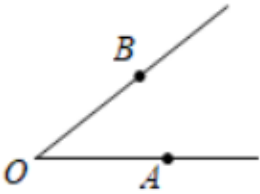
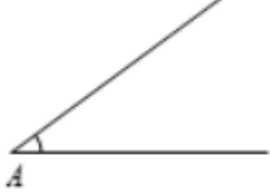
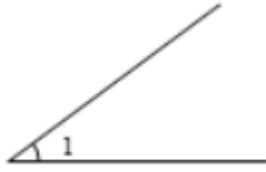
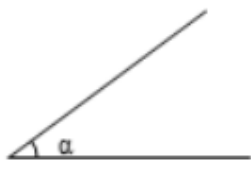
二、知识讲解

1. 角的概念及运算

 角的概念

从静的角度认识角	从动的角度认识角
有公共端点的两条射线组成的图形叫做角，这个公共端点是角的顶点，这两条射线是角的两条边。	角是由一条射线绕着它的端点旋转到另一个位置所成的图形，处于初始位置的那条射线叫做角的始边，终止位置的那条射线叫做角的终边。
	

角的表示方法

角的表示			
三个大写字母	一个大写字母	数字	小写希腊字母
			
$\angle AOB$ 或 $\angle BOA$	$\angle A$	$\angle 1$	$\angle \alpha$

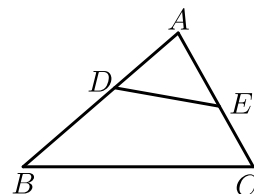
【备注】【教学建议】

提醒学生注意：

- ①用三个大写字母表示时，表示顶点的字母必须写在中间．其他两个字母可以调换位置，如图也可记为 $\angle BOA$ ，但不能写成 $\angle BAO$ 或 $\angle ABO$ 等．
- ②用一个大写字母来表示角的时候，这个大写字母一定要表示角的顶点，而且以它为顶点的角有且只有一个．
- ③当在一个顶点处有两个或两个以上的角时，其中的任意一个角都不能用一个大写英文字母表示．
- ④在角的内部靠近顶点处画弧线，用单独的一个数字来表示．
- ⑤用同一个数字或小写的希腊字母不能表示超过一个以上的角．

经典例题1

如图所示，下列说法中正确的是（ ）．



- A. $\angle ADE$ 就是 $\angle D$
- B. $\angle ABC$ 可以用 $\angle B$ 表示
- C. $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 是同一个角
- D. $\angle BAC$ 和 $\angle DAE$ 不是同一个角

【答案】 B

【解析】 A 选项： $\angle ADE$ 是单独一个角， $\angle D$ 不明确，故A错误；

B 选项： $\angle ABC = \angle B$ ，故B正确；

C 选项： $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 是两个不同的角，故C错误；

D 选项： $\angle BAC$ 与 $\angle DAE$ 是同一个角，故D错误．

故选 B．

【标注】 【知识点】角的表示方法

思路梳理

知识点：

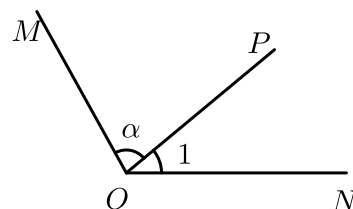
1、 _____

2、 _____

3、 _____

|| 题目练习1

如图所示，下列表示角的方法错误的是（ ）．



A. $\angle 1$ 与 $\angle PON$ 表示同一个角

B. $\angle \alpha$ 表示的是 $\angle MOP$

C. $\angle MON$ 也可用 $\angle O$ 表示

D. 图中共有三个角 $\angle MON$ ， $\angle POM$ ， $\angle PON$

【答案】 C

【标注】 【知识点】角的表示方法

💡 角的换算与大小比较

以度、分、秒为基本单位的角的度量值，叫做角度值．

①把一个周角360等分，每一份就是1度的角，记作 1° ．

②把 1° 的角60等分，每一份就是1分的角，记作 $1'$ ．

③把 $1'$ 的角60等分，每一份就是1秒的角，记作 $1''$ ．

$1^\circ = 60'$ ， $1' = 60''$ ， $1^\circ = 3600''$ ．

$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$ ， $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ ， $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$ ．

1周角= 360° ，1平角= 180° ．

【注意】

由大化小乘以进率，由小化大除以进率

经典例题2

若 $\angle A = 20^\circ 18'$ ， $\angle B = 20^\circ 15''$ ， $\angle C = 20.25^\circ$ ，则有（ ）。

- A. $\angle A > \angle B > \angle C$ B. $\angle B > \angle A > \angle C$ C. $\angle A > \angle C > \angle B$ D. $\angle C > \angle A > \angle B$

【答案】 C

【解析】 $\because \angle A = 20^\circ 18'$ ， $\angle B = 20^\circ 15''$ ，

$\therefore \angle A > \angle B$ ，

$\because \angle C = 20.25^\circ = 20^\circ 15'$ ，

$\therefore \angle B < \angle C < \angle A$ ，

$\therefore \angle A > \angle C > \angle B$ 。

故选C。

【标注】 【知识点】角的大小比较

思路梳理

知识点：

- 1、 _____
- 2、 _____
- 3、 _____

题目练习2

1. $12^\circ 23' 42'' = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$

【答案】 12.395

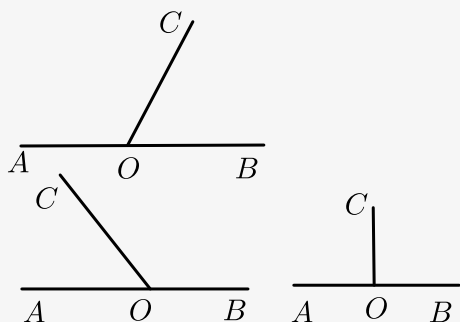
【标注】 【能力】运算能力

【知识点】 角度换算

2. 已知O是直线AB上一点（点O在点A、B之间），OC是一条射线，则 $\angle AOC$ 与 $\angle BOC$ 的大小关系是（ ）。
- A. $\angle AOC$ 一定大于 $\angle BOC$ B. $\angle AOC$ 一定小于 $\angle BOC$
- C. $\angle AOC$ 一定等于 $\angle BOC$ D. $\angle AOC$ 可能大于、等于或小于 $\angle BOC$

【答案】D

【解析】如图所示，



$\therefore \angle AOC$ 可能会大于、小于、等于 $\angle BOC$ 。

故选D。

【标注】 【题型】 题型：角的度量与比较大小

🕒 度、分、秒的计算

1. 进行角度的加减运算时，同单位相加减，即度与度相加减、分与分相加减、秒与秒相加减。

做加法时，秒够60进1分，分够60进1度；

做减法时，从上一级借1，再做减法运算。

2. 在乘法运算中，从低位开始乘所给的因数，够60则进1；

3. 在除法运算中，按从高到低的顺序相除，余数乘以60，再加到下一级单位中进行计算。

【注意】

加法和乘法运算有可能进位；减法和除法运算可能借位

|| 经典例题3

计算： $72^{\circ}35' \div 2 + 18^{\circ}33' \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $110^{\circ}29'30''$

【解析】 $110^{\circ}29'30''$ 。

【标注】 【能力】 运算能力

【知识点】 角度换算

思路梳理

知识点：

- 1、 _____
- 2、 _____
- 3、 _____

|| 题目练习3

计算：

$$(1) 48^{\circ}39' + 67^{\circ}31' - 21^{\circ}17' .$$

$$(2) 23^{\circ}53' \times 3 - 107^{\circ}43' \div 5 .$$

【答案】 (1) $94^{\circ}53'$.

(2) $50^{\circ}6'24''$.

【解析】 (1) $48^{\circ}39' + 67^{\circ}31' - 21^{\circ}17'$

$$= 116^{\circ}10' - 21^{\circ}17'$$

$$= 94^{\circ}53' .$$

$$(2) 23^{\circ}53' \times 3 - 107^{\circ}43' \div 5$$

$$= 71^{\circ}39' - 21^{\circ}32'36''$$

$$= 50^{\circ}6'24'' .$$

【标注】 【知识点】角度换算

🕒 角的计数

【问题情境】

从一个端点 O 出发的 n 条射线（最大夹角都小于 180° 度），一共可以组成多少个角？



【备注】【教学建议】

角的计数同线段计数方法类似，在数角的个数过程中要：**按一个方向数，不回头**。

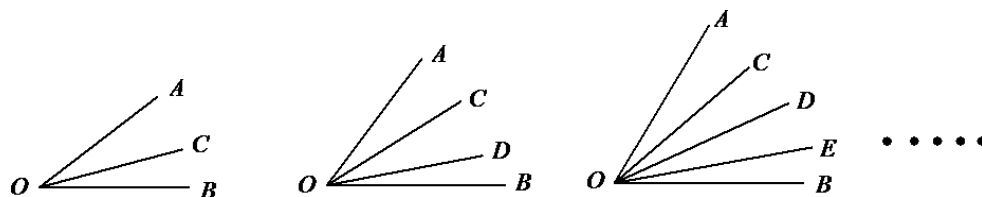
【问题情境】

每条射线都能与其他的 $(n-1)$ 条射线组成一个角，所以 n 条射线可以组成个 $n \times (n-1)$ 角，但其中每个角在计数时都算了两次，

所以实际不同的角的个数是： $\frac{n \times (n-1)}{2}$.

经典例题4

如图，在锐角 $\angle AOB$ 内部，画1条射线，可得3个锐角；画2条不同射线，可得6个锐角；画3条不同射线，可得10个锐角；…，照此规律，画10条不同射线，可得锐角 _____ 个；画 n 条($n > 0$)不同的射线，可得锐角 _____ 个。



【备注】【教学建议】

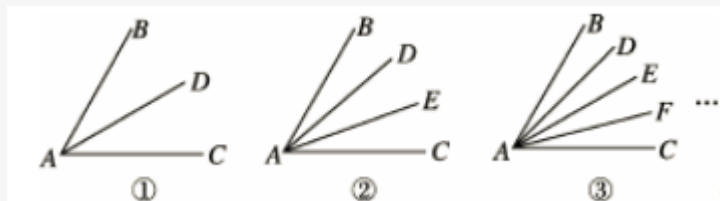
1. 问题情境部分和前面学过的线段计数类似，可以通过复习线段的计数问题或再次讲解这种计数方法解决这个问题。

在经典例题中配的题目和【问题情境】中的题目问法不一样但是本质是一样的，可以看做经典例题是【问题情境】的迁移。

下面是针对经典例题这类题目的分析过程，留给老师参考。

【问题情境2】

在角的内部作 n 条射线，那么一共有多少个角？



【问题情境2】

作1条射线，图中共有3个角， $3 = 1 + 2$ ；

作2条射线，图中共有6个角， $6 = 1 + 2 + 3$ ；

作3条射线，图中共有10个角， $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ ；

……

作 n 条射线，图中共有 $1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2}$ 个。

2. 本讲讲义还会复用到基础层次，基础层次的上一讲讲义中没有讲过线段的计数，因此本讲讲义如果给基础层次的学生，这个计数部分是新知识，后面的经典例题和题目练习中也给出了数线段的题目，可以用来给基础层次学生练习。

【答案】 66； $\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$

【解析】 先探索其一般规律：

画1条射线，可得3个锐角，其中： $3 = 1 + 2$ 。

画2条不同射线，可得6个锐角，其中： $6 = 1 + 2 + 3$ 。

画3条不同射线，可得10个锐角，其中： $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ 。

由此可知，在锐角 $\angle AOB$ 内部，画4条不同射线，可得锐角 $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ 。

在锐角 $\angle AOB$ 内部，画 n 条不同射线，可得锐角个数为：

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

因此，在锐角 $\angle AOB$ 内部，画10条不同射线，可得锐角个数为： $\frac{1}{2} \times (10+1) \times (10+2) = 66$ (个)。

【标注】 【知识点】 数列找规律-其他数列规律

思路梳理

知识点：

- 1、 _____
- 2、 _____
- 3、 _____

题目练习4

填空：

- (1) 如图所示，图1中有 _____ 条线段，图2中有 _____ 条线段，图3中有 _____ 条线段，当直线上有10个点时共有 _____ 条线段。

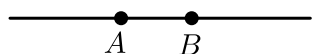


图 1

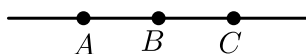


图 2

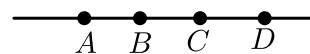


图 3

- (2) 知识迁移：

如图，在 $\angle AOB$ (小于平角) 内部，画1条射线，可得 _____ 角；画2条不同射线，可得 _____ 角；画3条不同射线，可得 _____ 角；……照此规律，在 $\angle AOB$ 内部画10条不同的射线，可得 _____ 角。

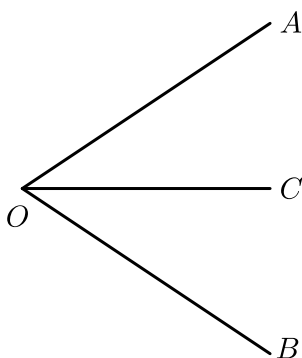


图 1

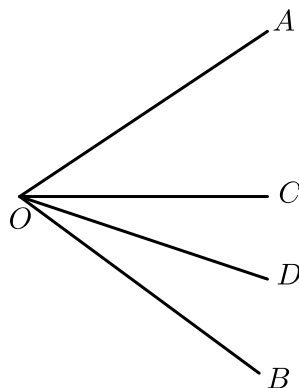


图 2

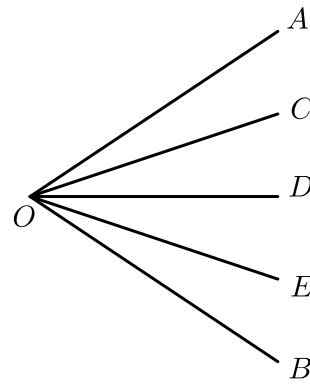


图 3

- (3) 应用：

①

我校七年级共有30个班，为迎接国庆节，举行拔河比赛，规定进行单循环赛（每两班之间赛一场），则七年级的拔河比赛共进行 ____ 场。

② 一次聚会，有 n 人参加，如果每两个人都握一次手，则共握手 ____ 次。

③ 从A市开往B市的特快列车，途中要停靠3个车站，如果任意2站间的票价不同的票价有 ____ 种，不同的车票有 ____ 种。

【答案】（1）1；3；6；45

（2）3；6；10；66

（3）① 435

② $\frac{n(n-1)}{2}$

③ 10；20

【解析】（1）略。

（2）略。

（3）① 略。

② 略。

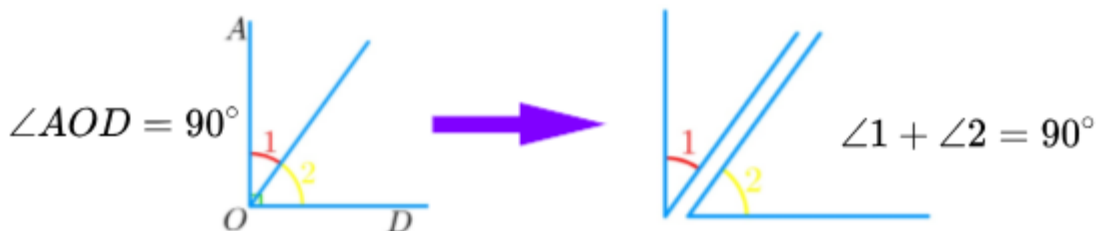
③ 略。

【标注】【知识点】数列找规律

2. 余角、补角和方位角

互为余角

1. 定义：如果两个角的和等于 90° （直角），就说这两个角**互为余角**，简称**互余**，即其中一个角是另一个角的**余角**。



2. 几何语言： $\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ （或者 $\angle 1 = 90^\circ - \angle 2$ ）

$\therefore \angle 1$ 与 $\angle 2$ 互为余角。

互为补角

1. 定义：如果两个角的和等于 180° （平角），就说这两个角**互为补角**，简称**互补**，即其中一个角是另一个角的**补角**。



2. 几何语言： $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ （或者 $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$ ）
 $\therefore \angle 1$ 与 $\angle 2$ 互为补角。

经典例题5

若 $\angle \alpha$ 与 $\angle \beta$ 互余，且 $\angle \alpha : \angle \beta = 3 : 2$ ，那么 $\angle \alpha$ 与 $\angle \beta$ 的度数分别是（ ）。

A. $54^\circ, 36^\circ$

B. $36^\circ, 54^\circ$

C. $72^\circ, 108^\circ$

D. $60^\circ, 40^\circ$

【备注】【教学建议】

方程思想：

在计算余角和补角时有时需要利用方程来求解。

例如：设这个角为 x ，则它的余角为 $90^\circ - x$ ，它的补角为 $180^\circ - x$
再根据题意列方程。

【答案】A

【解析】设 $\angle \alpha = 3x^\circ$ ， $\angle \beta = 2x^\circ$ ，

由题意，得 $3x + 2x = 90$ ，

解得 $x = 18$ ，

$\therefore \angle \alpha = 54^\circ$ ， $\angle \beta = 36^\circ$ 。

故选A。

【标注】【知识点】余角和补角

思路梳理

知识点：

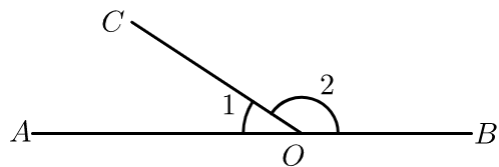
1、_____

2、_____

3、_____

题目练习5

1. 如图，点A、O、B在一条直线上， $\angle 1$ 是锐角，则 $\angle 1$ 的余角是（ ）。



- A. $\frac{1}{2}\angle 2 - \angle 1$ B. $\frac{1}{2}\angle 2 - \frac{3}{2}\angle 1$ C. $\frac{1}{2}(\angle 2 - \angle 1)$ D. $\frac{1}{3}(\angle 1 + \angle 2)$

【答案】 C

【解析】 由图知： $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ，

$$\therefore \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2) = 90^\circ,$$

$$\therefore 90^\circ - \angle 1 = \frac{1}{2}(\angle 1 + \angle 2) - \angle 1 = \frac{1}{2}(\angle 2 - \angle 1),$$

故选C.

【标注】 【知识点】余角和补角

2. 一个角的余角加上 40° 等于这个角的补角的 $\frac{2}{3}$ ，求这个角的度数.

【答案】 这个角是 30° .

【解析】 设这个角为 x ，则余角为 $90^\circ - x$ ，

$$90^\circ - x + 40^\circ = \frac{2}{3}(180^\circ - x),$$

解得 $x = 30^\circ$ ，

答：这个角是 30° .

【标注】 【知识点】余角和补角

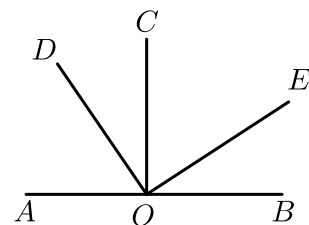
余角、补角的性质

同角（等角）的余角相等；

同角（等角）的补角相等.

经典例题6

如图， $\angle AOB = 180^\circ$ ， $\angle AOC = 90^\circ$ ， $\angle DOE = 90^\circ$ ，则图中相等的角有 ____ 对；两个角互余的角有 ____ 对；两个角互补的角有 ____ 对.



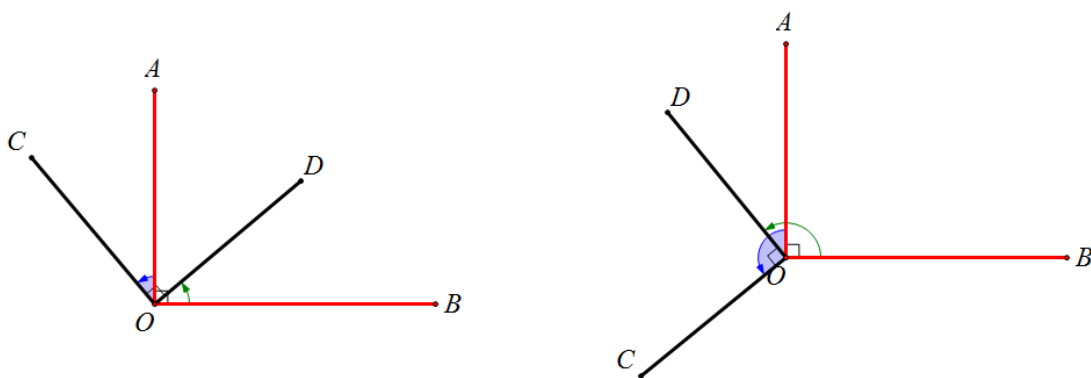
【备注】【教学建议】

通过本题介绍角的计算中的等量代换思想：

一个是等量减等量，一个是等量加等量，可以借助例题中的图形让学生证明。

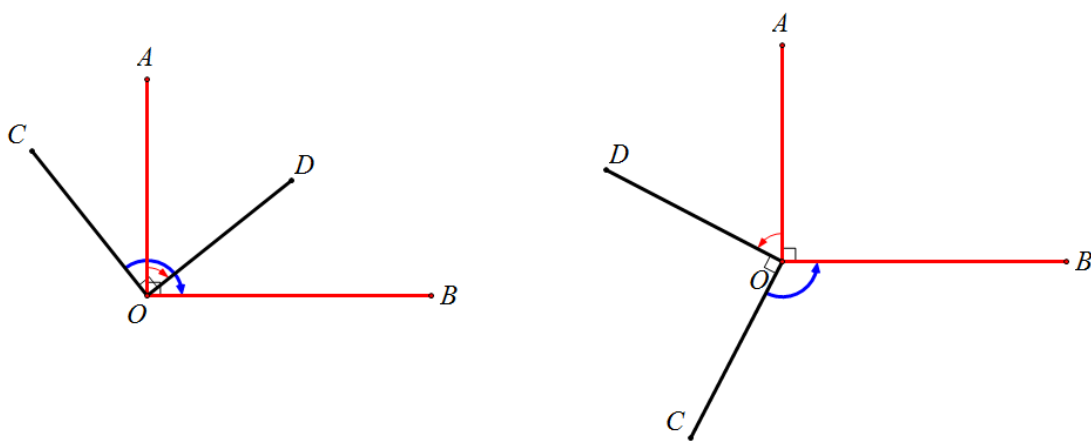
1. 结论一：角等

已知 $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ ，
则 $\angle AOC = \angle BOD$



2. 结论二：两个角的度数和为 180°

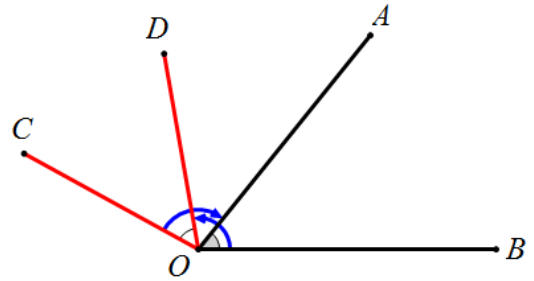
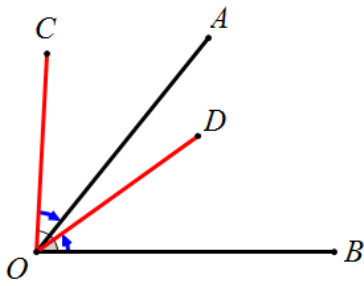
已知 $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ ，
则 $\angle BOC + \angle AOD = 180^\circ$



3. 结论三：特殊到一般的拓展

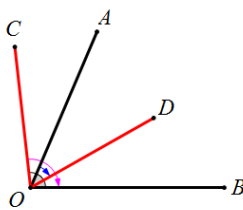
(1)

已知 $\angle AOB = \angle COD = \alpha$ ，
则 $\angle AOC = \angle BOD$

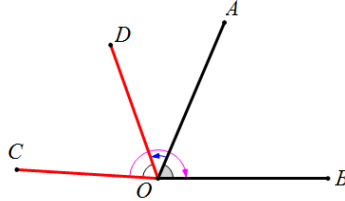


(2) 选讲

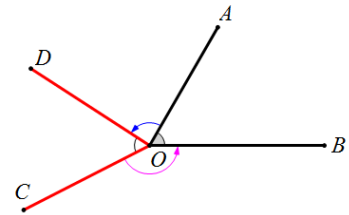
已知 $\angle AOB = \angle COD = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，
此时 $\angle BOC + \angle AOD = 2\alpha$



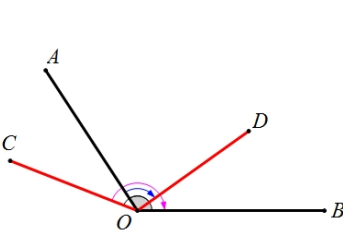
已知 $\angle AOB = \angle COD = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，
此时 $\angle BOC + \angle AOD = 2\alpha + 2\angle AOD$
不具备普适性规律



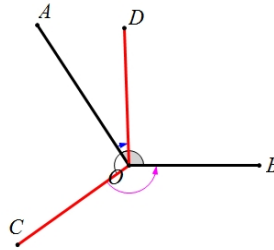
已知 $\angle AOB = \angle COD = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，
此时 $\angle BOC + \angle AOD = 360^\circ - 2\alpha$



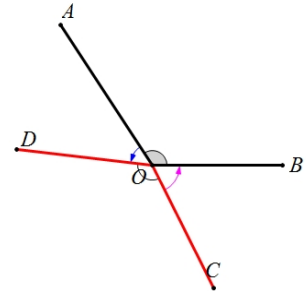
已知 $\angle AOB = \angle COD = \alpha$ ($90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$)，
此时 $\angle BOC + \angle AOD = 2\alpha$



已知 $\angle AOB = \angle COD = \alpha$ ($90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$)，
此时 $\angle BOC - \angle AOD = 360^\circ - 2\alpha$
不具备普适性规律



已知 $\angle AOB = \angle COD = \alpha$ ($90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$)，
此时 $\angle BOC + \angle AOD = 360^\circ - 2\alpha$



【注意】

从特殊到一般过程中第二和第三个图片中的角度关系可以不用介绍给学生，学生需要掌握的是一般角度中通过等量减等量或等量加等量得到等角。

【答案】 5；4；7

【解析】 由图可知图中相等的角有5对，

分别为 $\angle AOC = \angle BOC$ 、 $\angle BOC = \angle DOE$ 、 $\angle DOE = \angle AOC$ 、 $\angle AOD = \angle COE$ 、 $\angle BOE = \angle COD$

两个角的和为 90° 的角有4对；两个角的和为 180° 的角有7对。

【标注】 【知识点】 余角和补角

思路梳理

知识点：

1、 _____

2、 _____

3、 _____

|| 题目练习6

1. 回答问题：

(1) 如图1所示，将一副三角尺的直角顶点重合在点 O 处。

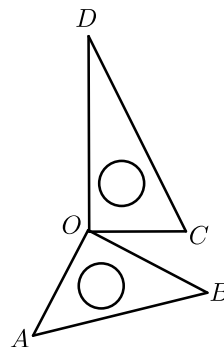


图 1

① $\angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 相等吗？说明理由。

② $\angle AOD$ 与 $\angle BOC$ 数量上有什么关系吗？说明理由。

(2) 若将这副三角尺按图2所示摆放，直角顶点重合在点 O 处，不添加字母，分析图中现有标注字母所表示的角。

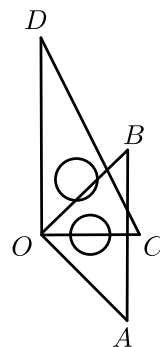


图 2

① 找出图中相等关系的角。

② 找出图中互补关系的角，并说明理由。

【备注】【教学建议】

下面是和三角板有关的内容总结，主要是利用三角板的特殊度数拼凑新度数，对于接受程度好的学生可以问问他，利用三角板我们可以拼凑出多少度的角。

一副三角尺上的角都是常用的角，它们可以直接画出。

画其他特殊角，关键在于设法把它写成 30° ， 45° ， 60° ， 90° 角的和或差。

用两个三角板可以拼出： 75° ， 105° ， 120° ， 135° ， 150° ， 15°

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/276154143233010103>