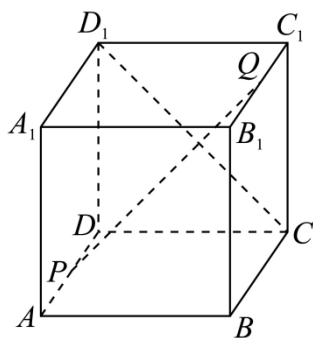


2024 年北京市西城区高考数学模拟试卷（一）

一、单选题：本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设 $A(2, m)$ 是抛物线 $y^2 = ax$ 上一点，若点 A 到抛物线的焦点距离为 3，则抛物线的准线方程是（ ）
 A. $y = -1$ B. $x = 1$ C. $x = -1$ D. $y = -2$
2. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x \in N \mid 0 \leq x \leq 2\}$ ，则 $A \cap B$ 的元素个数为（ ）
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 8
3. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π ，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，得到一个偶函数的图象，则（ ）
 A. $\varphi = \frac{\pi}{3}$ B. $\varphi = \frac{\pi}{6}$ C. $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ D. $\varphi = -\frac{\pi}{6}$
4. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，首项 $a_1 > 0$ ， $a_{2020} + a_{2021} > 0$ ， $a_{2020} \cdot a_{2021} < 0$ ，则满足 $S_n > 0$ 成立的最大正整数 n 是（ ）
 A. 4039 B. 4040 C. 4041 D. 4042
5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$ ， E 是 AD 的中点，则 $\overrightarrow{BE} =$ （ ）
 A. $-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
 C. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ D. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
6. “ $m = -2$ ”是“直线 $l_1: mx + 4y - 6 = 0$ 与直线 $l_2: x + my - 3 = 0$ 平行”的（ ）
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 若直线经过 $A(1, 0), B(2, -\sqrt{3})$ 两点，则直线 AB 的倾斜角为（ ）
 A. 30° B. 150° C. 60° D. 120°
8. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 为 AD 的中点，点 Q 为 B_1C_1 上的动点，下列说法中：



① PQ 可能与平面 CDD_1C_1 平行;

② PQ 与 BC 所成的角的最大值为 $\frac{\pi}{3}$;

③ CD_1 与 PQ 一定垂直;

④ $PQ \geq \sqrt{2}AB$

⑤ PQ 与 DD_1 所成的最大角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

其中正确个数为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$, 则满足不等式 $f(1-x^2) > f(2x)$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $[0, \sqrt{2})$

B. $(0, \sqrt{2})$

C. $(-1, \sqrt{2}-1)$

D. $(-1, \sqrt{2})$

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 右顶点为 A , 以 A 为圆心, b 为半径作圆 A , 圆 A

与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点, 则有 $\angle MAN =$ ()

A. 30°

B. 60°

C. 90°

D. 120°

二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 已知二项式 $\left(a\sqrt{x} - \frac{b}{x}\right)^5$ ($a > 0, b > 0$) 关于 x 展开式中, 所有项的项系数之和为 32, 设展开式中 x 和 x^{-2} 的系数之和分别为 m, n , 若 $m = 2n$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

12. 直线 $y = \sqrt{3}x$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线, 双曲线的离心率是 _____.

13. 若关于 x 的方程 $|2x + 4 - x^2| = a$ 恰有三个不同实数解, 则实数 a 的值为 _____.

14. 若函数 $f(x) = 2\sin \omega x (\omega > 0)$ 在 $[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增, 则 ω 的最大值为 _____.

15. 任取一个正整数, 若是奇数, 就将该数乘 3 再加上 1; 若是偶数, 就将该数除以 2. 反复进行上述两种运算, 经过有限次步骤后, 必进入循环圈 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, 这就是数学史上著名的“冰雹猜想”(又称“角谷猜想”). 如取正整数 6, 根据上述运算法则得出 $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, 共需要 8 个步骤变成 1 (简称为 8 步“雹程”). “冰雹猜

想”可表示为数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = m$ (m 为正整数), $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n = 2k (k \in \mathbf{N}_+) \\ 3a_n + 1, & a_n = 2k + 1 (k \in \mathbf{N}) \end{cases}$. 问: 当 $m = 17$ 时, 试确

定使得 $a_n = 1$ 需要 _____ 步“雹程”; 若 $a_6 = 1$, 则 m 所有可能的取值所构成的集合为 _____.

三、解答题：本题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

16. 已知 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足 $\frac{\sin A}{\sin B + \sin C} = \frac{c - b}{b}$ ．

(1) 若 $C = \frac{\pi}{3}$ ，求 B ；

(2) 求 $\frac{a + c}{b}$ 的取值范围．

17. 每年的 4 月 23 日是联合国教科文组织确定的“世界读书日”，又称“世界图书和日”． A 校为了了解学生的课外阅读情况，随机调查了 n 名学生，发现这些学生的课外日均阅读时间（单位：分钟）均在 $[0, 120]$ ．根据这 n 名学生的课外日均阅读时间，将样本数据分组为： $[0, 20)$ ， $[20, 40)$ ， $[40, 60)$ ， $[60, 80)$ ， $[80, 100)$ ， $[100, 120]$ ，并绘制出如下频率分布表．

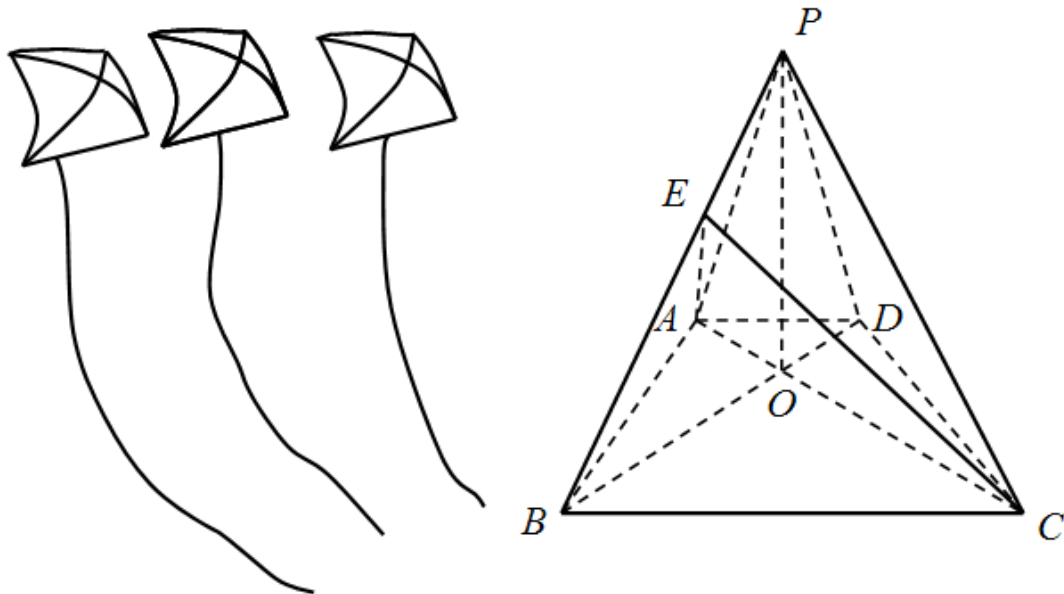
分组	频数	频率
$[0, 20)$	4	f_1
$[20, 40)$	10	0.1
$[40, 60)$	46	f_2
$[60, 80)$	a	f_3
$[80, 100)$	20	f_4
$[100, 120]$	4	f_5

(1) 求 n ， f_3 的值；

(2) 若采用分层随机抽样的方法从课外日均阅读时间为 $[60, 80)$ ， $[80, 100)$ ， $[100, 120]$ 的学生中抽取 10 人，再从抽取的 10 名学生中随机抽取 1 名学生进行阅读经验分享，求抽到做阅读经验分享的学生的课外日均阅读时间不少于 80 分钟的概率；

(3) 现从这 n 名学生中评出课外日均阅读时间较长的 10 人为“阅读达人”，请算出要成为“阅读达人”至少需要的课外日均阅读时间．

18. 如图，某种风筝的骨架模型是四棱锥 $P - ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 是等腰梯形， $AD \parallel BC$ ， $AC \cap DB = O$ ， $PO \perp$ 平面 $ABCD$ ， $\angle BOC = 90^\circ$ ， $OA = 1$ ， $OC = 2$ ， E 在 PB 上．



(1) 为保证风筝飞行稳定，需要在 E 处引一尼绳，使得 $PB = 3PE$ ，求证：直线 $PD \parallel$ 平面 AEC ；

(2) 实验表明，当 $\tan \angle PAC = 2$ 时，风筝表现最好，求此时直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值。

19. 给定任一锐角 $\triangle ABC$ 及高 AH ，在 AH 上任取一点 D ，联结 BD 并延长交 AC 于点 E ，联结 CD 且延长交 AB 于点 F ，求证： $\angle AHE = \angle AHF$ 。

20. 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - ax + a$ 。

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ ，求 a 的值；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，求 a 的最大值；

(3) 请直接写出 $f(x)$ 的零点个数。

21. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 组成集合 $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，从集合 A_n 中任取 k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) 个数，其所有可能的 k 个数的乘积的和为 T_k (若只取一个数，规定乘积为此数本身)，例如：对于数列 $\{2n-1\}$ ，当 $n=1$

时， $A_1 = \{1\}$, $T_1 = 1$; $n=2$ 时， $A_2 = \{1, 3\}$, $T_1 = 1+3$, $T_2 = 1 \cdot 3$;

(1) 若集合 $A_n = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$ ，求当 $n=3$ 时， T_1, T_2, T_3 的值；

(2) 若集合 $A_n = \{1, 3, 7, \dots, 2^n-1\}$ ，证明： $n=k$ 时集合 A_k 的 T_m 与 $n=k+1$ 时集合 A_{k+1} 的 T_m (为了以示区别，用 T'_m 表示) 有关系式 $T'_m = (2^{k+1}-1)T_{m-1} + T_m$ ，其中 $m, k \in \mathbb{N}^*$, $2 \leq m \leq k$;

(3) 对于 (2) 中集合 A_n ，定义 $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ ，求 S_n (用 n 表示)。

2024 年北京市西城区高考数学模拟试卷（一）

一、单选题：本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设 $A(2, m)$ 是抛物线 $y^2 = ax$ 上一点，若点 A 到抛物线的焦点距离为 3，则抛物线的准线方程是（ ）

- A. $y = -1$ B. $x = 1$ C. $x = -1$ D. $y = -2$

【答案】C

【解析】

【分析】结合抛物线的定义求得 $\frac{a}{4}$ ，由此求得抛物线的准线方程．

【详解】抛物线 $y^2 = ax$ 的准线方程为 $x = -\frac{a}{4}$ ，

因点 $A(2, m)$ 在抛物线上， $\therefore a > 0$ ，

由 A 到抛物线的焦点距离为 3 得 $2 + \frac{a}{4} = 3$ ，解得 $\frac{a}{4} = 1$ ，

所以抛物线的准线方程为 $x = -1$ ．

故选：C

2. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x \in N \mid 0 \leq x \leq 2\}$ ，则 $A \cap B$ 的元素个数为（ ）

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】先用列举法得出集合 $B = \{0, 1, 2\}$ ，再求解出 $A \cap B$ ，从而得出结果．

【详解】解： $\because$ 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ，

$B = \{x \in N \mid 0 \leq x \leq 2\}$ ，

$\therefore A \cap B = \{0, 1, 2\}$ ，

$\therefore A \cap B$ 的元素个数为 3．

故选 B．

【点睛】本题考查了集合的运算，解题的关键是将未知集合进行等价的转换，根据运算规则得出结果．

3. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π ，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，得到一个偶函数的图象，则（ ）

- A. $\varphi = \frac{\pi}{3}$ B. $\varphi = \frac{\pi}{6}$ C. $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ D. $\varphi = -\frac{\pi}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据最小正周期求出 $\omega = 2$ ，写出平移后的解析式，根据其为偶函数得到 $\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，根据 φ 的范围即可得到答案.

【详解】由最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ，可得 $\omega = 2$ ，

$f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后为偶函数 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ 的图象，

故 $\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ， $\therefore \varphi = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ， $k \in \mathbf{Z}$.

Q $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$ ，

故选：B.

4. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，首项 $a_1 > 0$ ， $a_{2020} + a_{2021} > 0$ ， $a_{2020} \cdot a_{2021} < 0$ ，则满足 $S_n > 0$ 成立的最大正整数 n 是 ()

A. 4039

B. 4040

C. 4041

D. 4042

【答案】B

【解析】

【分析】

由等差数列的 $a_1 > 0$ ，及 $a_{2020} \cdot a_{2021} < 0$ 得数列是递减的数列，因此可确定 $a_{2020} > 0, a_{2021} < 0$ ，然后利用等差数列的性质求前 n 项和，确定和 S_n 的正负.

【详解】 $\because a_{2020} \cdot a_{2021} < 0$ ， $\therefore a_{2020}$ 和 a_{2021} 异号，

又数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，首项 $a_1 > 0$ ， $\therefore \{a_n\}$ 是递减的数列， $a_{2020} > 0, a_{2021} < 0$ ，

由 $a_{2020} + a_{2021} > 0$ ，所以 $S_{4040} = \frac{4040(a_1 + a_{4040})}{2} = 2020(a_{2020} + a_{2021}) > 0$ ，

$S_{4041} = \frac{4041(a_1 + a_{4041})}{2} = 4041a_{2021} < 0$ ，

$\therefore$ 满足 $S_n > 0$ 的最大自然数 n 为 4040.

故选：B.

【点睛】关键点睛：本题求满足 $S_n > 0$ 的最大正整数 n 的值，关键就是求出 $S_n > 0$ ， $S_{n+1} < 0$ ，时成立的 n 的值，解题时应充分利用等差数列下标和的性质求解，属于中档题.

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BD} = \overline{DC}$ ， E 是 AD 的中点，则 $\overline{BE} =$ ()

A. $-\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$

B. $\frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC}$

C. $\frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$

D. $-\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

【答案】A

【解析】

【分析】

由 $\vec{BD} = \vec{DC}$ 可知 D 为 AB 的中点，表示 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ ，由平面向量的线性运算，即可表示 $\vec{BE}$ 。

【详解】因为 $\vec{BD} = \vec{DC}$ ，所以 D 为 AB 的中点，即 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$

因为 $\vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AD} - \vec{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) - \vec{AB} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$

故选：A

【点睛】本题考查平面向量的基本定理，涉及平面向量的线性运算，属于中档题。

6. “ $m = -2$ ”是“直线 $l_1: mx + 4y - 6 = 0$ 与直线 $l_2: x + my - 3 = 0$ 平行”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】根据两直线平行的判定与性质结合充分条件、必要条件判定即可。

【详解】若直线 $l_1: mx + 4y - 6 = 0$ 与直线 $l_2: x + my - 3 = 0$ 平行，则 $m^2 = 4$ ，可得 $m = \pm 2$ 。

当 $m = 2$ 时，直线 $l_1: 2x + 4y - 6 = 0$ ，直线 $l_2: x + 2y - 3 = 0$ ，两直线重合，不符合题意。

所以“直线 $l_1: mx + 4y - 6 = 0$ 与直线 $l_2: x + my - 3 = 0$ 平行”等价于“ $m = -2$ ”。

所以“ $m = -2$ ”是“直线 $l_1: mx + 4y - 6 = 0$ 与直线 $l_2: x + my - 3 = 0$ 平行”的充要条件。

故选：C

7. 若直线经过 $A(1, 0), B(2, -\sqrt{3})$ 两点，则直线 AB 的倾斜角为 ()

A. 30°

B. 150°

C. 60°

D. 120°

【答案】D

【解析】

【分析】利用两点的斜率公式及直线的斜率定义即可求解。

【详解】因为直线经过 $A(1, 0), B(2, -\sqrt{3})$ 两点，

所以直线 AB 的斜率为 $k = \frac{-\sqrt{3}-0}{2-1} = -\sqrt{3}$,

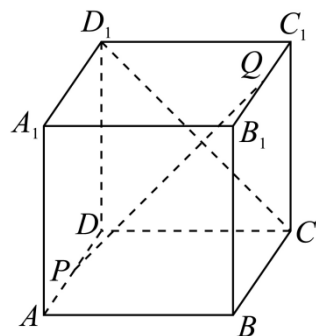
设直线 AB 的倾斜角为 α , 则

$\tan \alpha = -\sqrt{3}$, 且 $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$, 解得 $\alpha = 120^\circ$,

所以直线 AB 的倾斜角为 120° .

故选: D.

8. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 为 AD 的中点, 点 Q 为 B_1C_1 上的动点, 下列说法中:



① PQ 可能与平面 CDD_1C_1 平行;

② PQ 与 BC 所成的角的最大值为 $\frac{\pi}{3}$;

③ CD_1 与 PQ 一定垂直;

④ $PQ \geq \sqrt{2}AB$

⑤ PQ 与 DD_1 所成的最大角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

其中正确个数为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】结合空间中线线、线面、面面间的位置关系及正方体的性质, 对题中 5 个说法逐个分析, 可选出答案.

【详解】对于①, 当 Q 为 B_1C_1 的中点时, 因为 $C_1Q \parallel PD$ 且 $C_1Q = PD$, 所以四边形 C_1QPD 是平行四边形, 所以 $PQ \parallel C_1D$, 又因为 $PQ \not\subset$ 平面 CDD_1C_1 , $C_1D \subset$ 平面 CDD_1C_1 , 所以 $PQ \parallel$ 平面 CDD_1C_1 , 故①正确;

对于②, 当 Q 为 B_1C_1 的中点时, $PQ \parallel C_1D$, 又 $B_1C_1 \perp C_1D$, $BC \parallel B_1C_1$, 可得 $PQ \perp BC$, 此时 PQ 与 BC 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$, 故②错误;

对于③, 由 $CD_1 \perp C_1D$, $CD_1 \perp B_1C_1$, 且 $C_1D \cap B_1C_1 = C_1$, 可得 $CD_1 \perp$ 平面 ADC_1B_1 , 又 $PQ \subset$ 平面

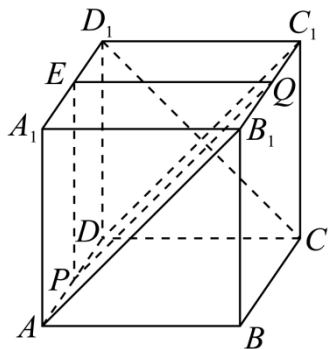
ADC_1B_1 ，故 $CD_1 \perp PQ$ ，故③正确；

对于④，当 Q 为 B_1C_1 的中点时，线段 PQ 的长为两平行线 AD, B_1C_1 之间的距离，且 $PQ = C_1D = \sqrt{2}AB$ ，故 $PQ \geq \sqrt{2}AB$ ，即④正确；

对于⑤，如图，点 E 为 A_1D_1 中点，连结 PE, QE ，因为 $PE \parallel DD_1$ ，所以 PQ 与 DD_1 所成角的正切值即为 PQ 与 PE 所成角的正切值，为 $\frac{EQ}{PE}$ ，点 Q 为 B_1C_1 上移动， $\angle PEQ$ 始终为直角三角形，当 Q 与 B_1 或 C_1 重合时， EQ 取得最大值，此时 PQ 与 PE 所成角的正切值最大，且 PQ 与 PE 所成的角也最大，设正方体边长为 2，则 $PE = 2$ ， $EC_1 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，所以所成最大角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，故⑤正确。

所以正确的个数为 4.

故选：C.



【点睛】本题考查空间中中线、线面、面面间的位置关系及其应用，考查学生的空间想象能力与计算求解能力，属于中档题.

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ ，则满足不等式 $f(1-x^2) > f(2x)$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $[0, \sqrt{2})$ B. $(0, \sqrt{2})$ C. $(-1, \sqrt{2}-1)$ D. $(-1, \sqrt{2})$

【答案】C

【解析】

【分析】先画出图象，结合图象得到 $\begin{cases} 2x \leq 0 \\ 1-x^2 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x > 0 \\ 1-x^2 > 2x \end{cases}$ ，解不等式即可.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/277106110034006144>

