

新疆乌鲁木齐市沙依巴克区乌鲁木齐四中 2024 年数学高三上期末学业水平测试试题

注意事项

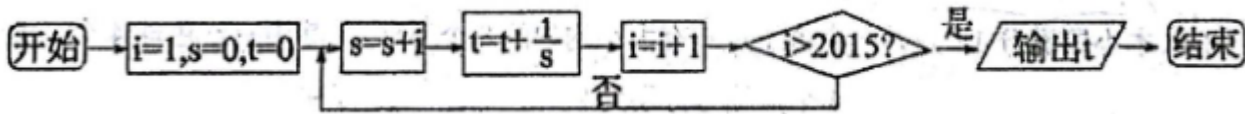
1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知双曲线的中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$ ，直线 $y = x - 1$ 与其相交于 M, N 两点，若 MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$ ，则此双曲线的方程是

- A. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$
C. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$

2. 执行如图所示的程序框图，则输出的结果为 ()



- A. $\frac{4032}{2017}$ B. $\frac{2015}{2016}$ C. $\frac{2016}{2017}$ D. $\frac{2015}{1008}$

3. 若复数 z 满足 $(2+3i)z = 13i$ ，则 $z =$ ()

- A. $-3+2i$ B. $3+2i$ C. $-3-2i$ D. $3-2i$

4. 已知直线 $l: x + m^2y = 0$ 与直线 $n: x + y + m = 0$ 则“ $l \parallel n$ ”是“ $m = 1$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq y, \\ x + y - 1 \leq 0, \\ y \geq -1, \end{cases}$ 则 $z = x + 2y$ 的最大值为 ()

- A. 2 B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. 0

6. 已知 $\triangle ABC$ 的垂心为 H ，且 $AB = 6, BC = 8, M$ 是 AC 的中点，则 $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AC} =$ ()

- A. 14 B. 12 C. 10 D. 8

7. 已知函数 $f(x) = \sin 2x + a \cos 2x$ 的图象的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{12}$ ，将函数 $f(x)$ 的图象向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

后得到函数 $g(x)$ 图象，则函数 $g(x)$ 的解析式为 ()

- A. $g(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{12})$ B. $g(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{12})$
C. $g(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ D. $g(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$

8. 某校 8 位学生的本次月考成绩恰好都比上一次的月考成绩高出 50 分，则以该 8 位学生这两次的月考成绩各自组成样本，则这两个样本不变的数字特征是 ()

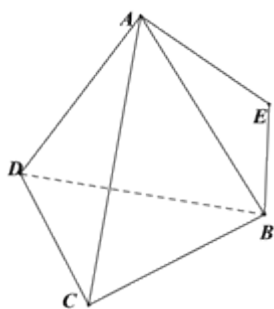
- A. 方差 B. 中位数 C. 众数 D. 平均数

9. 定义： $N\{f(x) \otimes g(x)\}$ 表示不等式 $f(x) < g(x)$ 的解集中的整数解之和. 若 $f(x) = |\log_2 x|$ ， $g(x) = a(x-1)^2 + 2$ ，

$N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ ，则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(\log_2 3 - 2, 0)$ C. $(2 - \log_2 6, 0]$ D. $(\frac{\log_2 3 - 2}{4}, 0]$

10. 等腰直角三角形 ABE 的斜边 AB 为正四面体 $ABCD$ 侧棱，直角边 AE 绕斜边 AB 旋转，则在旋转的过程中，有下列说法：

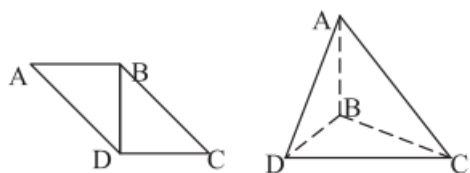


- (1) 四面体 $E-BCD$ 的体积有最大值和最小值；
(2) 存在某个位置，使得 $AE \perp BD$ ；
(3) 设二面角 $D-AB-E$ 的平面角为 θ ，则 $\theta \geq \angle DAE$ ；
(4) AE 的中点 M 与 AB 的中点 N 连线交平面 BCD 于点 P ，则点 P 的轨迹为椭圆。

其中，正确说法的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 如图，将两个全等等腰直角三角形拼成一个平行四边形 $ABCD$ ，将平行四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折起，使平面 $ABD \perp$ 平面 BCD ，则直线 AC 与 BD 所成角余弦值为 ()



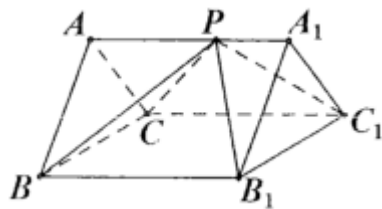
- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

12. 已知正四面体的内切球体积为 v , 外接球的体积为 V , 则 $\frac{V}{v} = (\quad)$

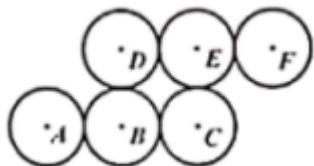
- A. 4 B. 8 C. 9 D. 27

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 2, 点 P 为侧棱 AA_1 上任意一点, 则四棱锥 $P-BCC_1B_1$ 的体积为 _____.



14. 三对父子去参加亲子活动, 坐在如图所示的 6 个位置上, 有且仅有一对父子是相邻而坐的坐法有 _____ 种 (比如: B 与 D 、 B 与 C 是相邻的, A 与 D 、 C 与 D 是不相邻的)。



15. 已知向量 $\vec{a} = (\cos 5^\circ, \sin 5^\circ)$, $\vec{b} = (\cos 65^\circ, \sin 65^\circ)$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知函数 $f(x) = e^x \cos x + x^5$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程是 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

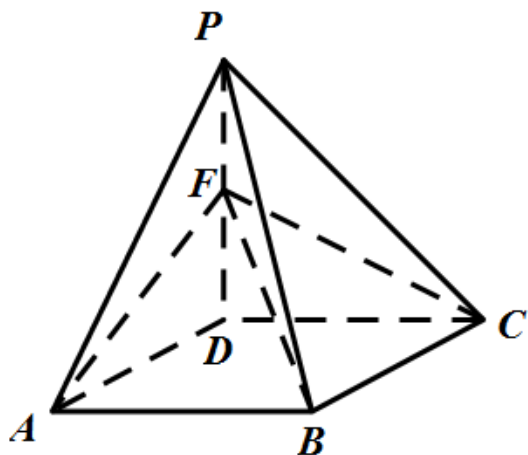
17. (12 分) 设函数 $f(x) = \sin(\frac{\omega x}{3} - \frac{\pi}{6}) - 2\cos^2 \frac{\omega x}{6} + 1 (\omega > 0)$, 直线 $y = \sqrt{3}$ 与函数 $f(x)$ 图象相邻两交点的距离为 2π .

(I) 求 ω 的值;

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 若点 $(\frac{B}{2}, 0)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心, 且 $b = 5$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle DAB = 60^\circ$, $\angle ADP = 90^\circ$, 平面

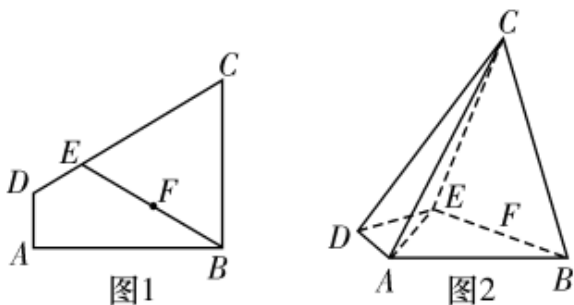
$ADP \perp$ 平面 $ABCD$ ，点 F 为棱 PD 的中点.



(I) 在棱 AB 上是否存在一点 E ，使得 $AF \perp$ 平面 PCE ，并说明理由；

(II) 当二面角 $D-FC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，求直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角.

19. (12 分) 如图 1，四边形 $ABCD$ 为直角梯形， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 3$ ， E 为线段 CD 上一点，满足 $BC = CE$ ， F 为 BE 的中点，现将梯形沿 BE 折叠 (如图 2)，使平面 $BCE \perp$ 平面 $ABED$.



(1) 求证：平面 $ACE \perp$ 平面 BCE ；

(2) 能否在线段 AB 上找到一点 P (端点除外) 使得直线 AC 与平面 PCF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ？若存在，试确定点 P 的位置；若不存在，请说明理由.

20. (12 分) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 1$ ， $a_4 = \frac{1}{8}$. 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $b_1 = -1$ ， $a_n + b_n = -\frac{1}{2}S_{n-1}$ ($n \geq 2$ ， $n \in \mathbf{N}^*$).

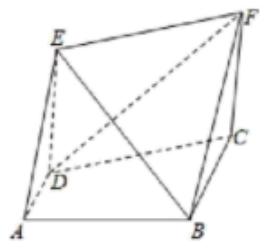
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 是等差数列；

(3) 是否存在等差数列 $\{c_n\}$ ，使得对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $S_n \leq c_n \leq a_n$ ？若存在，求出所有符合题意的等差数列 $\{c_n\}$

；若不存在，请说明理由.

21. (12 分) 如图所示,直角梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AE = AB = BC = 2AD = 2$, 四边形 $EDCF$ 为矩形, $CF = \sqrt{3}$.



(1) 求证:平面 $ECF \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 在线段 DF 上是否存在点 P ,使得直线 BP 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$,若存在,求出线段 BP 的长,若不存在,请说明理由.

22. (10 分) 某企业现有 A 、 B 两套设备生产某种产品,现从 A 、 B 两套设备生产的大量产品中各抽取了 100 件产品作为样本,检测某一项质量指标值,若该项质量指标值落在 $[20,40)$ 内的产品视为合格品,否则为不合格品.图 1 是从 A 设备抽取的样本频率分布直方图,表 1 是从 B 设备抽取的样本频数分布表.

图 1: A 设备生产的样本频率分布直方图

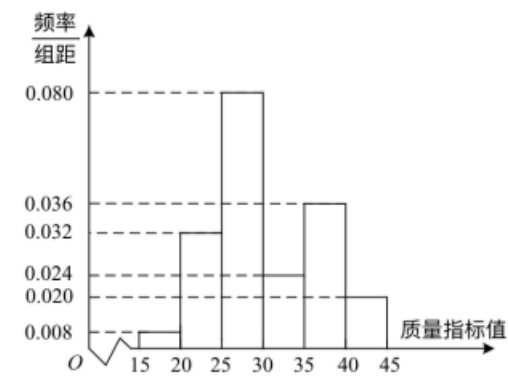


表 1: B 设备生产的样本频数分布表

质量指标值	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$	$[40,45)$
频数	2	18	48	14	16	2

(1) 请估计 A 、 B 设备生产的产品质量指标的平均值;

(2) 企业将不合格品全部销毁后,并对合格品进行等级细分,质量指标值落在 $[25,30)$ 内的定为一等品,每件利润 240 元;质量指标值落在 $[20,25)$ 或 $[30,35)$

内的定为二等品，每件利润 180 元；其它的合格品定为三等品，每件利润 120 元.根据图 1、表 1 的数据，用该组样本中一等品、二等品、三等品各自在合格品中的频率代替从所有产品中抽到一件相应等级产品的概率.企业由于投入资金的限制，需要根据 A, B 两套设备生产的同一种产品每件获得利润的期望值调整生产规模，请根据以上数据，从经济效益的角度考虑企业应该对哪一套设备加大生产规模？

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

根据点差法得 $\frac{2}{a^2} = \frac{5}{b^2}$ ，再根据焦点坐标得 $a^2 + b^2 = 7$ ，解方程组得 $a^2 = 2$ ， $b^2 = 5$ ，即得结果.

【详解】

设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，由题意可得 $a^2 + b^2 = 7$ ，设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，则 MN 的中点为

$$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right), \text{ 由 } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ 且 } \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \text{ 得 } \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} = \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2}, \frac{2 \times (-\frac{2}{3})}{a^2} =$$

$$\frac{2 \times (-\frac{5}{3})}{b^2}, \text{ 即 } \frac{2}{a^2} = \frac{5}{b^2}, \text{ 联立 } a^2 + b^2 = 7, \text{ 解得 } a^2 = 2, b^2 = 5, \text{ 故所求双曲线的方程为 } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1. \text{ 故选 D.}$$

【点睛】

本题主要考查利用点差法求双曲线标准方程，考查基本求解能力，属于中档题.

2、D

【解析】

循环依次为 $s=1, t=1, i=2; s=3, t=1+\frac{1}{3}, i=3; s=6, t=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}, i=4; \dots$

直至 $t=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\dots+\frac{1}{1+2+\dots+2015}, i=2016$; 结束循环，输出

$$t=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\dots+\frac{1}{1+2+\dots+2015}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right) \\ =2\left(1-\frac{1}{2016}\right)=\frac{2015}{1008}, \text{ 选 D.}$$

点睛：算法与流程图的考查，侧重于对流程图循环结构的考查.先明晰算法及流程图的相关概念，包括选择结构、循环结构、伪代码，其次要重视循环起点条件、循环次数、循环终止条件，更要通过循环规律，明确流程图研究的数学问题，是求和还是求项.

3、B

【解析】

由题意得, $z = \frac{13i}{2+3i}$, 求解即可.

【详解】

因为 $(2+3i)z = 13i$, 所以 $z = \frac{13i}{2+3i} = \frac{13i(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{26i+39}{4+9} = 3+2i$.

故选:B.

【点睛】

本题考查复数的四则运算,考查运算求解能力,属于基础题.

4、B

【解析】

利用充分必要条件的定义可判断两个条件之间的关系.

【详解】

若 $l \parallel n$, 则 $1 \times 1 = m^2 \times 1$, 故 $m = 1$ 或 $m = -1$,

当 $m = 1$ 时, 直线 $l: x + y = 0$, 直线 $n: x + y + 1 = 0$, 此时两条直线平行;

当 $m = -1$ 时, 直线 $l: x + y = 0$, 直线 $n: x + y - 1 = 0$, 此时两条直线平行.

所以当 $l \parallel n$ 时, 推不出 $m = 1$, 故“ $l \parallel n$ ”是“ $m = 1$ ”的不充分条件,

当 $m = 1$ 时, 可以推出 $l \parallel n$, 故“ $l \parallel n$ ”是“ $m = 1$ ”的必要条件,

故选: B.

【点睛】

本题考查两条直线的位置关系以及必要不充分条件的判断, 前者应根据系数关系来考虑, 后者依据两个条件之间的推出关系, 本题属于中档题.

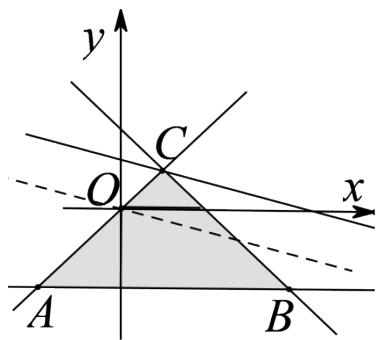
5、B

【解析】

作出可行域, 平移目标直线即可求解.

【详解】

解: 作出可行域:



由 $z = x + 2y$ 得, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$

由图形知, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$ 经过点时, 其截距最大, 此 z 时最大

$$\begin{cases} y = x \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}, C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{当 } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 时, } z_{\max} = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

故选: B

【点睛】

考查线性规划, 是基础题.

6、A

【解析】

由垂心的性质, 得到 $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 可转化 $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC}$, 又 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$ 即得解.

【详解】

因为 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, 所以 $BH \perp AC$,

所以 $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 而 $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BM}$,

所以 $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC}$,

因为 M 是 AC 的中点,

所以 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BA}^2) = \frac{1}{2}(64 - 36) = 14.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了利用向量的线性运算和向量的数量积的运算率，考查了学生综合分析，转化划归，数学运算的能力，属于中档题.

7、C

【解析】

根据辅助角公式化简三角函数式，结合 $x = \frac{\pi}{12}$ 为函数 $f(x)$ 的一条对称轴可求得 a ，代入辅助角公式得 $f(x)$ 的解析式.

根据三角函数图像平移变换，即可求得函数 $g(x)$ 的解析式.

【详解】

函数 $f(x) = \sin 2x + a \cos 2x$,

由辅助角公式化简可得 $f(x) = \sqrt{1+a^2} \sin(2x+\theta)$, $\tan \theta = a$,

因为 $x = \frac{\pi}{12}$ 为函数 $f(x) = \sin 2x + a \cos 2x$ 图象的一条对称轴,

代入可得 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) + a \cos\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = \pm \sqrt{1+a^2}$,

即 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \pm \sqrt{1+a^2}$, 化简可解得 $(a-\sqrt{3})^2 = 0$,

即 $a = \sqrt{3}$,

所以 $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$

$= 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

将函数 $f(x)$ 的图象向右平行移动 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度可得 $g(x)$,

则 $g(x) = 2 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$,

故选：C.

【点睛】

本题考查了辅助角化简三角函数式的应用，三角函数对称轴的应用，三角函数图像平移变换的应用，属于中档题.

8、A

【解析】

通过方差公式分析可知方差没有改变，中位数、众数和平均数都发生了改变.

【详解】

由题可知，中位数和众数、平均数都有变化.

本次和上次的月考成绩相比，成绩和平均数都增加了 50，所以 $(x_n - \bar{x})^2$ 没有改变，

根据方差公式 $S^2 = \frac{1}{8}[(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_8 - \bar{x})^2]$ 可知方差不变.

故选：A

【点睛】

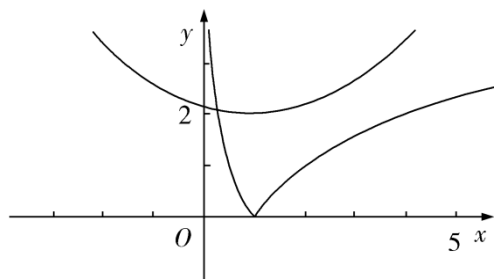
本题主要考查样本的数字特征，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

9、D

【解析】

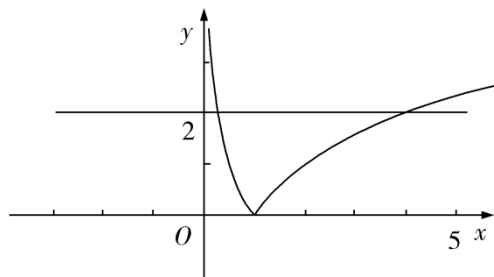
由题意得， $N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ 表示不等式 $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 的解集中整数解之和为 6.

当 $a > 0$ 时，数形结合（如图）得 $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 的解集中的整数解有无数多个， $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 解集中的整数解之和一定大于 6.

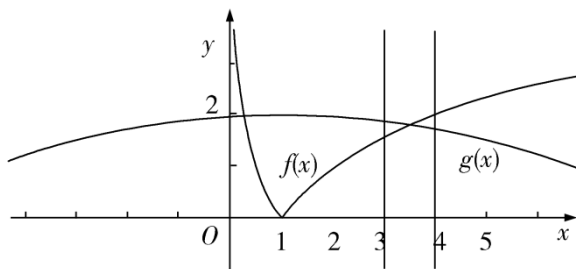


当 $a = 0$ 时， $g(x) = 2$ ，数形结合（如图），由 $f(x) < 2$ 解得 $\frac{1}{4} < x < 4$. 在 $(\frac{1}{4}, 4)$ 内有 3 个整数解，为 1，2，3，满足

$N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ ，所以 $a = 0$ 符合题意.



当 $a < 0$ 时，作出函数 $f(x) = |\log_2 x|$ 和 $g(x) = a(x-1)^2 + 2$ 的图象，如图所示.



若 $N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ ，即 $|\log_2 x| < a(x-1)^2 + 2$ 的整数解只有 1, 2, 3.

只需满足 $\begin{cases} f(3) < g(3) \\ f(4) \geq g(4) \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} \log_2 3 < 4a + 2 \\ 2 \geq 9a + 2 \end{cases}$ ，解得 $\frac{\log_2 3 - 2}{4} < a \leq 0$ ，所以 $\frac{\log_2 3 - 2}{4} < a < 0$.

综上，当 $N\{f(x) \otimes g(x)\} = 6$ 时，实数 a 的取值范围是 $(\frac{\log_2 3 - 2}{4}, 0]$. 故选 D.

10、C

【解析】

解 对于 (1)，当 $CD \perp$ 平面 ABE ，且 E 在 AB 的右上方时， E 到平面 BCD 的距离最大，当 $CD \perp$ 平面 ABE ，且 E 在 AB 的左下方时， E 到平面 BCD 的距离最小，

$\therefore$ 四面体 $E-BCD$ 的体积有最大值和最小值，故 (1) 正确；

对于 (2)，连接 DE ，若存在某个位置，使得 $AE \perp BD$ ，又 $AE \perp BE$ ，则 $AE \perp$ 平面 BDE ，可得 $AE \perp DE$ ，进一步可得 $AE = DE$ ，此时 $E-ABD$ 为正三棱锥，故 (2) 正确；

对于 (3)，取 AB 中点 O ，连接 DO ， EO ，则 $\angle DOE$ 为二面角 $D-AB-E$ 的平面角，为 θ ，

直角边 AE 绕斜边 AB 旋转，则在旋转的过程中， $\theta \in [0, \pi)$ ，

$\angle DAE \in [\frac{\pi}{12}, \pi)$ ，所以 $\theta \geq \angle DAE$ 不成立. (3) 不正确；

对于 (4) AE 的中点 M 与 AB 的中点 N 连线交平面 BCD 于点 P ， P 到 BC 的距离为： d_{P-BC} ，

因为 $\frac{|PB|}{d_{P-BC}} < 1$ ，所以点 P 的轨迹为椭圆. (4) 正确.

故选：C.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/277113026010006056>