

2023-2024 学年安徽省安庆市市示范中学高三下学期第一次月考（数学试题-理）试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=1$ ， $AD=\sqrt{2}$ ， $AA_1=\sqrt{3}$ ，则直线 DD_1 与平面 ABC_1 所成角的余弦值为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

2. 已知命题 p ：“ $a>b$ ”是“ $2^a>2^b$ ”的充要条件； $q:\exists x\in\mathbf{R}, |x+1|\leq x$ ，则（ ）

- A. $(\neg p)\vee q$ 为真命题 B. $p\vee q$ 为真命题
C. $p\wedge q$ 为真命题 D. $p\wedge(\neg q)$ 为假命题

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$ ， $a_1+a_3+a_5=21$ ，则 $a_3+a_5+a_7=$ （ ）

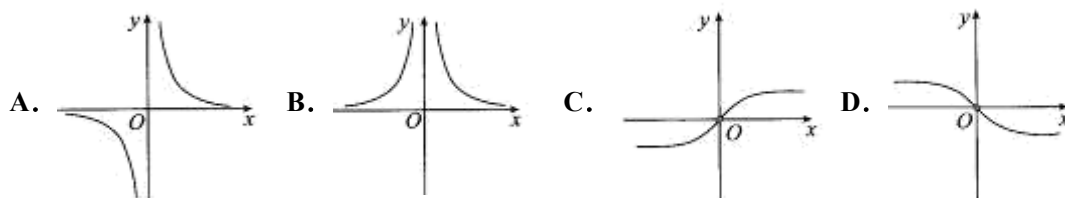
- A. 21 B. 42 C. 63 D. 84

4. 设不等式组 $\begin{cases} x-2\leq 0 \\ x+y\geq 0 \\ x-y\geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 Ω ，在区域 Ω 内任取一点 $P(x,y)$ ，则 P 点的坐标满足不等式 $x^2+y^2\leq 2$

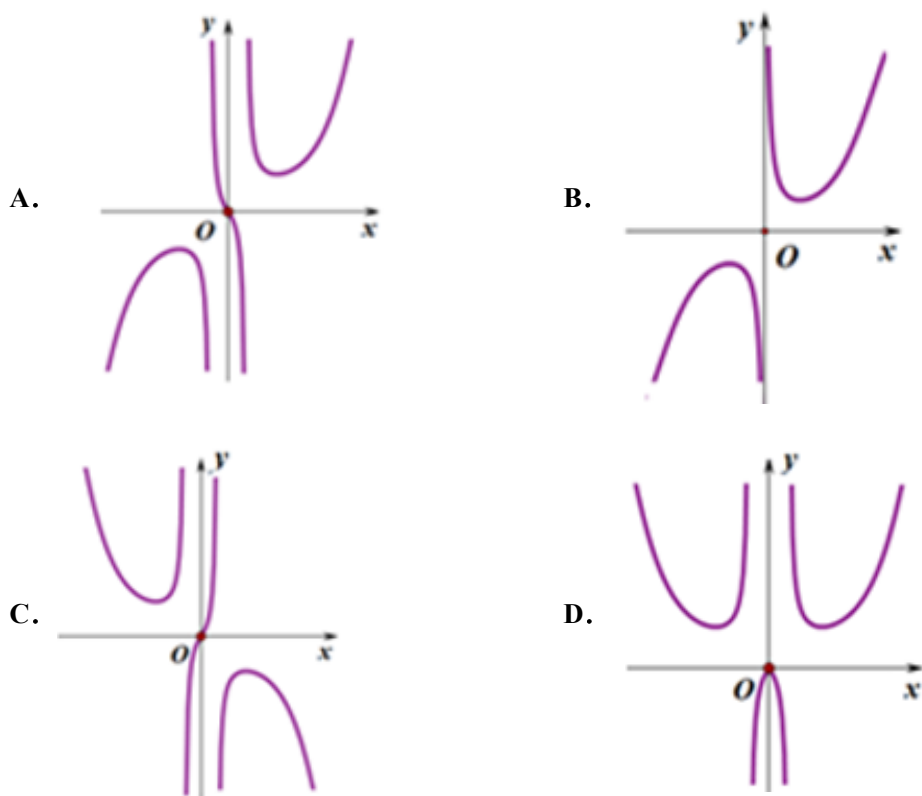
的概率为

- A. $\frac{\pi}{8}$ B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{1}{2+\pi}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}+\pi}$

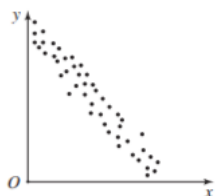
5. 函数 $f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x^3}$ 的大致图象是



6. 函数 $y=\frac{2^x-2^{-x}}{|x|-\cos x}$ 的图像大致为（ ）。

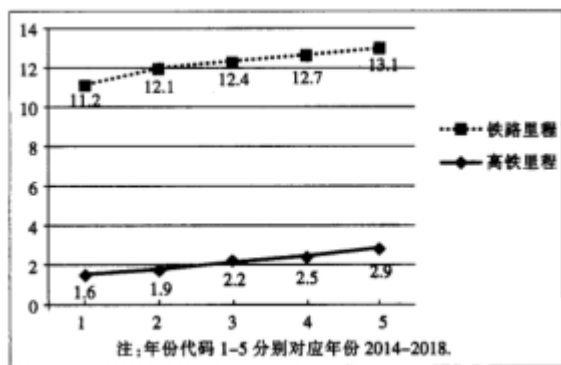


7. 为研究某咖啡店每日的热咖啡销售量 y 和气温 x 之间是否具有线性相关关系，统计该店 2017 年每周六的销售量及当天气温得到如图所示的散点图（ x 轴表示气温， y 轴表示销售量），由散点图可知 y 与 x 的相关关系为（ ）



- A. 正相关，相关系数 r 的值为 0.85
- B. 负相关，相关系数 r 的值为 0.85
- C. 负相关，相关系数 r 的值为 -0.85
- D. 正相关，相关系数 r 的值为 -0.85

8. 中国铁路总公司相关负责人表示，到 2018 年底，全国铁路营业里程达到 13.1 万公里，其中高铁营业里程 2.9 万公里，超过世界高铁总里程的三分之二，下图是 2014 年到 2018 年铁路和高铁运营里程（单位：万公里）的折线图，以下结论不正确的是（ ）



- A. 每相邻两年相比较，2014 年到 2015 年铁路运营里程增加最显著
- B. 从 2014 年到 2018 年这 5 年，高铁运营里程与年价正相关
- C. 2018 年高铁运营里程比 2014 年高铁运营里程增长 80% 以上
- D. 从 2014 年到 2018 年这 5 年，高铁运营里程数依次成等差数列

9. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知 $4b \cos B \sin C = \sqrt{3}c$ ，则 $B =$ ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3}$

10. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ ，且 $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \perp (2\vec{a} - \vec{b})$ ，则实数 λ 的值为 ()

- A. -7 B. -3 C. 2 D. 3

11. 已知复数 $(1 + i)(i + i)$ 为纯虚数 (i 为虚数单位)，则实数 $i =$ ()

- A. -1 B. 1 C. 0 D. 2

12. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x (\omega > 0)$ ， $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = 2$ 的两个相邻交点的距离等于 π ，则 $f(x)$ 的一条对称轴是 ()

- A. $x = -\frac{\pi}{12}$ B. $x = \frac{\pi}{12}$ C. $x = -\frac{\pi}{3}$ D. $x = \frac{\pi}{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $y = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的值域为_____.

14. 已知复数 $z = (m^2 - 2) + (m - 1)i$ 对应的点位于第二象限，则实数 m 的范围为_____.

15. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ y \leq 3x - 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$ ，则 $z = \frac{y}{x}$ 的最小值为_____.

16. 已知正方形 $ABCD$ 边长为 3，空间中的动点 P 满足 $PA = 2$ ， $PC = 2PD$ ，则三棱锥 $A-PCD$ 体积的最大值是_____.

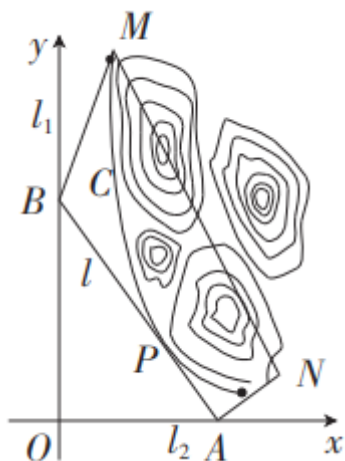
三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = (1 + \sqrt{3} \tan x) \cos^2 x$.

(I) 若 α 是第二象限角, 且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 $f(\alpha)$ 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 的定义域和值域.

18. (12 分) 某贫困地区几个丘陵的外围有两条相互垂直的直线型公路 l_1, l_2 , 以及铁路上的一条应开凿的直线穿山隧道 MN , 为进一步改善山区的交通现状, 计划修建一条连接两条公路 l_1, l_2 和山区边界的直线型公路 l , 以 l_1, l_2 所在的直线分别为 x 轴, y 轴, 建立平面直角坐标系 xOy , 如图所示, 山区边界曲线为 $C: y = \frac{100}{x} (x > 0)$, 设公路 l 与曲线 C 相切于点 P , P 的横坐标为 t .



(1) 当 t 为何值时, 公路 l 的长度最短? 求出最短长度;

(2) 当公路 l 的长度最短时, 设公路 l 交 x 轴, y 轴分别为 A , B 两点, 并测得四边形 $ABMN$ 中, $\angle BAN = \frac{\pi}{3}$, $\angle MBA = \frac{2}{3}\pi$, $AN = 10\sqrt{2}$ 千米, $BM = 15\sqrt{3}$ 千米, 求应开凿的隧道 MN 的长度.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{ax^2 + x}{x+1} - \ln(x+1) (a > 0)$, 且曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = \frac{1}{2}x + b$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值点与极值.

(2) 当 $k \geq \frac{1}{2}$, $x \in [0, +\infty)$ 时, 证明: $f(x) \leq kx^2$.

20. (12 分) 已知 $f(x) = |x + a| (a \in \mathbb{R})$.

(1) 若 $f(x) \geq |2x - 1|$ 的解集为 $[0, 2]$, 求 a 的值;

(2) 若对任意 $x \in \mathbb{R}$, 不等式 $f'(x) = 1 + \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2m + \frac{1}{6m} \\ y = 2m - \frac{1}{6m} \end{cases} \quad (m \text{ 为参数}),$$
 以坐标点 O 为极点, x 轴

的非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$.

(1) 求直线 l 的直角坐标方程和曲线 C 的普通方程;

(2) 已知点 $M(2, 0)$, 若直线 l 与曲线 C 相交于 P, Q 两点, 求 $\frac{1}{|MP|} + \frac{1}{|MQ|}$ 的值.

22. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: 对任意 $u, v \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_{uv} = a_u + a_v + 2$.

(1) 若 $a_2 + a_3 + a_6 + a_9 = 2$, 求 a_{18} 的值;

(2) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 设 $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 3$, 求证: 若 $a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots$ 成等差数列, 则 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 也成等差数列.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

在长方体中 $AB \parallel C_1D_1$, 得 DD_1 与平面 ABC_1D_1 交于 D_1 , 过 D 做 $DO \perp AD_1$ 于 O , 可证 $DO \perp$ 平面 ABC_1D_1 , 可得 $\angle DD_1A$ 为所求解的角, 解 $Rt\triangle ADD_1$, 即可求出结论.

【详解】

在长方体中 $AB \parallel C_1D_1$, 平面 ABC_1 即为平面 ABC_1D_1 ,

过 D 做 $DO \perp AD_1$ 于 O , $\because AB \perp$ 平面 AA_1D_1D ,

$DO \subset$ 平面 AA_1D_1D , $\therefore AB \perp DO$, $AB \perp AD_1 = D$,

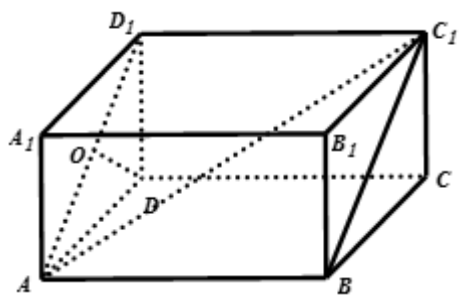
$\therefore DO \perp$ 平面 ABC_1D_1 , $\therefore \angle DD_1A$ 为 DD_1 与平面 ABC_1 所成角,

在 $Rt\triangle ADD_1$, $DD_1 = AA_1 = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{2}$, $\therefore AD_1 = \sqrt{5}$,

$$\therefore \cos \angle DD_1A = \frac{DD_1}{AD_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

$\therefore$ 直线 DD_1 与平面 ABC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

故选:C.



【点睛】

本题考查直线与平面所成的角，定义法求空间角要体现“做”“证”“算”，三步骤缺一不可，属于基础题.

2、 B

【解析】

由 $y = 2^x$ 的单调性，可判断 p 是真命题；分类讨论打开绝对值，可得 q 是假命题，依次分析即得解

【详解】

由函数 $y = 2^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，知命题 p 是真命题.

对于命题 q ，当 $x+1 \geq 0$ ，即 $x \geq -1$ 时， $|x+1| = x+1 > x$ ；

当 $x+1 < 0$ ，即 $x < -1$ 时， $|x+1| = -x-1$ ，

由 $-x-1 \leq x$ ，得 $x = -\frac{1}{2}$ ，无解，

因此命题 q 是假命题. 所以 $(\neg p) \vee q$ 为假命题，A 错误；

$p \vee q$ 为真命题，B 正确；

$p \wedge q$ 为假命题，C 错误；

$p \wedge (\neg q)$ 为真命题，D 错误.

故选：B

【点睛】

本题考查了命题的逻辑连接词，考查了学生逻辑推理，分类讨论，数学运算的能力，属于中档题.

3、B

【解析】

由 $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ 得 $a_1(1 + q^2 + q^4) = 21 \therefore 1 + q^2 + q^4 = 7 \therefore q^2 = 2 \therefore a_3 + a_5 + a_7 = q^2(a_1 + a_3 + a_5) = 2 \times 21 = 42$ ，选 B.

4、A

【解析】

画出不等式组表示的区域 Ω ，求出其面积，再得到 $x^2 + y^2 \leq 2$ 在区域 Ω 内的面积，根据几何概型的公式，得到答案.

【详解】

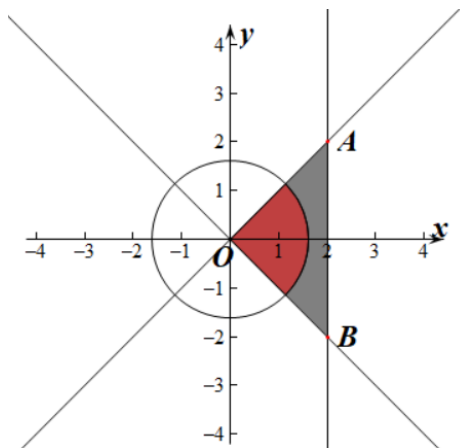
画出 $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x + y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$ 所表示的区域 Ω ，易知 $A(2, 2), B(2, -2)$ ，

所以 $\triangle AOB$ 的面积为 4，

满足不等式 $x^2 + y^2 \leq 2$ 的点，在区域 Ω 内是一个以原点为圆心， $\sqrt{2}$ 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆面，其面积为 $\frac{\pi}{2}$ ，

由几何概型的公式可得其概率为 $P = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$ ，

故选 A 项.



【点睛】

本题考查由约束条件画可行域，求几何概型，属于简单题.

5、A

【解析】

利用函数的对称性及函数值的符号即可作出判断.

【详解】

由题意可知函数 $f(x)$ 为奇函数，可排除 B 选项；

当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 可排除 D 选项;

当 $x = 1$ 时, $f(1) = \ln 2$, 当 $x = 3$ 时, $f(3) = \frac{\ln 10}{27}$, $\ln 2 > \frac{\ln 10}{27}$,

即 $f(1) > f(3)$, 可排除 C 选项,

故选: A

【点睛】

本题考查了函数图象的判断, 函数对称性的应用, 属于中档题.

6、A

【解析】

本题采用排除法:

由 $f\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ 排除选项 D;

根据特殊值 $f\left(\frac{5\pi}{2}\right) > 0$ 排除选项 C;

由 $x > 0$, 且 x 无限接近于 0 时, $f(x) < 0$ 排除选项 B;

【详解】

对于选项 D: 由题意可得, 令函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{|x| - \cos x}$,

则 $f\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{2^{\frac{5\pi}{2}} - 2^{-\frac{5\pi}{2}}}{\frac{5\pi}{2}}$, $f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{2^{\frac{5\pi}{2}} - 2^{-\frac{5\pi}{2}}}{\frac{5\pi}{2}}$;

即 $f\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$. 故选项 D 排除;

对于选项 C: 因为 $f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{2^{\frac{5\pi}{2}} - 2^{-\frac{5\pi}{2}}}{\frac{5\pi}{2}} > 0$, 故选项 C 排除;

对于选项 B: 当 $x > 0$, 且 x 无限接近于 0 时, $|x| - \cos x$ 接近于 $-1 < 0$, $2^x - 2^{-x} > 0$, 此时 $f(x) < 0$. 故选项 B 排除;

故选项: A

【点睛】

本题考查函数解析式较复杂的图象的判断; 利用函数奇偶性、特殊值符号的正负等有关性质进行逐一排除是解题的关键; 属于中档题.

7、C

【解析】

根据正负相关的概念判断.

【详解】

由散点图知 y 随着 x 的增大而减小, 因此是负相关. 相关系数为负.

故选: C.

【点睛】

本题考查变量的相关关系, 考查正相关和负相关的区别. 掌握正负相关的定义是解题基础.

8、D

【解析】

由折线图逐项分析即可求解

【详解】

选项 A , B 显然正确;

对于 C , $\frac{2.9-1.6}{1.6} > 0.8$, 选项 C 正确;

1.6, 1.9, 2.2, 2.5, 2.9 不是等差数列, 故 D 错.

故选: D

【点睛】

本题考查统计的知识, 考查数据处理能力和应用意识, 是基础题

9、D

【解析】

根据正弦定理得到 $4 \sin B \cos B \sin C = \sqrt{3} \sin C$, 化简得到答案.

【详解】

由 $4b \cos B \sin C = \sqrt{3}c$, 得 $4 \sin B \cos B \sin C = \sqrt{3} \sin C$,

$\therefore \sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore 2B = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$, $\therefore B = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{\pi}{3}$.

故选: D

【点睛】

本题考查了正弦定理解三角形, 意在考查学生的计算能力.

10、D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/278040064111006113>