重难点专题32 立体几何压轴小题（体积、角度、外接球等）九大题型汇总

01 内容速览

02 重难点题型归纳

题型1 体积最值

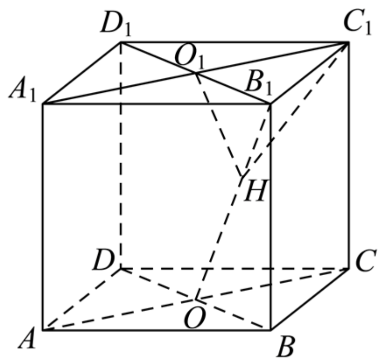
【例题1】（2021·全国·高三专题练习）在棱长为3的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是AA_1的中点，P是底面$ABCD$所在平面内一动点，设PD_1，PE与底面$ABCD$所成的角分别为θ_1，θ_2（θ_1，θ_2均不为0），若$\theta_1=\theta_2$，则三棱锥$P-BB_1C_1$体积的最小值是

A．$\frac{9}{2}$　B．$\frac{5}{2}$　C．$\frac{3}{2}$　D．$\frac{5}{4}$

【变式1-1】1．（2021·全国·校联考二模）在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=4$，$BC=3$，$AA_1=5$，M，N分别在线段AA_1和AC上，$|MN|=2$，则三棱锥$D-MNC_1$的体积最小值为

A．4　B．$3\sqrt{2}-1$　C．$4\sqrt{3}-2$　D．$6\sqrt{2}-4$

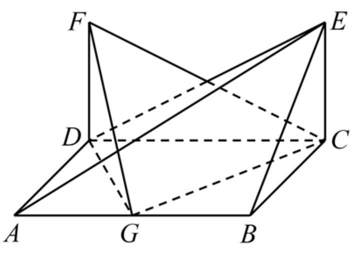
【变式1-1】2．（2021·全国·高三专题练习）如图，已知直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的所有棱长等于1，$\angle ABC=60°$，O和O_1分别是上下底面对角线的交点，H在线段OB_1上，$OH=3HB_1$，点M在线段BD上移动，则三棱锥$M-C_1O_1H$的体积最小值为______.



【变式1-1】3. （2023春·广东·高三校联考阶段练习）设M，N，P分别是棱长为2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱CD，C_1D_1，A_1B_1的中点，R为BD上一点，且R不与D重合，且M，N，P，R在同一个表面积为S的球面上，记三棱锥$N-MPR$的体积为V，则$\frac{S}{V}$的最小值是________.

【变式1-1】4.（2020·全国·高三竞赛）一个圆锥和一个圆柱，下底面在同一平面上，它们有公共的内切球.记圆锥的体积为V_1 ,圆柱的体积为V_2 ,且$V_1=kV_2$.则k的最小值是________.

【变式1-1】5.（2021·福建·统考一模）如图，在四棱锥$E-ABCD$中，$EC\perp$底面$ABCD$，$FD//EC$，底面$ABCD$为矩形，G为线段AB的中点，$CG\perp DG$，$CD=2$，$DF=CE$，BE与底面$ABCD$所成角为$45°$，则四棱锥$E-ABCD$与三棱锥$F-CDG$的公共部分的体积为________.



题型2 线线角最值取值范围

划重点

平移线段法是求异面直线所成角的常用方法，其基本思路是通过平移直线，把异面问题化归为共面问题来解决，具体步骤如下：

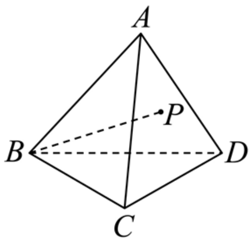
①平移：平移异面直线中的一条或两条，作出异面直线所成的角；

②认定：证明作出的角就是所求异面直线所成的角；

③计算：求该角的值，常利用解三角形；

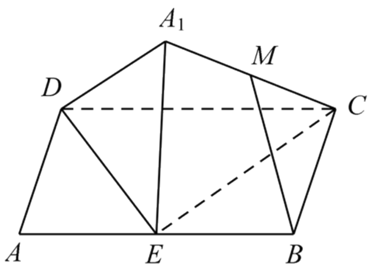
④取舍：由异面直线所成的角的取值范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，当所作的角为钝角时，应取它的补角作为两条异面直线所成的角．

【例题2】（2023·全国·高三专题练习）在三棱锥$A-BCD$中，$BC=BD=AC=AD=10$，$AB=6$，$CD=16$，点P在平面ACD内，且$BP=\sqrt{30}$，设异面直线BP与CD所成角为α，则$\sin\alpha$的最小值为(　　)



A．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　D．$\frac{\sqrt{5}}{5}$

【变式2-1】1．（2022·全国·高三专题练习）如图，矩形$ABCD$中，$AB=4,BC=2$，E为边AB的中点，沿DE将ΔADE折起，点A折至A_1处（$A_1\notin$平面$ABCD$），若M为线段A_1C的中点，则在ΔADE折起过程中，下列说法错误的是（　　）



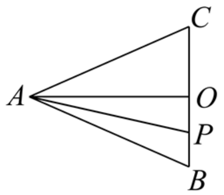
A．始终有MB //平面A_1DE

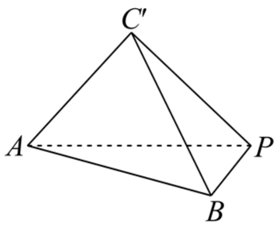
B．不存在某个位置，使得$A_1C \perp$平面A_1DE

C．三棱锥A_1-ADE体积的最大值是$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D．一定存在某个位置，使得异面直线BM与A_1E所成角为30°

【变式 2-1】2. （2021·全国·高三专题练习）如图，已知等边三角形ABC中，$AB=AC$，O为BC的中点，动点P在线段OB上（不含端点)，记$\angle APC=\theta$，现将ΔAPC沿AP折起至$\Delta APC'$，记异面直线BC'与AP所成的角为α，则下列一定成立的是



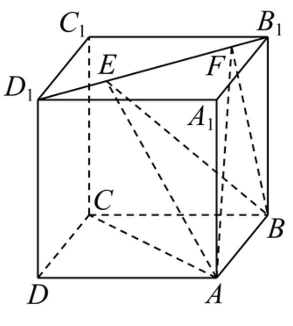


A．$\theta>\alpha$　　B．$\theta<\alpha$C．$\theta+\alpha>\frac{\pi}{2}$ D．$\theta+\alpha<\frac{\pi}{2}$

【变式 2-1】3. （2020·全国·高三专题练习）将正方形$ABCD$沿对角线AC折起，并使得平面ABC垂直于平面ACD，直线AB与CD所成的角为

A．90°　B．60°　C．45°　D．30°

【变式 2-1】4. （2021·浙江·校联考二模）如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 1，线段B_1D_1上有两个动点E,F，且$EF=0.6$，则当E,F移动时，下列结论中错误的是（　　）



A．$AE//$平面C_1BD

B．四面体$ACEF$的体积为定值

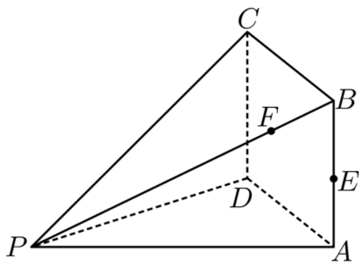
C．三棱锥$A-BEF$的体积为定值

D．异面直线AF、BE所成的角为定值

【变式 2-1】5.（2020·全国·高三专题练习）将正方形$ABCD$沿对角线AC折起，当以A,B,C,D四点为顶点的三棱锥体积最大时，异面直线AD与BC所成的角为

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

【变式 2-1】6.（2021·全国·统考一模）如图所示的四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$与侧面PAD垂直，且四边形$ABCD$为正方形，$AD=PD=PA$，点E为边AB的中点，点F在边BP上，且$BF=\frac{1}{4}BP$，过C，E，F三点的截面与平面PAD的交线为l，则异面直线PB与l所成的角为（　）



A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

【变式 2-1】7.（2023·全国·高三专题练习）a，b 为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在直线与 a，b 都垂直，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，有下列结论：

①当直线 AB 与 a 成 60°角时，AB 与 b 成 30°角；

②当直线 AB 与 a 成 60°角时，AB 与 b 成 60°角；

③直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45°；

④直线 AB 与 a 所成角的最大值为 60°.

其中正确的是＿＿＿＿.（填写所有正确结论的编号）

题型 3 线面角最值取范围

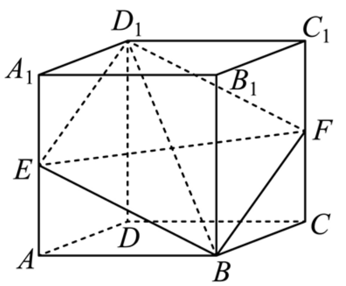
【例题 3】（2020·全国·高三专题练习）在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F分别为棱AA_1、BB_1的中点，M为棱A_1B_1（含端点）上的任一点，则直线ME与平面D_1EF

所成角的正弦值的最小值为________.

【变式 3-1】1. （2021·浙江绍兴·校联考二模）点P为棱长是 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的内切球O球面上的动点，点M为B_1C_1的中点，若满足$DP\perp BM$，则B_1P与面CDP所成角的正切值的最小值是

A．$\frac{1}{6}$　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　C．$\frac{\sqrt{14}-2}{5}$　D．$\frac{\sqrt{14}}{7}$

【变式 3-1】2. （2021·全国·高三专题练习）如图所示，直平行六面体$ABCD-A_1BC_1D_1$的所有棱长都为 2，$\angle DAB=60^{\circ}$，过体对角线BD_1的截面 S 与棱AA_1和CC_1分别交于点 E、F，给出下列命题中：



①四边形BED_1F的面积最小值为$2\sqrt{6}$；

②直线 EF 与平面BCC_1B_1所成角的最大值为$\frac{\pi}{4}$；

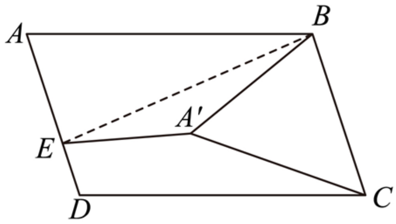
③四棱锥B_1-BED_1F的体积为定值；

④点B_1到截面 S 的距离的最小值为$\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

其中，所有真命题的序号为（　　）

A．①②③　B．①③④　C．①③ D．②④

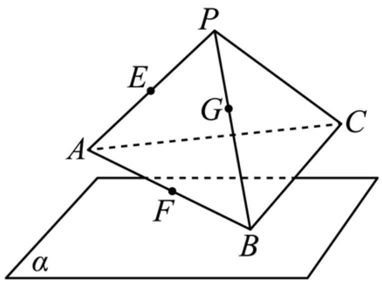
【变式 3-1】3. （2022·全国·高三专题练习）在矩形$ABCD$中，$AB=4$，$AD=3$，E为边AD上的一点，$DE=1$，现将ΔABE沿直线BE折成$\Delta A'BE$，使得点A'在平面$BCDE$上的射影在四边形$BCDE$内（不含边界），设二面角$A'-BE-C$的大小为θ，直线$A'B$，$A'C$与平面$BCDE$所成的角分别为α,β，则



A．$\beta<\alpha<\theta$ B．$\beta<\theta<\alpha$

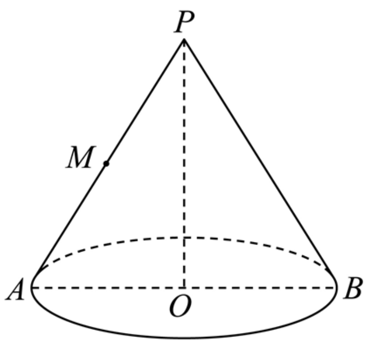
C．$\alpha<\theta<\beta$ D．$\alpha<\beta<\theta$

【变式 3-1】4. （2021·全国·高三专题练习）已知正三棱锥$P-ABC$（底面是正三角形，顶点在底面的射影是正三角形的中心），直线$BC//$平面α，E,F,G分别是棱PA,AB,PB上一点（除端点），将正三棱锥$P-ABC$绕直线BC旋转一周，则能与平面α所成的角取遍区间$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$一切值的直线可能是



A．EF　B．FG　C．EG　D．EF,FG,EG中的任意一条

【变式 3-1】5.（2019·河南郑州·校联考一模）已知圆锥的母线长为 2r，底面圆半径长为 r，圆心为 O，点 M 是母线 PA 的中点，AB 是底面圆的直径.若点 C 是底面圆周上一点，且 OC 与母线 PB 所成的角等于$60°$，则 MC 与底面所成的角的正弦值为(　　)



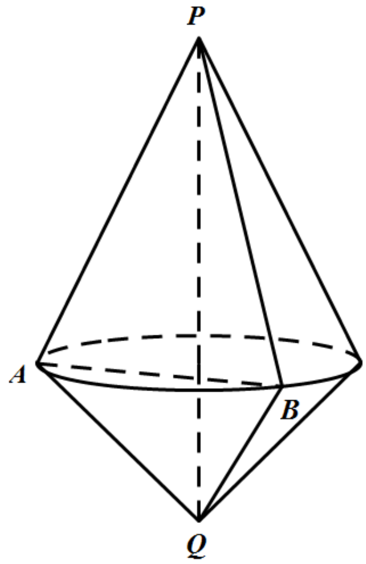
A．$\frac{1}{2}$

B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

D．$\frac{1}{2}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【变式 3-1】6.（2021 秋·黑龙江佳木斯·高三佳木斯一中校考阶段练习）下图中的几何体是由两个有共同底面的圆锥组成．已知两个圆锥的顶点分别为 P、Q，高分别为 2、1，底面半径为 1．A 为底面圆周上的定点，B 为底面圆周上的动点（不与 A 重合）. 下列四个结论:



①三棱锥$P-ABQ$体积的最大值为$\frac{1}{2}$；

②直线 PB 与平面 PAQ 所成角的最大值为$\frac{\pi}{6}$；

③当直线 BQ 与 AP 所成角最小时，其正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$；

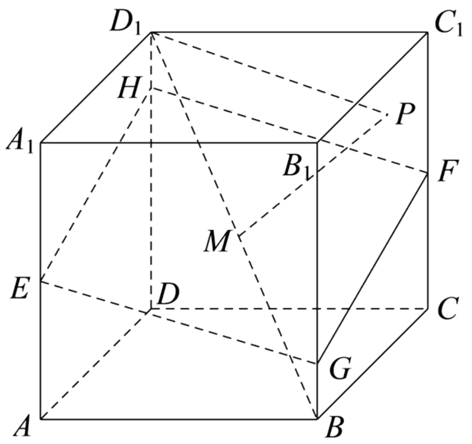
④直线 BQ 与 AP 所成角的最大值为$\frac{\pi}{2}$；

其中正确的结论有__________．（写出所有正确结论的编号）

【变式 3-1】7.（2021·全国·高三专题练习）已知圆锥的顶点为S，O为底面中心，A，B，C为底面圆周上不重合的三点，AB为底面的直径，$SA=AB$，M为SA的中点.设直线MC与平面SAB所成角为α，则$\sin\alpha$的最大值为__________.

题型 4 面面角最值取值范围

【例题4】（2023·全国·高三专题练习）如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，E,F分别是棱AA_1,CC_1的中点，过点E,F的平面分别与直线BB_1,DD_1,BD_1交于点G,H,M，P为侧面BCC_1B_1（含边界）上的一个动点.给出以下命题：



①四边形$EGFH$一定为菱形；

②四棱锥C_1-EGFH的体积为定值；

③平面$EGFH$与平面$ABCD$所成的角不大于$\frac{\pi}{4}$；

④$|PD_1|+|PM|$的最小值为$\sqrt{11}$.

其中正确命题的序号是______.

【变式4-1】1. （2020·浙江·高三统考期末）已知直三棱柱 ABC﹣A'B'C'的底面是正三角形，侧棱长与底面边长相等，P是侧棱AA'上的点（不含端点）. 记直线PB与直线AC所成的角为α，直线PB与直线B'C所成的角为β，二面角P﹣B'B﹣C的平面角为γ，则（　　）

A．α＞β＞γ　B．α＜β＜γ　C．α＞γ＞β　D．β＞α＞γ

【变式4-1】2. （2020秋·新疆昌吉·高三校考期中）已知四边形$ABCD$中，$\angle A=\angle C=90°$，$BC=CD$，在将ΔABD沿着BD翻折成三棱锥$A-BCD$的过程中，直线AB与平面BCD所成角的角均小于直线AD与平面BCD所成的角. 设二面角$A-BC-D$，$A-DC-B$的大小分别为α,β，则