

四川省泸州市龙马潭区天立学校 2025 届高三下学期联合数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知双曲线的中心在原点且一个焦点为 $F(\sqrt{7}, 0)$ ，直线 $y = x - 1$ 与其相交于 M, N 两点，若 MN 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$ ，则此双曲线的方程是

- A. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$ B. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$
C. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$ D. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1$

2. 关于圆周率 π ，数学发展史上出现过许多很有创意的求法，如著名的浦丰实验和查理斯实验。受其启发，我们也可以通过设计下面的实验来估计 π 的值：先请全校 m 名同学每人随机写下一个都小于 1 的正实数对 (x, y) ；再统计两数能与 1 构成钝角三角形三边的数对 (x, y) 的个数 a ；最后再根据统计数 a 估计 π 的值，那么可以估计 π 的值约为 ()

- A. $\frac{4a}{m}$ B. $\frac{a+2}{m}$ C. $\frac{a+2m}{m}$ D. $\frac{4a+2m}{m}$

3. 设 $f(x) = |\ln x|$ ，若函数 $g(x) = f(x) - ax$ 在区间 $(0, e^2)$ 上有三个零点，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ B. $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$ C. $\left(\frac{2}{e^2}, \frac{2}{e}\right)$ D. $\left(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$

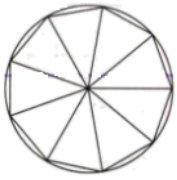
4. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 15$ 且 $3a_{n+1} = 3a_n - 2$ ，则使 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 的 k 的值为 ()

- A. 21 B. 22 C. 23 D. 24

5. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，点 $P(x, y)$ 为该抛物线上的动点，若点 $A(-1, 0)$ ，则 $\frac{PF}{PA}$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. 刘徽(约公元 225 年-295 年)，魏晋期间伟大的数学家，中国古典数学理论的奠基人之一他在割圆术中提出的，“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”，这可视为中国古代极限观念的佳作，割圆术的核心思想是将一个圆的内接正 n 边形等分成 n 个等腰三角形(如图所示)，当 n 变得很大时，这 n 个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积，运用割圆术的思想，得到 $\sin 2^\circ$ 的近似值为 ()



- A. $\frac{\pi}{90}$ B. $\frac{\pi}{180}$ C. $\frac{\pi}{270}$ D. $\frac{\pi}{360}$

7. 一个正四棱锥形骨架的底边边长为2，高为 $\sqrt{2}$ ，有一个球的表面与这个正四棱锥的每个边都相切，则该球的表面积为（ ）

- A. $4\sqrt{3}\pi$ B. 4π C. $4\sqrt{2}\pi$ D. 3π

8. 三国时代吴国数学家赵爽所注《周髀算经》中给出了勾股定理的绝妙证明.下面是赵爽的弦图及注文，弦图是一个以勾股形之弦为边的正方形，其面积称为弦实.图中包含四个全等的勾股形及一个小正方形，分别涂成红（朱）色及黄色，其面积称为朱实、黄实，利用 $2 \times \text{勾} \times \text{股} + (\text{股} - \text{勾})^2 = 4 \times \text{朱实} + \text{黄实} = \text{弦实}$ ，化简，得 $\text{勾}^2 + \text{股}^2 = \text{弦}^2$.设勾股形中勾股比为 $1:\sqrt{3}$ ，若向弦图内随机抛掷1000颗图钉（大小忽略不计），则落在黄色图形内的图钉数大约为（ ）



- A. 134 B. 866 C. 300 D. 500

9. 已知数列 $\{\square_n\}$ 满足： $\square_n = \begin{cases} 2, & n \leq 5 \\ \square_1 \square_2 \dots \square_{n-1} - 1, & n \geq 6 \end{cases} (n \in \mathbb{N}^*)$.若正整数 $n (n \geq 5)$ 使得

$\square_1^2 + \square_2^2 + \dots + \square_n^2 = \square_1 \square_2 \dots \square_n$ 成立，则 $n =$ （ ）

- A. 16 B. 17 C. 18 D. 19

10. 对于定义在 R 上的函数 $y = f(x)$ ，若下列说法中有且仅有一个是错误的，则错误的一个是（ ）

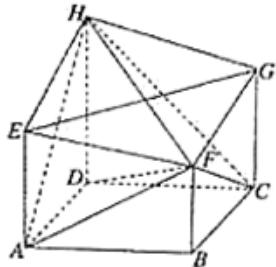
- A. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是减函数 B. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
C. $f(x)$ 不是函数的最小值 D. 对于 $x \in R$ ，都有 $f(x+1) = f(1-x)$

11. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（ ）

A, B , 则线段 AB 长度的取值范围为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

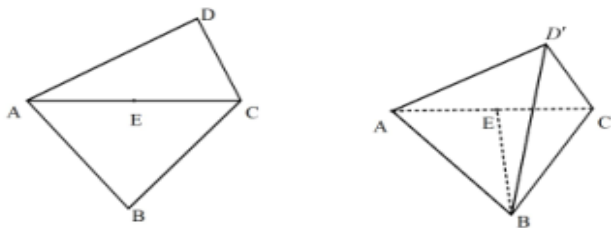
17. (12 分) 底面 $ABCD$ 为菱形的直四棱柱，被一平面截取后得到如图所示的几何体.若 $DA = DH = DB = 4$, $AE = CG = 3$.



(1) 求证: $EG \perp DF$;

(2) 求二面角 $A-HF-C$ 的正弦值.

18. (12 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC = \frac{\pi}{2}$, $AD = AB = BC = 2CD$, $AE = EC$, 沿对角线 AC 将 $\triangle ACD$ 翻折成 $\triangle ACD'$, 使得 $BD' = BC$.



(1) 证明: $BE \perp CD'$;

(2) 求直线 BE 与平面 ABD' 所成角的正弦值.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^2 + ax + 1$, $g(x) = \ln x - a (a \in R)$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的极值;

(2) 若存在与函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图象都相切的直线, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 已知 $a \cos B = (4c - b) \cos A$.

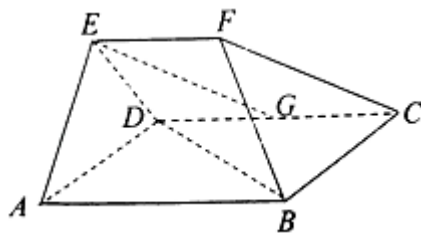
(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 若 $b = 4$, 点 M 是线段 BC 的中点, $|\vec{AM}| = \sqrt{10}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

21. (12 分) 在① $a = 2$, ② $a = b = 2$, ③ $b = c = 2$ 这三个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 求 $\triangle ABC$ 的面积的值 (或最大值). 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 三边 a, b, c 与面积 S 满足关系式 $4S = b^2 + c^2 - a^2$, 且_____, 求 $\triangle ABC$ 的面积的值 (或最大值).

22. (10 分) 在以 $ABCDEF$ 为顶点的五面体中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = AE = ED = 2EF$, $EF \parallel AB$

，点 G 为 CD 中点，平面 $EAD \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 证明: $BD \perp EG$;

(2) 若三棱锥 $V_{E-FBC} = \frac{1}{2}$, 求菱形 $ABCD$ 的边长.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. D

【解析】

根据点差法得 $\frac{2}{a^2} = \frac{5}{b^2}$ ，再根据焦点坐标得 $a^2 + b^2 = 7$ ，解方程组得 $a^2 = 2$ ， $b^2 = 5$ ，即得结果。

【详解】

设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，由题意可得 $a^2 + b^2 = 7$ ，设 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，则 MN 的中点为

$$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right), \text{ 由 } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ 且 } \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \text{ 得 } \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} = \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2}, \frac{2 \times (-\frac{2}{3})}{a^2} =$$

$$\frac{2 \times (-\frac{5}{3})}{b^2}, \text{ 即 } \frac{2}{a^2} = \frac{5}{b^2}, \text{ 联立 } a^2 + b^2 = 7, \text{ 解得 } a^2 = 2, b^2 = 5, \text{ 故所求双曲线的方程为 } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{5} = 1. \text{ 故选 D.}$$

本题主要考查利用点差法求双曲线标准方程，考查基本求解能力，属于中档题。

2. D

【解析】

由试验结果知 m 对 $0 \sim 1$ 之间的均匀随机数 x, y ，满足 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ ，面积为 1，再计算构成钝角三角形三边的数对

(x, y) ，满足条件的面积，由几何概型概率计算公式，得出所取的点在圆内的概率是圆的面积比正方形的面积，即可估计 π 的值。

【详解】

解：根据题意知， m 名同学取 m 对都小于 1 的正实数对 (x, y) ，即 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ ，

对应区域为边长为 1 的正方形，其面积为 1，

若两个正实数 x, y 能与 1 构成钝角三角形三边，则有 $\begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ x + y > 1 \\ 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ ，

其面积 $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ；则有 $\frac{a}{m} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ ，解得 $\pi = \frac{4a + 2m}{m}$

故选：D。

本题考查线性规划可行域问题及随机模拟法求圆周率的几何概型应用问题。

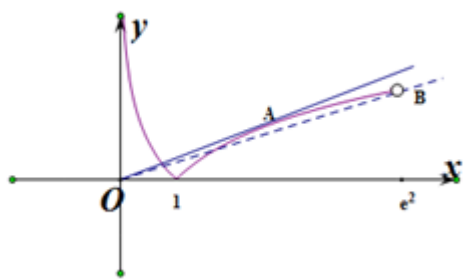
线性规划可行域是一个封闭的图形，可以直接解出可行域的面积；求解与面积有关的几何概型时，关键是弄清某事件对应的面积，必要时可根据题意构造两个变量，把变量看成点的坐标，找到试验全部结果构成的平面图形，以便求解。

3. D

【解析】

令 $g(x) = f(x) - ax = 0$ ，可得 $f(x) = ax$ 。

在坐标系内画出函数 $f(x) = |\ln x|$ 的图象（如图所示）。



当 $x > 1$ 时， $f(x) = \ln x$ 。由 $y = \ln x$ 得 $y' = \frac{1}{x}$ 。

设过原点的直线 $y = ax$ 与函数 $y = \ln x$ 的图象切于点 $A(x_0, \ln x_0)$ ，

$$\text{则有 } \begin{cases} \ln x_0 = ax_0 \\ a = \frac{1}{x_0} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = e \\ a = \frac{1}{e} \end{cases}.$$

所以当直线 $y = ax$ 与函数 $y = \ln x$ 的图象切时 $a = \frac{1}{e}$ 。

又当直线 $y = ax$ 经过点 $B(e^2, 2)$ 时，有 $2 = a \cdot e^2$ ，解得 $a = \frac{2}{e^2}$ 。

结合图象可得当直线 $y = ax$ 与函数 $f(x) = |\ln x|$ 的图象有 3 个交点时，实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$ 。

即函数 $g(x) = f(x) - ax$ 在区间 $(0, e^2)$ 上有三个零点时，实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{2}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$ 。选 D。

点睛：已知函数零点的个数（方程根的个数）求参数值（取值范围）的方法

(1)直接法：直接求解方程得到方程的根，再通过解不等式确定参数范围；

(2)分离参数法：先将参数分离，转化成求函数的值域问题加以解决；

(3)数形结合法：先对解析式变形，在同一平面直角坐标系中，画出函数的图象，然后数形结合求解，对于一些比较复杂的函数的零点问题常用此方法求解。

4. C

【解析】

因为 $a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}$ ，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差 $d = -\frac{2}{3}$ ， $a_1 = 15$ ，则 $a_n = 15 - \frac{2}{3}(n-1) = -\frac{2}{3}n + \frac{47}{3}$ ，所以由题设 $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ 可得 $(-\frac{2}{3}n + \frac{47}{3})(-\frac{2}{3}n + \frac{45}{3}) < 0 \Rightarrow \frac{45}{2} < n < \frac{47}{2}$ ，则 $n = 23$ ，应选答案 C.

5. B

【解析】

通过抛物线的定义，转化 $PF = PN$ ，要使 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 有最小值，只需 $\angle APN$ 最大即可，作出切线方程即可求出比值的最小值.

【详解】

解：由题意可知，抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线方程为 $x = -1$ ， $A(-1, 0)$ ，

过 P 作 PN 垂直直线 $x = -1$ 于 N ，

由抛物线的定义可知 $PF = PN$ ，连结 PA ，当 PA 是抛物线的切线时， $\frac{|PF|}{|PA|}$ 有最小值，则 $\angle APN$ 最大，即 $\angle PAF$

最大，就是直线 PA 的斜率最大，

设在 PA 的方程为： $y = k(x+1)$ ，所以 $\begin{cases} y = k(x+1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，

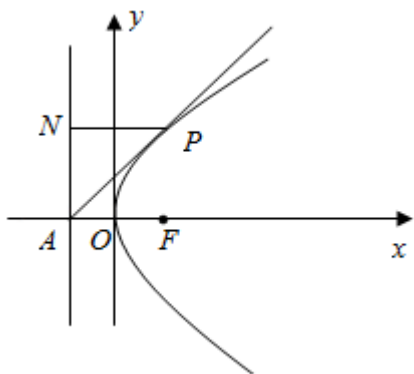
解得： $k^2x^2 + (2k^2 - 4)x + k^2 = 0$ ，

所以 $\Delta = (2k^2 - 4)^2 - 4k^4 = 0$ ，解得 $k = \pm 1$ ，

所以 $\angle NPA = 45^\circ$ ，

$\frac{|PF|}{|PA|} = \cos \angle NPA = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选： B .



本题考查抛物线的基本性质，直线与抛物线的位置关系，转化思想的应用，属于基础题.

6. A

【解析】

设圆的半径为 r , 每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$, 则每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 由割圆术可得圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 整理可得 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$, 当 $n=180$ 时即可为所求.

【详解】

由割圆术可知当 n 变得很大时, 这 n 个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积,

设圆的半径为 r , 每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$,

所以每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$,

所以圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$, 即 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$,

所以当 $n=180$ 时, 可得 $\sin \frac{360^\circ}{180} = \sin 2^\circ = \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$,

故选:A

本题考查三角形面积公式的应用, 考查阅读分析能力.

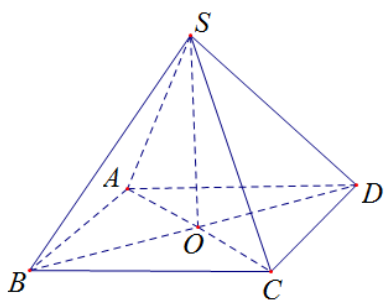
7. B

【解析】

根据正四棱锥底边边长为 2, 高为 $\sqrt{2}$, 得到底面的中心到各棱的距离都是 1, 从而底面的中心即为球心.

【详解】

如图所示:



因为正四棱锥底边边长为 2, 高为 $\sqrt{2}$,

所以 $OB = \sqrt{2}$, $SB = 2$,

O 到 SB 的距离为 $d = \frac{SO \times OB}{SB} = 1$,

同理 O 到 SC, SD, SA 的距离为 1,

所以 O 为球的球心，
 所以球的半径为：1，
 所以球的表面积为 4π 。

故选：B

本题主要考查组合体的表面积，还考查了空间想象的能力，属于中档题。

8. A

【解析】

分析：设三角形的直角边分别为 1， $\sqrt{3}$ ，利用几何概型得出图钉落在小正方形内的概率即可得出结论。

解析：设三角形的直角边分别为 1， $\sqrt{3}$ ，则弦为 2，故而大正方形的面积为 4，小正方形的面积为 $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$ 。

$$\therefore \text{图钉落在黄色图形内的概率为 } \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \text{落在黄色图形内的图钉数大约为 } 1000 \times \frac{2-\sqrt{3}}{2} \approx 134.$$

故选：A.

点睛：应用几何概型求概率的方法

建立相应的几何概型，将试验构成的总区域和所求事件构成的区域转化为几何图形，并加以度量。

(1)一般地，一个连续变量可建立与长度有关的几何概型，只需把这个变量放在数轴上即可；

(2)若一个随机事件需要用两个变量来描述，则可用这两个变量的有序实数对来表示它的基本事件，然后利用平面直角坐标系就能顺利地建立与面积有关的几何概型；

(3)若一个随机事件需要用三个连续变量来描述，则可用这三个变量组成的有序数组来表示基本事件，利用空间直角坐标系即可建立与体积有关的几何概型。

9. B

【解析】

由题意可得 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 2$ ， $a_6 = a_1 a_2 a_3 \dots a_5 - 1 = 2^5 - 1 = 31$ ， $n \geq 6$ 时， $a_1 a_2 \dots a_{n-1} = 1 + a_n$ ，

将 a_n 换为 $a_n + 1$ ，两式相除， $a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$ ， $n \geq 6$ ，

累加法求得 $a_6^2 + a_7^2 + \dots + a_n^2 = a_{n+1} - a_6 + n - 5$ 即有

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 20 + a_{n+1} - a_6 + n - 5 = a_{n+1} + n - 16$$
，结合条件，即可得到所求值。

【详解】

解: $a_n = \begin{cases} 2, & n=5 \\ a_1 a_2 \dots a_{n-1} - 1, & n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$,

即 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 2$, $a_6 = a_1 a_2 a_3 \dots a_5 - 1 = 2^5 - 1 = 31$,

$n=6$ 时, $a_1 a_2 \dots a_{n-1} = 1 + a_n$,

$a_1 a_2 \dots a_n = 1 + a_{n+1}$,

两式相除可得 $\frac{1+a_{n+1}}{1+a_n} = a_n$,

则 $a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$, $n \geq 6$,

由 $a_6^2 = a_7 - a_6 + 1$,

$a_7^2 = a_8 - a_7 + 1$,

...

$a_n^2 = a_{n+1} - a_n + 1$, $n \geq 5$,

可得 $a_6^2 + a_7^2 + \dots + a_n^2 = a_{n+1} - a_6 + n - 5$

$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 20 + a_{n+1} - a_6 + n - 5 = a_{n+1} + n - 16$,

且 $a_1 a_2 \dots a_n = 1 + a_{n+1}$,

正整数 $n (n \geq 5)$ 时, 要使得 $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_1 a_2 \dots a_n$ 成立,

则 $a_{n+1} + n - 16 = a_{n+1} + 1$,

则 $n = 17$,

故选: C.

本题考查与递推数列相关的方程的整数解的求法, 注意将题设中的递推关系变形得到新的递推关系, 从而可简化与数列相关的方程, 本题属于难题.

10. B

【解析】

根据函数对称性和单调性的关系, 进行判断即可.

【详解】

由 $f(x+1) = f(1-x)$ 得 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/278056050101006132>