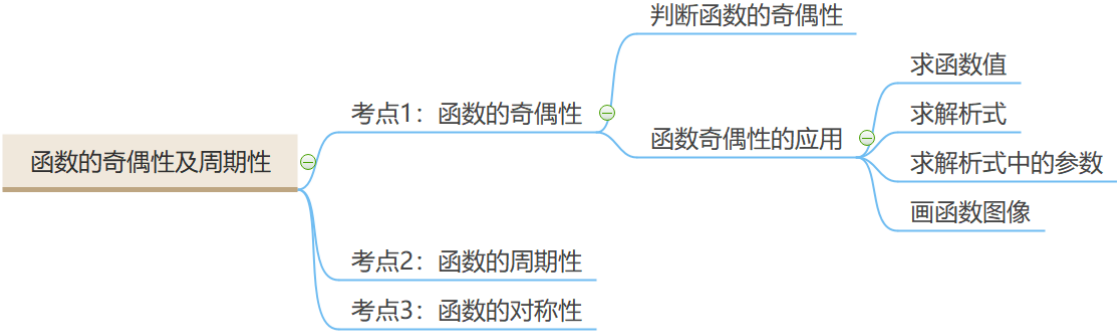


第 8 讲 函数的奇偶性及周期性



01

走进教材 · 自主回顾

1. 函数的奇偶性

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	一般地,如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x)=f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数	关于 <u>y 轴</u> 对称
奇函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x , 都有 $f(-x)=-f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数	关于 <u>原点</u> 对称

2. 函数的周期性

(1)周期函数: 对于函数 $y=f(x)$, 如果存在一个非零常数 T , 使得当 x 取定义域内的任何值时, 都有 $f(x+T)=f(x)$, 那么就称函数 $y=f(x)$ 为周期函数, 称 T 为这个函数的周期.

(2)最小正周期: 如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数, 那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

☺常用结论

1. 函数奇偶性的常用结论

(1)如果函数 $f(x)$ 是偶函数, 那么 $f(x)=f(|x|)$.

(2)奇函数在两个对称的区间上具有相同的单调性，偶函数在两个对称的区间上具有相反的单调性.

(3)在公共定义域内有：奇 $\pm$ 奇=奇，偶 $\pm$ 偶=偶，奇 $\times$ 奇=偶，偶 $\times$ 偶=偶，奇 $\times$ 偶=奇.

2. 函数周期性的常用结论

对 $f(x)$ 定义域内任一自变量的值 x :

(1)若 $f(x+a)=-f(x)$ ，则 $T=2a(a>0)$.

(2)若 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$ ，则 $T=2a(a>0)$.

(3)若 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$ ，则 $T=2a(a>0)$.

02 考点探究 · 题型突破

➤ 考点1 函数的奇偶性

[名师点睛]

1.函数具有奇偶性包括两个必备条件:

(1)定义域关于原点对称，这是函数具有奇偶性的必要不充分条件，所以首先考虑定义域.

(2)判断 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系. 在判断奇偶性时，可以转化为判断奇偶性的等价关系式 $f(x)+f(-x)=0$ (奇函数)或 $f(x)-f(-x)=0$ (偶函数)是否成立.

2.利用函数奇偶性可以解决的问题

(1)求函数值：将待求值利用奇偶性转化为求已知解析式的区间上的函数值.

(2)求解析式：将待求区间上的自变量转化到已知解析式的区间上，再利用奇偶性的定义求出.

(3)求解析式中的参数：利用待定系数法求解，根据 $f(x)\pm f(-x)=0$ 得到关于参数的恒等式，由系数的对等性得方程(组)，进而得出参数的值.

(4)画函数图像：利用函数的奇偶性可画出函数在其对称区间上的图像.

(5)求特殊值：利用奇函数的最大值与最小值之和为零可求一些特殊结构的函数值.

[典例]

1. (2022·全国·高三专题练习) 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \sqrt{9-x^2} + \sqrt{x^2-9};$$

$$(2) f(x) = (x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(3) f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{|x+3|-3}.$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1, & x > 0, \\ x^2 + 2x - 1, & x < 0; \end{cases}$$

【解】(1) 由 $\begin{cases} 9-x^2 \geq 0, \\ x^2-9 \geq 0 \end{cases}$ 得 $x = \pm 3$.

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $\{-3, 3\}$, 此时 $f(x) = 0$.

即 $f(x) = \pm f(-x)$. $\therefore f(x)$ 既是奇函数, 又是偶函数.

(2) 由 $\begin{cases} \frac{1-x}{1+x} \geq 0, \\ 1+x \neq 0 \end{cases}$ 得 $-1 < x \leq 1$.

$\therefore f(x)$ 的定义域 $(-1, 1]$ 不关于原点对称.

$\therefore f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

(3) 由 $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0, \\ |x+3|-3 \neq 0 \end{cases}$ 得 $-2 \leq x \leq 2$ 且 $x \neq 0$.

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $[-2, 0) \cup (0, 2]$, 关于原点对称. 此时, 有 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x+3)-3} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$,

$\therefore f(-x) = -f(x)$, $\therefore f(x)$ 是奇函数.

(4) 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x + 1$,

$-x < 0$, $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 1 = x^2 - 2x - 1 = -f(x)$;

当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x - 1$,

$-x > 0$, $f(-x) = -(-x)^2 + 2(-x) + 1 = -x^2 - 2x + 1 = -f(x)$.

所以 $f(x)$ 为奇函数.

2. (2022·山东·青岛二中高三期末) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 R 且满足 $y = f(x+2)$ 是奇

函数, 则 $f(2) = (\quad)$

A. -1

B. 1

C. 0

D. 2

【答案】C

【解析】

令 $g(x) = f(x+2)$ ，因为 $g(x) = f(x+2)$ 为奇函数，所以 $g(0) = f(2) = 0$ ，

故选：C.

3. (2022·河南·高三阶段练习) 已知 $f(x)$ 为奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 - 4^x + m$ ，则当

$x < 0$ 时， $f(x) =$ ()

A. $x^2 - 4^{-x} + 1$

B. $-x^2 - 4^{-x} - 1$

C. $-x^2 + 4^{-x} - 1$

D. $-x^2 + 4^{-x} + 1$

【答案】C

【解析】

因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0) = m - 1 = 0$ ，即 $m = 1$ 。

当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ， $f(x) = -f(-x) = -[(-x)^2 - 4^{-x} + 1] = -x^2 + 4^{-x} - 1$ 。

故选：C

4. (2022·江苏南通·模拟预测) 若函数 $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x - a}$ 为奇函数，则实数 a 的值为 ()

A. 1

B. 2

C. -1

D. ± 1

【答案】D

【解析】

由 $f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(-x) + f(x) = \frac{2^{-x} + a}{2^{-x} - a} + \frac{2^x + a}{2^x - a} = \frac{1 + a \cdot 2^x}{1 - a \cdot 2^x} + \frac{2^x + a}{2^x - a} = 0$ ，

所以 $2 \cdot 2^x - 2a^2 \cdot 2^x = 0$ ，可得 $a^2 = 1$ ，

解得 $a = \pm 1$ ，

当 $a = -1$ 时， $f(x)$ 的定义域为 R ，符合题意，

当 $a = 1$ 时， $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 符合题意，

故选：D

[举一反三]

1. (2022·海南海口·模拟预测) 已知函数 $f(x) = (x-1)^3$ ，则下列函数是奇函数的是 ()

- A. $f(x)+1$ B. $f(x)-1$ C. $f(x+1)$ D. $f(x-1)$

【答案】C

【解析】

$f(x) = (x-1)^3$ 的图象是由 $h(x) = x^3$ 的图象向右平移 1 个单位得出的，因此其图象关于点 $(1,0)$

对称，只有把 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位，图象才会关于原点对称，

所以只有 $g(x) = f(x+1) = (x+1-1)^3 = x^3$ ，是奇函数。

故选：C。

2. (2022·山东菏泽·高三期末) 设函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 的定义域分别为 F ， G ，且 $F \subseteq G$ 。若对

任意的 $x \in F$ ，都有 $g(x) = f(x)$ ，则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 在 G 上的一个“延拓函数”。已知函数

$f(x) = e^x (x \leq 0)$ ，若 $g(x)$ 为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的一个延拓函数，且 $g(x)$ 是偶函数，则函数 $g(x)$

的解析式是 ()

- A. $e^{|x|}$ B. $\ln|x|$ C. $e^{-|x|}$ D. $-\ln|x|$

【答案】C

【解析】

解：∵ $g(x)$ 是偶函数

∴ 定义域关于原点对称

对于选项 A： $g(x)$ 是偶函数，当 $x \leq 0$ 时， $g(x) = e^{-x} \neq f(x)$ ，则不满足条件，A 错误；

对于选项 B： 当 $x = 0$ 时， $g(x) = \ln|x|$ 无意义，则定义域不满足条件，B 错误；

对于选项 C： $g(x)$ 是偶函数，当 $x \leq 0$ 时， $g(x) = e^{-(-x)} = e^x = f(x)$ ，满足条件，C 正确；

对于选项 D： 当 $x = 0$ 时， $g(x) = -\ln|x|$ 无意义，则定义域不满足条件，D 错误；

故选：C

3. (2022·江苏省昆山中学高三阶段练习) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $f(x-1)$ 为偶函数，

$f(3x+1)$ 为奇函数，则 ()

A. $f(-\frac{1}{3})=0$

B. $f(-1)=0$

C. $f(-3)=0$

D. $f(4)=0$

【答案】C

【解析】

解：若 $f(3x+1)$ 为奇函数，则 $f(-3x+1)=-f(3x+1)$ ，令 $x=0$ ，则 $f(1)=-f(1)$ ，即有

$$f(1)=0,$$

又 $f(x-1)$ 为偶函数，可得 $f(-x-1)=f(x-1)$ ，令 $x=2$ ，则 $f(-3)=f(1)=0$ ；

故选：C.

4. (2022·北京四中高三阶段练习) 若函数 $f(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时， $f(x)=\log_4 x$ ，则

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)= (\quad)$$

A. 2

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

由奇函数得 $f(-\frac{1}{2})=-f(\frac{1}{2})$ ，而 $f(\frac{1}{2})=\log_4(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$

$$\text{得 } f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

故选：C

5. (2022·江苏·二模) 已知函数 $f(x)=ax^2+|x+a+1|$ 为偶函数，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为

()

A. $\emptyset$

B. $(-1,0)\cup(0,1)$

C. $(-1,1)$

D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

【答案】B

【解析】

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-1)=f(1)$ ，即 $a+|a+2|=a+|a|$

解之得 $a=-1$ ，经检验符合题意. 则 $f(x)=-x^2+|x|$

由 $-x^2+|x|>0$ ，可得 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$

故 $f(x) = -x^2 + |x| > 0$ 的解集为 $(-1, 0) \cup (0, 1)$,

故选: B.

6. (2022·全国·高三专题练习) 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 满足 $\begin{cases} (x-1)^5 + 2x + \sin(x-1) = 3 \\ (y-1)^5 + 2y + \sin(y-1) = 1 \end{cases}$, 则 $x+y =$ ()

A. 0

B. 2

C. 4

D. 6

【答案】B

【解析】

$$\begin{cases} (x-1)^5 + 2x + \sin(x-1) = 3 \\ (y-1)^5 + 2y + \sin(y-1) = 1 \end{cases} \text{可化为: } \begin{cases} (x-1)^5 + 2(x-1) + \sin(x-1) = 1 \\ (y-1)^5 + 2(y-1) + \sin(y-1) = -1 \end{cases}$$

记 $f(x) = x^5 + 2x + \sin x$, 定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $f'(x) = 5x^4 + 2 + \cos x > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

又 $f(-x) = (-x)^5 + 2 \times (-x) + \sin(-x) = -(x^5 + 2x + \sin x) = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数. 所以由 $\begin{cases} f(x-1) = 1 \\ f(y-1) = -1 \end{cases}$ 可得: $x-1+y-1=0$, 所以 $x+y=2$.

故选: B

7. (2022·湖北武汉·二模) 若一个偶函数的值域为 $(0, 1]$, 则这个函数的解析式可以是

$f(x) =$ _____.

【答案】 $2^{-|x|}$ (答案不唯一)

【解析】取 $f(x) = 2^{-|x|}$, 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 且关于原点对称,

$f(-x) = 2^{-|-x|} = 2^{-|x|} = f(x)$, 所以函数 $f(x) = 2^{-|x|}$ 为偶函数.

Q $|x| \geq 0, \therefore -|x| \leq 0, \therefore 0 < 2^{-|x|} \leq 2^0 = 1$, 即 $0 < y \leq 1$

所以函数 $f(x) = 2^{-|x|}$ 的值域为 $(0, 1]$.

故答案为: $2^{-|x|}$ (答案不唯一, 其它正确答案同样给分).

8. (2022·全国·高三专题练习) 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时,

$f(x) = 2^x + 2x + m$, 则 $f(-1) =$ _____.

【答案】-3

【解析】 $\because f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数， $\therefore f(0)=0$ ， $\therefore m=-1$ ， $\therefore f(-1)=-f(1)=-3$ ，

故答案为：-3.

9. (2022·湖南·长郡中学高三阶段练习) 已知函数 $f(x)=a+\frac{2^{x+1}}{2^x-1}$ 是奇函数，则 $a=$ _____.

【答案】-1

【解析】由题意，函数 $f(x)$ 为定义域上的奇函数，则有 $f(x)+f(-x)=0$ ，

所以 $f(x)+f(-x)=2a+\frac{2^{x+1}}{2^x-1}+\frac{2^{-x+1}}{2^{-x}-1}=2a+\frac{2^{x+1}}{2^x-1}+\frac{2}{1-2^x}=2a+2=0$ ，可得 $a=-1$.

故答案为：-1

10. (2022·上海宝山·二模) 如果函数 $y=\begin{cases} 2x-3, & x>0 \\ f(x), & x<0 \end{cases}$ 是奇函数，则 $f(-3)=$ __.

【答案】-3

【解析】

设 $g(x)=\begin{cases} 2x-3, & x>0 \\ f(x), & x<0 \end{cases}$ ， $g(-3)=f(-3)=-g(3)=-(2\times 3-3)=-3$.

故答案为：-3

11. (2022·全国·高三专题练习) 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$;

(2) $f(x)=(x+1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

(3) $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$.

【解】(1) 由 $\begin{cases} 1-x^2\geq 0, \\ x^2-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$ ，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{-1, 1\}$ ，关于原点对称，

且 $f(x)=0$ ，所以 $f(-x)=f(x)=-f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

(2) 因为 $f(x)$ 有意义，则满足 $\frac{1-x}{1+x}\geq 0$ ，所以 $-1<x\leq 1$ ，

所以 $f(x)$ 的定义域不关于原点对称，所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(3) 因为 $\begin{cases} 4-x^2\geq 0, \\ x^2\neq 0, \end{cases}$ 所以 $-2\leq x\leq 2$ 且 $x\neq 0$ ，

所以定义域关于原点对称. 又 $f(-x) = \frac{\sqrt{4-(-x)^2}}{(-x)^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$,

所以 $f(-x) = f(x)$. 故函数 $f(x)$ 为偶函数.

12. (2022·北京·高三专题练习) 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+2)$, 且当

$$x \in (0, 1) \text{ 时, } f(x) = \frac{2^x}{4^x + 1}.$$

(1) 求 $f(1)$ 和 $f(-1)$ 的值;

(2) 求 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的解析式.

【解】(1) $\because f(x)$ 满足 $f(x) = f(x+2)$,

$$\therefore f(1) = f(2-1) = f(-1) = -f(1),$$

$$\therefore f(1) = 0, f(-1) = 0.$$

(2) 由题意知, $f(0) = 0$. 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $-x \in (0, 1)$.

由 $f(x)$ 是奇函数,

$$\therefore f(x) = -f(-x) = -\frac{2^{-x}}{4^{-x} + 1} = -\frac{2^x}{4^x + 1},$$

$$\text{综上, 在 } [-1, 1] \text{ 上, } f(x) = \begin{cases} \frac{2^x}{4^x + 1} & 0 < x < 1, \\ -\frac{2^x}{4^x + 1} & -1 < x < 0, \\ 0 & x = -1, 0, 1. \end{cases}$$

13. (2022·全国·高三专题练习) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 且其定义域均为

$\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 1\}$. 若 $f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1}$, 求 $f(x)$, $g(x)$ 的解析式.

【解】依题意, 函数 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数,

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1} \\ f(-x) + g(-x) = \frac{1}{-x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = \frac{1}{x-1} \\ -f(x) + g(x) = \frac{1}{-x-1} \end{cases}$$

$$\text{解得 } f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} (x \neq \pm 1), \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - 1} (x \neq \pm 1).$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/278104140105007044>