

青海海东市第二中学 2023-2024 学年高三第一次教学质量监测考试数学试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 山东烟台苹果因“果形端正、色泽艳丽、果肉甜脆、香气浓郁”享誉国内外. 据统计, 烟台苹果 (把苹果近似看成球体) 的直径 (单位: mm) 服从正态分布 $N(80, 5^2)$, 则直径在 $(75, 90]$ 内的概率为 ()

附: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X, \mu + \sigma) = 0.6826$, $P(\mu - 2\sigma < X, \mu + 2\sigma) = 0.9544$.

- A. 0.6826 B. 0.8413 C. 0.8185 D. 0.9544

2. 阿波罗尼斯 (约公元前 262~190 年) 证明过这样的命题: 平面内到两定点距离之比为常数 $k (k > 0, k \neq 1)$ 的点的轨迹是圆. 后人将这个圆称为阿氏圆. 若平面内两定点 A, B 间的距离为 2, 动点 P 与 A, B 的距离之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 当 P, A, B 不共线时, $\triangle PAB$ 的面积的最大值是 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

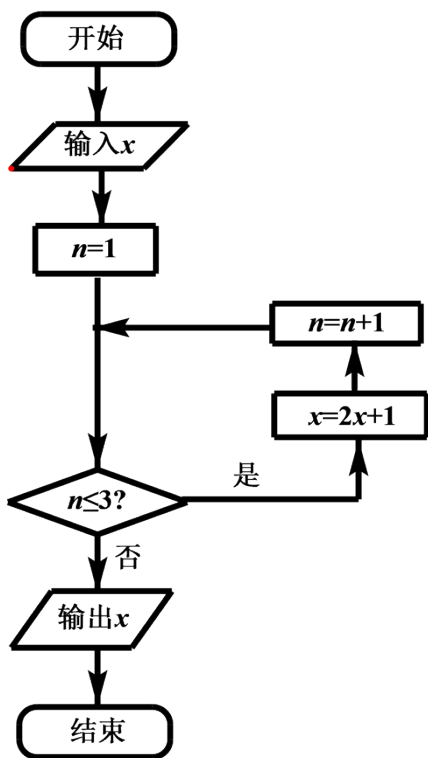
3. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P, Q 分别为 AB, AD 的中点, 过点 D 作平面 α 使 $B_1P \parallel$ 平面 α , $A_1Q \parallel$ 平面 α 若直线 $B_1D_1 \cap$ 平面 $\alpha = M$, 则 $\frac{MD_1}{MB_1}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $c - a \cos B = (2a - b) \cos A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状为 ()

- A. 直角三角形 B. 等腰非等边三角形
C. 等腰或直角三角形 D. 钝角三角形

5. 当输入的实数 $x \in [2, 30]$ 时, 执行如图所示的程序框图, 则输出的 x 不小于 103 的概率是 ()



- A. $\frac{9}{14}$ B. $\frac{5}{14}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{9}{28}$

6. 已知 i 为虚数单位, 则 $\frac{2+3i}{(1-2i)i} = (\quad)$

- A. $\frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$ B. $\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$ C. $\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$ D. $\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$

7. 设双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线与抛物线 $y = x^2 + \frac{1}{3}$ 有且只有一个公共点, 且椭圆

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 2, 则双曲线的标准方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ B. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} = 1$ C. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{2} = 1$

8. 设 $(1+i) \cdot z = 1-i$, 则复数 z 的模等于 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 1 D. $\sqrt{3}$

9. $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ 的展开式中有理项有 ()

- A. 3 项 B. 4 项 C. 5 项 D. 7 项

10. 若函数 $f(x) = x \ln x - ax^2$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, e)$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F ，若双曲线 C 的一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ ，且点 F 到该渐近线的距离为 $\sqrt{3}$ ，则双曲线 C 的实轴的长为

- A. 1 B. 2
C. 4 D. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{(x-1)\pi}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 2f(x-2), & 3 < x \leq 100 \end{cases}$ ，若函数 $f(x)$ 的极大值点从小到大依次记为 a_1, a_2, \dots, a_n ，并记相应的

极大值为 b_1, b_2, \dots, b_n ，则 $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ 的值为 ()

- A. $2^{50} + 2449$ B. $2^{50} + 2549$ C. $2^{49} + 2449$ D. $2^{49} + 2549$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 8x + ay - 5 = 0$ 经过抛物线 $E: x^2 = 4y$ 的焦点，则抛物线 E 的准线与圆 C 相交所得弦长是 _____.

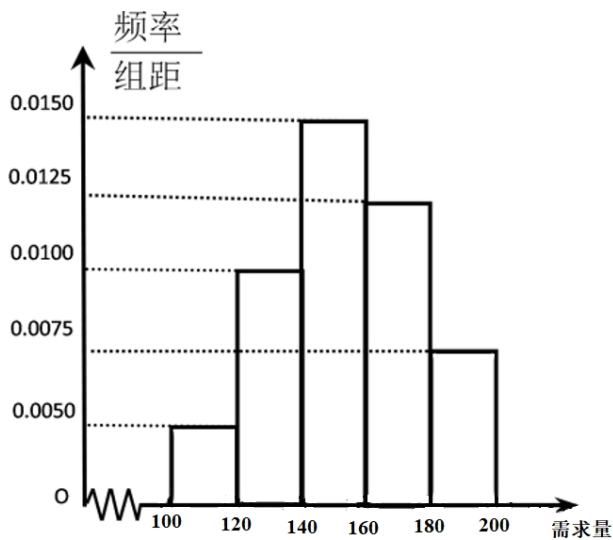
14. 记实数 x_1, x_2, \dots, x_n 中的最大数为 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ，最小数为 $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. 已知实数 $1, x, y$ 且三数能构成三角形的三边长，若 $t = \max\left\{\frac{1}{x}, \frac{x}{y}, y\right\} \cdot \min\left\{\frac{1}{x}, \frac{x}{y}, y\right\}$ ，则 t 的取值范围是 _____.

15. 五声音阶是中国古乐基本音阶，故有成语“五音不全”. 中国古乐中的五声音阶依次为：宫、商、角、徵、羽，如果把这五个音阶全用上，排成一个五个音阶的音序，且要求宫、羽两音阶不相邻且在角音阶的同侧，可排成 _____ 种不同的音序.

16. 已知函数 $f(x) = 2a(\ln x - x) + x^2 (a > 0)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，则 $f(x_1) + f(x_2)$ 的取值范围为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某大学生在开学季准备销售一种文具套盒进行试创业，在一个开学季内，每售出 1 盒该产品获利 50 元，未售出的产品，每盒亏损 30 元. 根据历史资料，得到开学季市场需求量的频率分布直方图，如图所示. 该同学为这个开学季进了 160 盒该产品，以 x (单位：盒， $100 \leq x \leq 200$) 表示这个开学季内的市场需求量， y (单位：元) 表示这个开学季内经销该产品的利润.



- (1) 根据直方图估计这个开学季内市场需求量 x 的平均数和众数;
- (2) 将 y 表示为 x 的函数;
- (3) 以需求量的频率作为各需求量的概率, 求开学季利润不少于 4800 元的概率.

18. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin A \sin B = 2c \sin C$, $\triangle ABC$ 的面积 $S = abc$.

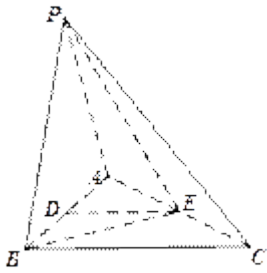
- (1) 求角 C ;
- (2) 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

19. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $C: y^2 - 4x - 4 = 0$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{3}$ ($\rho \in \mathbf{R}$).

- (1) 求抛物线 C 的极坐标方程;
- (2) 若抛物线 C 与直线 l 交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的值.

20. (12分) 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA = PB = AB = 2$, $BC = 3$, $\angle ABC = 90^\circ$, 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , D, E 分别为 AB, AC 中点.

- (1) 求证: $AB \perp PE$;
- (2) 求二面角 $A-PB-E$ 的大小.



21. (12分) 已知 x, y, z 均为正数.

(1) 若 $xy < 1$, 证明: $|x+z| \cdot |y+z| > 4xyz$;

(2) 若 $\frac{xyz}{x+y+z} = \frac{1}{3}$, 求 $2^{xy} \cdot 2^{yz} \cdot 2^{xz}$ 的最小值.

22. (10分) 某动漫影视制作公司长期坚持文化自信, 不断挖掘中华优秀传统文化中的动漫题材, 创作出一批又一批的优秀动漫影视作品, 获得市场和广大观众的一致好评, 同时也为公司赢得丰厚的利润. 该公司2013年至2019年的年利润 y 关于年份代号 x 的统计数据如下表 (已知该公司的年利润与年份代号线性相关).

年份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
年份代号 x	1	2	3	4	5	6	7
年利润 y (单位: 亿元)	29	33	36	44	48	52	59

(I) 求 y 关于 x 的线性回归方程, 并预测该公司2020年 (年份代号记为8) 的年利润;

(II) 当统计表中某年年利润的实际值大于由 (I) 中线性回归方程计算出该年利润的估计值时, 称该年为 A 级利润年, 否则称为 B 级利润年. 将 (I) 中预测的该公司2020年的年利润视作该年利润的实际值, 现从2013年至2020年这8年中随机抽取2年, 求恰有1年为 A 级利润年的概率.

参考公式: $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$.

参考答案

一、选择题: 本题共12小题, 每小题5分, 共60分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

根据服从的正态分布可得 $\mu = 80$, $\sigma = 5$, 将所求概率转化为 $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + 2\sigma)$, 结合正态分布曲线的性质可求得结果.

【详解】

由题意, $\mu = 80$, $\sigma = 5$, 则 $P(75 < X, 85) = 0.6826$, $P(70 < X, 90) = 0.9544$,

所以 $P(85 < X, 90) = \frac{1}{2} \times (0.9544 - 0.6826) = 0.1359$, $P(75 < X, 90) = 0.6826 + 0.1359 = 0.8185$.

故果实直径在 $(75, 90]$ 内的概率为 **0.8185**.

故选: C

【点睛】

本题考查根据正态分布求解特定区间的概率问题, 考查了正态曲线的对称性, 属于基础题.

2、A

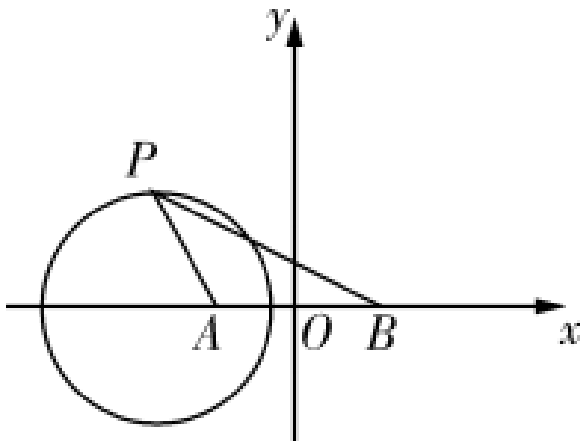
【解析】

根据平面内两定点 A , B 间的距离为 2, 动点 P 与 A , B 的距离之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 利用直接法求得轨迹, 然后利用数形结合求解.

合求解.

【详解】

如图所示:



设 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $P(x, y)$, 则 $\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

化简得 $(x+3)^2 + y^2 = 8$,

当点 P 到 AB (x 轴) 距离最大时, $\triangle PAB$ 的面积最大,

此时，平面 α 为平面 CDD_1C_1 ，直线 A_1Q 不可能与平面 α 平行，

所以， $C_1G \not\subset$ 平面 α ， $\therefore C_1G \parallel a$ ， $\therefore C_1G \parallel$ 平面 α ，

$Q C_1G \subset$ 平面 CDD_1C_1 ，平面 $CDD_1C_1 \perp$ 平面 $\alpha = DF$ ， $\therefore DF \parallel C_1G$ ，

$Q C_1F \parallel DG$ ，所以，四边形 C_1GDF 为平行四边形，可得 $C_1E = DG = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}C_1D_1$ ，

$\therefore F$ 为 C_1D_1 的中点，同理可证 E 为 A_1D_1 的中点， $Q B_1D_1 \perp EF = M$ ， $\therefore MD_1 = \frac{1}{2}D_1N = \frac{1}{4}B_1D_1$ ，因此， $\frac{MD_1}{MB_1} = \frac{1}{3}$ 。

故选：B.

【点睛】

本题考查线段长度比值的计算，涉及线面平行性质的应用，解答的关键就是找出平面 α 与正方体各棱的交点位置，考查推理能力与计算能力，属于中等题.

4、C

【解析】

利用正弦定理将边化角，再由 $\sin(A+B) = \sin C$ ，化简可得 $\sin B \cos A = \sin A \cos A$ ，最后分类讨论可得；

【详解】

解：因为 $c - a \cos B = (2a - b) \cos A$

所以 $\sin C - \sin A \cos B = (2 \sin A - \sin B) \cos A$

所以 $\sin C - \sin A \cos B = 2 \sin A \cos A - \sin B \cos A$

所以 $\sin(A+B) - \sin A \cos B = 2 \sin A \cos A - \sin B \cos A$

所以 $\sin A \cos B + \sin B \cos A - \sin A \cos B = 2 \sin A \cos A - \sin B \cos A$

所以 $\sin B \cos A = \sin A \cos A$

当 $\cos A = 0$ 时 $A = \frac{\pi}{2}$ ， $\triangle ABC$ 为直角三角形；

当 $\cos A \neq 0$ 时 $\sin A = \sin B$ 即 $A = B$ ， $\triangle ABC$ 为等腰三角形；

$\therefore \triangle ABC$ 的形状是等腰三角形或直角三角形

故选：C.

【点睛】

本题考查三角形形状的判断，考查正弦定理的运用，考查学生分析解决问题的能力，属于基础题.

5、A

【解析】

根据循环结构的运行，直至不满足条件退出循环体，求出 x 的范围，利用几何概型概率公式，即可求出结论.

【详解】

程序框图共运行 3 次，输出的 x 的范围是 $[23, 247]$ ，

所以输出的 x 不小于 103 的概率为 $\frac{247-103}{247-23} = \frac{144}{224} = \frac{9}{14}$.

故选:A.

【点睛】

本题考查循环结构输出结果、几何概型的概率，模拟程序运行是解题的关键，属于基础题.

6、A

【解析】

根据复数乘除运算法则，即可求解.

【详解】

$$\frac{2+3i}{(1-2i)i} = \frac{2+3i}{2+i} = \frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i.$$

故选: A.

【点睛】

本题考查复数代数运算，属于基础题.

7、B

【解析】

设双曲线的渐近线方程为 $y = kx$ ，与抛物线方程联立，利用 $\Delta = 0$ ，求出 k 的值，得到 $\frac{a}{b}$ 的值，求出 a, b 关系，进而判

断 a, b 大小，结合椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 2，即可求出结论.

【详解】

设双曲线的渐近线方程为 $y = kx$ ，

代入抛物线方程得 $x^2 - kx + \frac{1}{3} = 0$ ，

依题意 $\Delta = k^2 - \frac{4}{3} = 0, k = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}}, a = \frac{2}{\sqrt{3}}b > b,$$

∴ 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距 $2\sqrt{a^2 - b^2} = 2$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/285013243220012001>