

专题 02 函数及其应用、指对幂函数



易错点一：对函数定义域、值域及解析式理解存在偏差（定义域、值域及解析式的求算）



已知函数的具体解析式求定义域的方法

法 1：若 $f(x)$ 是由一些基本初等函数通过四则运算构成的，则它的定义域为各基本初等函数的定义域的交集。

法 2：复合函数的定义域：先由外层函数的定义域确定内层函数的值域，从而确定对应的内层函数自变量的取值范围，还需要确定内层函数的定义域，两者取交集即可。

函数解析式的常见求法

法 1：配凑法 已知 $f(h(x)) = g(x)$ ，求 $f(x)$ 的问题，往往把右边的 $g(x)$ 整理或配凑成只含 $h(x)$ 的式子，然后用 x 将 $h(x)$ 代换。

法 2：待定系数法：已知函数的类型（如一次函数、二次函数）可用待定系数法，比如二次函数 $f(x)$ 可设为 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，其中 a, b, c 是待定系数，根据题设条件，列出方程组，解出 a, b, c 即可。

法 3：换元法：已知 $f(h(x)) = g(x)$ ，求 $f(x)$ 时，往往可设 $h(x) = t$ ，从中解出 x ，代入 $g(x)$ 进行换元。应用换元法时要注意新元的取值范围。

法 4：解方程组法 已知 $f(x)$ 满足某个等式，这个等式除 $f(x)$ 是未知量外，还有其他未知量，如 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ （或 $f(-x)$ ）等，可根据已知等式再构造其他等式组成方程组，通过解方程组求出 $f(x)$ 。

分段函数

第一步：

求分段函数的函数值时，要先确定要求值的自变量属于哪一区间，然后代入该区间对应的解析式求值。

第二步：当出现 $f(f(a))$ 的形式时，应从内到外依次求值。

第三步：当自变量的值所在区间不确定时，要分类讨论，分类标准应参照分段函数不同段的端点。

结论：复合函数：

一般地，对于两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ ，如果通过变量 u ， y 可以表示成 x 的函数，那么称这个函数为函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的复合函数，记作 $y = f(g(x))$ ，其中 $y = f(u)$ 叫做复合函数 $y = f(g(x))$ 的外层函数， $u = g(x)$ 叫做 $y = f(g(x))$ 的内层函数。

抽象函数的定义域的求法：

(1) 若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$ ，则复合函数 $f(g(x))$ 的定义域由 $a, g(x), b$ 求出。

(2) 若已知函数 $f(g(x))$ 的定义域为 $[a, b]$ ，则 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 时的值域。

易错提醒：函数的概念

①一般地，给定非空数集 A ， B ，按照某个对应法则 f ，使得 A 中任意元素 x ，都有 B 中唯一确定的 y

与之对应，那么从集合 A 到集合 B 的这个对应，叫做从集合 A 到集合 B 的一个函数。记作： $x \rightarrow y = f(x)$ ，

$x \in A$ 。集合 A 叫做函数的定义域，记为 D ，集合 $\{y | y = f(x), x \in A\}$ 叫做值域，记为 C 。

②函数的实质是从一个非空集合到另一个非空集合的映射。

③函数表示法：函数书写方式为 $y = f(x)$ ， $x \in D$

④函数三要素：定义域、值域、对应法则。

⑤同一函数：两个函数只有在定义域和对应法则都相等时，两个函数才相同。

基本的函数定义域限制

求解函数的定义域应注意：

①分式的分母不为零；

②偶次方根的被开方数大于或等于零；

③对数的真数大于零，底数大于零且不等于 1；

④零次幂或负指数次幂的底数不为零；

⑤三角函数中的正切 $y = \tan x$ 的定义域是 $\{x | x \in R, \text{且 } x \neq kx + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$ ；

⑥已知 $f(x)$ 的定义域求解 $f[g(x)]$ 的定义域，或已知 $f[g(x)]$ 的定义域求 $f(x)$ 的定义域，遵循两点：

①定义域是指自变量的取值范围；②在同一对应法则 f 下，括号内式子的范围相同；

⑦对于实际问题中函数的定义域，还需根据实际意义再限制，从而得到实际问题函数的定义域.

基本初等函数的值域

① $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的值域是 R .

② $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的值域是：当 $a > 0$ 时，值域为 $\{y | y \geq \frac{4ac - b^2}{4a}\}$ ；当 $a < 0$ 时，值域为

$$\{y | y \leq \frac{4ac - b^2}{4a}\}.$$

③ $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的值域是 $\{y | y \neq 0\}$.

④ $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的值域是 $(0, +\infty)$.

⑤ $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的值域是 R .

分段函数的应用

分段函数问题往往需要进行分类讨论，根据分段函数在其定义域内每段的解析式不同，然后分别解决，

即分段函数问题，分段解决.



例 1. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$ 的定义域为 ()

- A. $(-\infty, 3]$ B. $(1, +\infty)$ C. $(1, 3]$ D. $(-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$

【答案】C

【详解】由题意得 $\begin{cases} (3-x)(x-1) \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $1 < x \leq 3$ ，则定义域为 $(1, 3]$ ，

故选：C.

变式 1: 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, 0 < x < 1 \\ 2(x-1), x \geq 1 \end{cases}$ ，若 $f(m) = f(m+1)$ ，则 $f\left(\frac{2}{m}\right) =$ ()

- A. 14 B. 16 C. 2 D. 6

【答案】A

【详解】因为 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，则 $\begin{cases} m > 0 \\ m+1 > 0 \end{cases}$ ，解得 $m > 0$ ，

若 $m \geq 1$ ，则 $m+1 \geq 2 > 1$ ，可得 $2(m-1) = 2m-2 \neq 2m$ ，不合题意；

若 $0 < m < 1$ ，则 $m+1 > 1$ ，可得 $\sqrt{m} = 2m$ ，解得 $m = \frac{1}{4}$ ；

综上所述： $m = \frac{1}{4}$ 。

所以 $f\left(\frac{2}{m}\right) = f(8) = 14$ 。故选：A。

变式 2： 已知集合 $A = \{x \mid y = \sqrt{-|x|+2}\}$ ， $B = \{y \mid y = x^2 - 2x + 2\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

A. $[-2, 2]$

B. $[0, +\infty)$

C. $[1, 2]$

D. $[0, 2]$

【答案】C

【详解】 由题意得 $A = \{x \mid -|x| + 2 \geq 0\} = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ ， $B = \{y \mid y = (x-1)^2 + 1\} = \{y \mid y \geq 1\}$ ，

所以 $A \cap B = [1, 2]$ 。

故选：C。

变式 3： 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x \geq 1 \\ f(x+1), & x < 1 \end{cases}$ ，则下列正确的是 ()

A. $f(f(0)) = \frac{1}{2}$ B. $f(f(1)) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $f(f(\log_2 3)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $f(x)$ 的值域为 $(0, 1]$

【答案】B

【详解】 对选项 A， $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$ ， $f(f(0)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，故 A 错误；

对选项 B， $f(1) = \frac{1}{2}$ ， $f(f(1)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ，故 B 正确。

对选项 C，因为 $\log_2 3 > 1$ ，所以 $f(\log_2 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 3} = 2^{\log_2 \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ ，

$f(f(\log_2 3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故 C 错误；

对选项 D，当 $x \geq 1$ 时， $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ ，函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ ，

当 $0 \leq x < 1$ 时， $1 \leq x+1 < 2$ ， $f(x) = f(x+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ ，

函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ，又因为 $x < 1$ 时， $f(x) = f(x+1)$ ，

所以当 $x < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$,

综上, 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, 故 D 错误.

故选: B



1. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, 则 $f[f(3)] =$ ()

A. $\ln 3$

B. 3

C. e^3

D. $e^3 \ln 3$

【答案】B

【详解】因为函数 $f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, 则 $f(3) = \ln \frac{e^3 + 1}{e^3 - 1}$,

令 $f(3) = t$, 则 $f[f(3)] = f(t) = \ln \frac{e^t + 1}{e^t - 1}$,

又因为 $t = f(3) = \ln \frac{e^3 + 1}{e^3 - 1}$,

$$\text{所以 } f[f(3)] = f(t) = \ln \frac{e^{\ln \frac{e^3 + 1}{e^3 - 1}} + 1}{e^{\ln \frac{e^3 + 1}{e^3 - 1}} - 1} = \ln \frac{\frac{e^3 + 1}{e^3 - 1} + 1}{\frac{e^3 + 1}{e^3 - 1} - 1} = \ln \frac{2e^3}{2} = \ln e^3 = 3,$$

所以 $f[f(3)] = 3$,

故选: B.

2. 给出下列 4 个函数, 其中对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 均成立的是 ()

A. $f(\sin 3x) = \sin x$

B. $f(\sin 3x) = x^3 + x^2 + x$

C. $f(x^2 + 2) = |x + 2|$

D. $f(x^2 + 4x) = |x + 2|$

【答案】D

【详解】对于 A, 当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$; 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 与函数定义矛盾, 不符合;

对于 B, 当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$; 当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(0) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^3 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\pi}{3}$, 与函数定义矛盾, 不符合;

对于 C, 当 $x = -2$ 时, $f(6) = 0$; 当 $x = 2$ 时, $f(6) = 4$, 与函数定义矛盾, 不符合;

对于 D, 令 $x + 2 = t$, 则 $x = t - 2$, 所以 $f[(t - 2)^2 + 4(t - 2)] = f(t^2 - 4) = |t|$,

令 $t^2 - 4 = m \in [-4, +\infty)$ ，所以 $t = \pm\sqrt{m+4}$ ，

所以 $f(m) = |\pm\sqrt{m+4}| = \sqrt{m+4} (m \geq -4)$ ，

所以 $f(x) = \sqrt{x+4} (x \geq -4)$ ，符合。

故选：D。

3. 已知函数 $f(1-x) = \frac{1-x^2}{x^2} (x \neq 0)$ ，则 $f(x) =$ ()

A. $\frac{1}{(x-1)^2} - 1 (x \neq 0)$

B. $\frac{1}{(x-1)^2} - 1 (x \neq 1)$

C. $\frac{4}{(x-1)^2} - 1 (x \neq 0)$

D. $\frac{4}{(x-1)^2} - 1 (x \neq 1)$

【答案】B

【详解】令 $t = 1 - x$ ，则 $x = 1 - t$ ，且 $x \neq 0$ ，则 $t \neq 1$ ，

可得 $f(t) = \frac{1-(1-t)^2}{(1-t)^2} = \frac{1}{(t-1)^2} - 1, (t \neq 1)$ ，

所以 $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 1 (x \neq 1)$ 。

故选：B。

4. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(2x) = f(x+1)$ ，则 $f(x)$ 可能是 ()。

A. $f(x) = x$

B. $f(x) = \log_2 x$

C. $f(x) = 2^x$

D. $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbf{Q} \\ 0, x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$

【答案】D

【详解】对于 A， $f(x) = x$ ，则 $f(2x) = 2x$ ， $f(x+1) = x+1$ ，不满足 $f(2x) = f(x+1)$ ；

对于 B， $f(x) = \log_2 x$ ，则 $f(2x) = \log_2 2x = 1 + \log_2 x$ ， $f(x+1) = \log_2(x+1)$ ，

不满足 $f(2x) = f(x+1)$ ；

对于 C， $f(x) = 2^x$ ，则 $f(2x) = 2^{2x} = 4^x$ ， $f(x+1) = 2^{x+1} = 2 \times 2^x$ ，不满足 $f(2x) = f(x+1)$ ；

对于 D, $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, 当 $x \in \mathbb{Q}$ 时, $2x \in \mathbb{Q}, x+1 \in \mathbb{Q}$, 故 $f(2x) = f(x+1) = 1$;

当 $x \notin \mathbb{Q}$ 时, $2x \notin \mathbb{Q}, x+1 \notin \mathbb{Q}$, 故 $f(2x) = f(x+1) = 0$,

即此时 $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 满足 $f(2x) = f(x+1)$, D 正确,

故选: D

5. 设集合 $A = \{x | 4x^2 - 13x < 0\}$, $B = \{y | y = \sqrt{x-2} + 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $(0, 2]$

B. $(0, 3]$

C. $\left[2, \frac{13}{4}\right)$

D. $\left[3, \frac{13}{4}\right)$

【答案】D

【详解】由 $4x^2 - 13x < 0$, 即 $x(4x - 13) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{13}{4}$,

所以 $A = \{x | 4x^2 - 13x < 0\} = \left\{x \mid 0 < x < \frac{13}{4}\right\}$,

由 $\sqrt{x-2} \geq 0$, 所以 $\sqrt{x-2} + 3 \geq 3$,

所以 $B = \{y | y = \sqrt{x-2} + 3\} = \{y | y \geq 3\}$,

所以 $A \cap B = \left[3, \frac{13}{4}\right)$.

故选: D.

6. 集合 $P = \{x | |x| < 2\}$, $Q = \{y | y = \sqrt{x^2 + 1}\}$, 则 $P \cap Q =$ ()

A. $\{1, 2\}$

B. $\{x | 1 \leq x < 2\}$

C. $\{x | 1 < x < 2\}$

D. $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$

【答案】B

【详解】由题意可得: $P = \{x | |x| < 2\} = \{x | -2 < x < 2\}$, $Q = \{y | y = \sqrt{x^2 + 1}\} = \{y | y \geq 1\}$,

所以 $P \cap Q = \{x | 1 \leq x < 2\}$.

故选: B.

易错点二: 忽视单调性与单调区间的主次 (函数的单调性与最值)



1. 函数的单调性是对函数定义内的某个区间而言的。
2. 函数 $f(x)$ 在给定区间上的单调性是函数在该区间上的整体性质。
3. 函数的单调定义中的 x_1 、 x_2 有三个特征：（1）任意性（2）有大小（3）属于同一个单调区间。
4. 求函数的单调区间必须先求定义域。
5. 判断函数单调性常用以下几种方法：

方法 1：定义法：一般步骤为设元 $\rightarrow$ 作差 $\rightarrow$ 变形 $\rightarrow$ 判断符号 $\rightarrow$ 得出结论。

方法 2：图象法：如果 $f(x)$ 是以图象形式给出的，或者 $f(x)$ 的图象易作出，则可由图象的上升或下降确定单调性。

方法 3：导数法：先求导数，利用导数值的正负确定函数的单调区间。

方法 4：性质法：（1）对于由基本初等函数的和、差构成的函数，根据各初等函数的增减性及 $f(x) \pm g(x)$ 增减性质进行判断；

6. 求函数最值（值域）的常用方法

方法 1：单调性法：先确定函数的单调性，再由单调性求最值。

方法 2：图象法：先作出函数的图象，再观察其最高点、最低点，求出最值。

方法 3：基本不等式法：先对解析式变形，使之具备“一正二定三相等”的条件后用基本不等式求出最值。

方法 4：导数法：先求导，然后求出在给定区间上的极值，最后结合端点值，求出最值。

结论：

1. 单调性技巧

（1）证明函数单调性的步骤

- ①**取值：**设 x_1 ， x_2 是 $f(x)$ 定义域内一个区间上的任意两个量，且 $x_1 < x_2$ ；
- ②**变形：**作差变形（变形方法：因式分解、配方、有理化等）或作商变形；
- ③**定号：**判断差的正负或商与 1 的大小关系；
- ④**得出结论。**

（2）函数单调性的判断方法

- ①**定义法：**根据增函数、减函数的定义，按照“取值—变形—判断符号—下结论”进行判断。
- ②**图象法：**就是画出函数的图象，根据图象的上升或下降趋势，判断函数的单调性。
- ③**直接法：**就是对我们所熟悉的函数，如一次函数、二次函数、反比例函数等，直接写出它们的单调区间。

（3）记住几条常用的结论：

结论 1：若 $f(x)$ 是增函数，则 $-f(x)$ 为减函数；若 $f(x)$ 是减函数，则 $-f(x)$ 为增函数；

结论 2: 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为增（或减）函数，则在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域上 $f(x)+g(x)$ 为增（或减）函数；

结论 3: 若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为增函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为增函数， $\frac{1}{f(x)}$ 为减函数；

结论 4: 若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为减函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为减函数， $\frac{1}{f(x)}$ 为增函数。

易错提醒：1. 函数的单调性

（1）单调函数的定义

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 A ，区间 $D \subseteq A$ ：

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1, x_2 当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，符号一致那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数。

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1, x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，符号相反那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数。

①属于定义域 A 内某个区间上；

②任意两个自变量 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$ ；

③都有 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $f(x_1) > f(x_2)$ ；

④图象特征：在单调区间上增函数的图象上坡路，减函数的图象下坡路。

（2）单调性与单调区间

①单调区间的定义：如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上具有单调性， D 称为函数 $f(x)$ 的单调区间。

②函数的单调性是函数在某个区间上的性质。

（3）复合函数的单调性

复合函数的单调性遵从“同增异减”，即在对应的取值区间上，外层函数是增（减）函数，内层函数是增（减）函数，复合函数是增函数；外层函数是增（减）函数，内层函数是减（增）函数，复合函数是减函数。

2. 函数的最值

前提：一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I ，如果存在实数 M 满足

条件：（1）对于任意的 $x \in I$ ，都有 $f(x) \leq M$ ；（2）存在 $x_0 \in I$ ，使得 $f(x_0)=M$ 结论 M 为最大值

（1）对于任意的 $x \in I$ ，都有 $f(x) \geq M$ ；（2）存在 $x_0 \in I$ ，使得 $f(x_0)=M$ 结论 M 为最小值



例．若函数 $f(x)=a^{x^2-ax+1}$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$) 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（ ）

A. $(0,1)$

B. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

C. $(1,2]$

D. $[2, +\infty)$

【答案】C

【详解】设函数 $t = x^2 - ax + 1$,

则函数 $f(x) = a^{x^2 - ax + 1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是由二次函数 $t = x^2 - ax + 1$ 与指数函数 $y = a^t$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 复合而成的.

当 $0 < a < 1$ 时, 由于函数 $y = a^t$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 单调递减,

而二次函数 $t = x^2 - ax + 1$ 的图象开口向上,

在区间 $(1, +\infty)$ 上不可能单调递减,

则函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上不可能单调递增, 故不满足题意;

当 $a > 1$ 时, 函数 $y = a^t$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 单调递增,

要使函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

则二次函数 $t = x^2 - ax + 1$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

又其对称轴为 $x = \frac{a}{2}$, 故 $\frac{a}{2} \leq 1$, 所以 $a \in (1, 2]$. 故选: C.

变式 1. 下列函数中, 满足“对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 使得 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ”成立的是 ()

A. $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ B. $f(x) = x - \frac{1}{x}$ C. $f(x) = x + 1$ D. $f(x) = \log_2(2x) + 1$

【答案】A

【详解】根据题意, “对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 使得 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ”, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数.

对于选项 A, $f(x) = -x^2 - 2x + 1$, 为二次函数, 其对称轴为 $x = -1$, 在 $(0, +\infty)$ 上递减, 符合题意;

对于选项 B, $f(x) = x - \frac{1}{x}$, 其导数 $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 不符合题意;

对于选项 C, $f(x) = x + 1$ 为一次函数, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 不符合题意;

对于选项 D, 由复合函数单调性“同增异减”知, $f(x) = \log_2(2x) + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不符合题意. 故选: A.

变式 2. 若定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 同时满足: ① $f(x)$ 为奇函数; ② 对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$

，且 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P 。已知函数 $f(x)$ 具有性质 P ，则不等式

$f(x-2) < \frac{f(x^2-4)}{x+2}$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -1)$

B. $(-3, 2)$

C. $(-\infty, -3) \cup (-1, 2)$

D. $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

【答案】C

【详解】因为对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ，且 $x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ，

即对任意两个不相等的正实数 x_1, x_2 不妨设 $0 < x_1 < x_2$ ，都有 $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 x_2} = \frac{\frac{f(x_1)}{x_1} - \frac{f(x_2)}{x_2}}{x_1 - x_2} < 0$ ，

所以有 $\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}$ ，

所以函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 是 $(0, +\infty)$ 上的减函数，

又因为 $f(x)$ 为奇函数，即有 $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，有 $f(-x) = -f(x)$ ，

所以有 $g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = g(x)$ ，

所以 $g(x)$ 为偶函数，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增。

当 $x-2 > 0$ ，即 $x > 2$ 时，有 $x^2 - 4 > 0$ ，由 $f(x-2) < \frac{f(x^2-4)}{x+2}$ ，得 $\frac{f(x-2)}{x-2} < \frac{f(x^2-4)}{x^2-4}$ ，

所以 $x-2 > x^2-4$ ，解得 $x < -2$ ，此时无解；

当 $x-2 < 0$ ，即 $x < 2$ 时，由 $f(x-2) < \frac{f(x^2-4)}{x+2}$ ，得 $\frac{f(x-2)}{x-2} > \frac{f(x^2-4)}{x^2-4}$ ，

所以 $|x-2| < |x^2-4|$ ，解得 $x < -3$ 或 $-1 < x < 2$ 。

综上所述，不等式 $f(x-2) < \frac{f(x^2-4)}{x+2}$ 的解集为 $(-\infty, -3) \cup (-1, 2)$ 。

故选：C。

变式3. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 1$, 则不等式

$f(2\log_2 x) - f(x) > \log_2 x^2 - x$ 的解集为 ()

A. $(1, 2)$

B. $(2, 4)$

C. $(4, 8)$

D. $(8, 16)$

【答案】B

【详解】根据题意: 当 $x_1 > x_2$ 时,

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 1 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > x_1 - x_2 \Rightarrow f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2,$$

当 $x_1 < x_2$ 时,

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 1 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < x_1 - x_2 \Rightarrow f(x_1) - x_1 < f(x_2) - x_2$$

可得函数 $h(x) = f(x) - x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

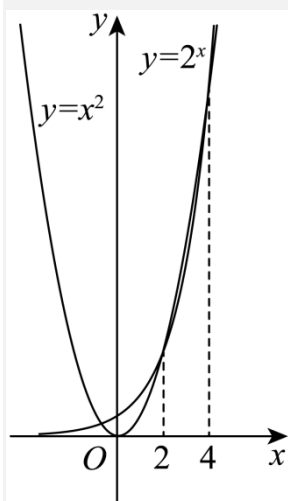
$$\text{则 } f(2\log_2 x) - f(x) > \log_2 x^2 - x \Rightarrow f(\log_2 x^2) - \log_2 x^2 > f(x) - x$$

$$\Rightarrow \log_2 x^2 > x \Rightarrow \log_2 x^2 > \log_2 2^x \Rightarrow x^2 > 2^x,$$

在同一坐标系中画出 $y = x^2$ 与 $y = 2^x$ 图象.

得 $2 < x < 4$, 则不等式的解集为 $(2, 4)$,

故选: B.





1. 已知函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x} - \sin x}{2}$, 若对于一切的实数 x , 不等式 $f(2kx^2) < f\left(\frac{3}{8} - kx\right)$ 恒成立, 则 k 的取值范围为 ()

- A. $[-2, 0)$ B. $(-2, 0)$ C. $[-3, 0]$ D. $(-3, 0]$

【答案】D

【详解】易知函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x} - \sin x}{2}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{2^x \cdot \ln 2 + 2^{-x} \cdot \ln 2 - \cos x}{2},$$

因为 $2^x > 0$, $\ln 2 > 0$,

所以 $2^x \cdot \ln 2 + 2^{-x} \cdot \ln 2 \geq 2\sqrt{2^x \cdot \ln 2 \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2} = 2\ln 2 = \ln 4 > 1$,

又因为 $-1 \leq \cos x \leq 1$, 所以 $2^x \cdot \ln 2 + 2^{-x} \cdot \ln 2 - \cos x > 0$, 即 $f'(x) > 0$ 恒成立,

故函数 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单调递增函数,

因为 $f(2kx^2) < f\left(\frac{3}{8} - kx\right)$, 所以 $2kx^2 < \frac{3}{8} - kx$, 即 $2kx^2 + kx - \frac{3}{8} < 0$,

(i) 当 $k = 0$ 时, 左边 $= -\frac{3}{8} < 0$ 成立, 故 $k = 0$ 符合题意;

(ii) 当 $k \neq 0$ 时, 有
$$\begin{cases} 2k < 0 \\ \Delta = k^2 - 4 \times 2k \times \left(-\frac{3}{8}\right) < 0 \end{cases}, \text{ 解得: } -3 < k < 0,$$

综上所述: k 的取值范围为: $(-3, 0]$.

故选: D.

2. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且对任意的 $0 < m < n$, 都有 $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} < 0$, 且 $f(4) = 0$, 则

不等式 $\frac{f(-x-2) - f(x+2)}{x} > 0$ 的解集为 ()

- A. $(-6, 0)$ B. $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$
C. $(-\infty, -6) \cup (0, 2)$ D. $(-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (2, +\infty)$

【答案】D

【详解】因为对任意的 $0 < m < n$ ，都有 $\frac{f(m)-f(n)}{m-n} < 0$ ，此时 $m-n < 0$ ，则 $f(m) > f(n)$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减，

因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减， $f(-4) = -f(4) = 0$ ，

所以当 $x < -4$ 和 $0 < x < 4$ 时， $f(x) > 0$ ；当 $-4 < x < 0$ 和 $x > 4$ 时， $f(x) < 0$ 。

由 $\frac{f(-x-2)-f(x+2)}{x} = \frac{-2f(x+2)}{x} > 0$ ，即 $xf(x+2) < 0$ ，

所以 $\begin{cases} x < 0 \\ x+2 < -4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0 \\ 0 < x+2 < 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0 \\ x+2 > 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 0 \\ -4 < x+2 < 0 \end{cases}$ ，

所以 $x < -6$ 或 $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$ 或 x 无解，

所以原不等式解集为 $(-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (2, +\infty)$

故选：D

3. 已知函数 $f(x) = -x + \lg \frac{2-x}{2+x}$ ，且 $f(m) + f(2m-1) > 0$ ，则实数 m 的取值范围是 ()

A. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$

B. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$

D. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

【答案】D

【详解】函数 $f(x) = -x + \lg \frac{2-x}{2+x}$ ，则 $\frac{2-x}{2+x} > 0$ ，即 $(x-2)(x+2) < 0$ ，解得 $-2 < x < 2$ ，

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$ ，且 $f(-x) = x + \lg \frac{2+x}{2-x} = -\left(-x + \lg \frac{2-x}{2+x}\right) = -f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 为奇函数，

又函数 $y = \frac{2-x}{2+x} = \frac{-(x+2)+4}{2+x} = -1 + \frac{4}{x+2}$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递减，

所以 $y = \lg \frac{2-x}{2+x}$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递减，

所以不等式 $f(m) + f(2m-1) > 0$ ，即 $f(m) > f(1-2m)$ ，

等价于 $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ -2 < 2m-1 < 2 \\ m < 1-2m \end{cases}$ ，解得 $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{3}$ ，即实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ 。

故选：D

4. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ， $f(x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称， $f(3) = 0$ ，且对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ ，

$x_1 \neq x_2$, 满足 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$, 则不等式 $(x-1)f(x+1) \geq 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

B. $[-4, -1] \cup [0, 1]$

C. $[-4, -1] \cup [1, 2]$

D. $[-4, -1] \cup [2, +\infty)$

【答案】C

【详解】Q $f(x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, $\therefore f(x)$ 的图象关于点 $(0, 0)$ 对称, $\therefore f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数,

Q 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, $x_1 \neq x_2$, 满足 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上也单调递减,

又 $f(3)=0$ 所以 $f(-3)=0$, 且 $f(0)=0$,

所以当 $x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3)$ 时, $f(x) > 0$; 当 $x \in (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$,

所以由 $(x-1)f(x+1) \geq 0$ 可得 $\begin{cases} x-1 < 0, \\ -3 \leq x+1 \leq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-1 > 0, \\ 0 \leq x+1 \leq 3 \end{cases}$ 或 $x-1=0$,

解得 $-4 \leq x \leq -1$ 或 $1 \leq x \leq 2$, 即不等式 $(x-1)f(x+1) \geq 0$ 的解集为 $[-4, -1] \cup [1, 2]$.

故选: C.

5. 已知函数 $f(x) = x|x|$, 关于 x 的不等式 $f(x^2-1) + 4f(ax+1) \geq 0$ 在 R 上恒成立, 则 a 的取值范围为 ()

A. $[0, 2]$

B. $[0, 1]$

C. $[-2, 2]$

D. $[-1, 1]$

【答案】D

【详解】由 $f(x^2-1) + 4f(ax+1) \geq 0$, 得 $f(x^2-1) \geq -4f(ax+1)$.

因为 $f(x)$ 的定义域为 R , $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数,

因此 $f(x^2-1) \geq 4f(-ax-1)$.

又 $f(2x) = 2x|2x| = 4x|x| = 4f(x)$,

所以 $f(x^2-1) \geq f(-2ax-2)$.

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x|x| = x^2$ 单调递增, 而 $f(x)$ 为奇函数,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以 $x^2 - 1 \geq -2ax - 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 即 $x^2 + 2ax + 1 \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,

所以 $\Delta = 4a^2 - 4 \leq 0$, 解得 $-1 \leq a \leq 1$,

故 a 的取值范围为 $[-1, 1]$.

故选: D.

6. $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 对任意的 $x_2 > x_1 \geq 0$, 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 2$, 且 $f(2) = 4$, 则不等式

$f(x) > 2|x|$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

B. $(2, +\infty)$

C. $(0, 2)$ D. $(-\infty, 2)$

【答案】A

【详解】对任意的 $x_2 > x_1 \geq 0$, 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 2$, 则 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - 2 = \frac{[f(x_2) - 2x_2] - [f(x_1) - 2x_1]}{x_2 - x_1} > 0$,

令 $g(x) = f(x) - 2|x|$, 则 $g(x) = f(x) - 2|x|$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

所以 $g(-x) = f(-x) - 2|-x| = f(x) - 2|x| = g(x)$, 即 $g(x) = f(x) - 2|x|$ 为偶函数,

又 $g(2) = f(2) - 2 \times |2| = 0$,

由 $f(x) > 2|x|$, 可得 $g(x) = f(x) - 2|x| > 0$, 即 $g(|x|) > g(2)$,

所以 $|x| > 2$,

所以 $f(x) > 2|x|$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$,

故选: A.

7. 函数 $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \geq a \\ -x^3+3x^2+9x+5, & x < a \end{cases}$, 其中 $a \leq -2$, 则满足 $f(x) + f(x-1) < 5$ 的 x 取值范围是

()

A. $(-1, +\infty)$

B. $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$

C. $(-\sqrt{3}, +\infty)$

D. $(0, +\infty)$

【答案】A

【详解】因为 $a \leq -2$ ，当 $x < a$ 时， $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$ ，

则 $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x+1)(x-3) < 0$ ，

所以，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递减，故 $f(x) > -a^3 + 3a^2 + 9a + 5$ ，

当 $x \geq a$ 时， $f(x) = -x + 1$ ，显然函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上为减函数，

此时， $f(x) \leq f(a) = -a + 1$ 。

因为 $(-a^3 + 3a^2 + 9a + 5) - (-a + 1) = -a^3 + 3a^2 + 10a + 4$ ，

令 $h(a) = -a^3 + 3a^2 + 10a + 4$ ，其中 $a \leq -2$ ，

则 $h'(a) = -3a^2 + 6a + 10 = -3(a-1)^2 + 13 \leq -3 \times (-3)^2 + 13 < 0$ ，

所以，函数 $h(a)$ 在 $(-\infty, -2]$ 上单调递减，故 $h(a) \geq h(-2) = 8 + 12 - 20 + 4 = 4 > 0$ ，

综上所述，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，

令 $p(x) = f(x) + f(x-1)$ ，则函数 $p(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

又因为 $p(-1) = f(-1) + f(-2) = 5$ ，所以， $f(x) + f(x-1) < 5$ 等价于 $p(x) < p(-1)$ ，

结合函数 $p(x)$ 的单调性可得 $x > -1$ ，故原不等式的解集为 $(-1, +\infty)$ 。

故选：A。

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - \ln(x+1) - 1, & x \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{e^x} + \ln(1-x), & x < 0 \end{cases}$ ，若 $f(e^x - 2) + f(e^{2x}) \leq 0$ ，则实数 x 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 0]$

B. $[0, +\infty)$

C. $[-\ln 2, 0]$

D. $(-\infty, -\ln 2]$

【答案】A

【详解】当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，则 $f(-x) = e^{-x} - \ln(-x+1) - 1 = -f(x)$ ，

同理，当 $x > 0$ 时， $-x < 0$ ，则 $f(-x) = 1 - \frac{1}{e^{-x}} + \ln(1+x) = -f(x)$ ，

且 $f(0) = 0$ ，可知函数 $f(x)$ 为奇函数；

当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$ ，则 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ ，

令 $m(x) = f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ ，则 $m'(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ ，

所以 $m(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, 即 $m(x) \geq m(0) = 0$, 即 $f'(x) \geq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增, 且 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

则 $f(e^x - 2) + f(e^{2x}) \leq 0 \Rightarrow f(e^x - 2) \leq -f(e^{2x}) = f(-e^{2x})$,

即 $e^x - 2 \leq -e^{2x} \Rightarrow e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$, 即 $(e^x + 2)(e^x - 1) \leq 0$,

可得 $-2 \leq e^x \leq 1$, 且 $e^x > 0$, 所以 $0 < e^x \leq 1$, 解得 $x \leq 0$,

所以解集为 $(-\infty, 0]$.

故选:A

9. 德国数学家莱布尼茨是微积分的创立者之一, 他从几何问题出发, 引进微积分概念. 在研究切线时认识到, 求曲线的切线的斜率依赖于纵坐标的差值和横坐标的差值, 以及当此差值变成无限小时它们的比值, 这也正是导数的几何意义. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 若 $f''(x) > 0$, 对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 总有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, 则下列选项正确的是 ()

A. $f(2) < f(e) < f(\pi)$ B. $f'(\pi) < f'(e) < f'(2)$

C. $f'(2) < f(3) - f(2) < f'(3)$ D. $f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$

【答案】ABD

【详解】A 选项, 根据 $f''(x) > 0$ 可得, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

因为 $\pi > e > 2$, 所以 $f(2) < f(e) < f(\pi)$, A 正确;

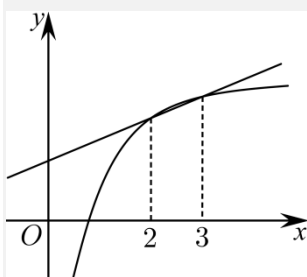
B 选项, 因为 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 总有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$,

所以函数图象上凸, 画出函数图象, 由几何意义可知, $f'(x)$ 表示函数图象上的各点处的切线斜率,

显然随着 x 的增大, 切线斜率变小, 且恒为正,

因为 $\pi > e > 2$, 所以 $f'(\pi) < f'(e) < f'(2)$, B 正确;

C 选项, $k_{AB} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f(3) - f(2)$, 结合函数图象可知 $f'(3) < f(3) - f(2) < f'(2)$, C 错误, D 正确.



故选：ABD

10. 设函数 $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x}$ ，则 ()

A. $f(x)$ 的一个周期为 π

B. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 上有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $f(x)$ 图象的一条对称轴为直线 $x = \frac{\pi}{4}$

【答案】BD

【详解】对 A: $f(x+\pi) = \frac{\sin 2(x+\pi)}{\sin(x+\pi) + \cos(x+\pi)} = \frac{\sin(2x+2\pi)}{-\sin x - \cos x} = -\frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = -f(x)$ ，故 π 不是 $f(x)$ 的

周期，A 错误；

对 B: 令 $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，则 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = t^2 - 1$ ，

则 $y = \frac{t^2 - 1}{t} = t - \frac{1}{t}$ ，

$\because x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ，则 $x + \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ， $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in (0, 1)$ ，

$\therefore t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，且 $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in (0, \sqrt{2})$ ，

又 $\because y = t - \frac{1}{t}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，B 正确；

对 C: $\because \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ ，则 $x + \frac{\pi}{4} \in (0, \pi)$ ，

$\therefore \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in (0, 1]$ ，则 $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in (0, \sqrt{2}]$ ，

又 $\because y = t - \frac{1}{t}$ 在 $(0, \sqrt{2}]$ 上单调递增，且 $y|_{x=\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore y = t - \frac{1}{t}$ 在 $(0, \sqrt{2}]$ 上最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

即 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 上有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，C 错误；

对 D: $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\sin(\pi-2x)}{\cos x + \sin x} = \frac{\sin 2x}{\sin x + \cos x} = f(x)$, 故 $f(x)$ 图象的一条对称轴为

直线 $x = \frac{\pi}{4}$, D 正确.

故选: BD.

11. 已知函数 $f(x) = ax^3 + (1-a)x$, 则 ()

A. 函数 $f(x)$ 为奇函数

B. 当 $f\left(\frac{1}{a}\right) = 1$ 时, $a = -\frac{1}{2}$ 或 1

C. 若函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点, 则实数 a 的取值范围为 $[0, 1)$

D. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的值域为 $[-1, 1]$, 则实数 a 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$

【答案】ABD

【详解】对于选项 A, 由 $f(-x) = -f(x)$, 可知函数 $f(x)$ 为奇函数, 故 A 选项正确;

对于选项 B, 由 $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1-a}{a} = \frac{1+a-a^2}{a^2} = 1$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$ 或 $a = 1$, 故 B 选项正确;

对于选项 C, 由 $f(x) = 0$, 有 $x[ax^2 + (1-a)] = 0$, 当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 仅有一个零点 0, 当 $a \neq 0$ 时, 必有 $\frac{a-1}{a} \leq 0$, 有 $0 < a \leq 1$, 可得 $0 \leq a \leq 1$, 故 C 选项错误;

对于选项 D, 由 $f(1) = 1, f(-1) = -1, f(0) = 0, f(-x) = -f(x)$, 可知满足题意只需

当 $0 < x < 1$ 时, $-1 \leq f(x) \leq 1$, 有 $\begin{cases} ax^3 + (1-a)x + 1 \geq 0 \\ ax^3 + (1-a)x - 1 \leq 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a(x^3 - x) + (x+1) \geq 0 \\ a(x^3 - x) + (x-1) \leq 0 \end{cases}$,

所以 $\begin{cases} (x+1)(ax^2 - ax + 1) \geq 0 \\ (x-1)(ax^2 + ax + 1) \leq 0 \end{cases}$, 由 $0 < x < 1$, 有 $\begin{cases} ax^2 - ax + 1 \geq 0 \\ ax^2 + ax + 1 \geq 0 \end{cases}$,

则 $\begin{cases} a \leq \frac{1}{x-x^2} \\ a \geq -\frac{1}{x^2+x} \end{cases}$, 可知当 $0 < x < 1$ 时, $a \leq \frac{1}{x-x^2}$ 和 $a \geq -\frac{1}{x^2+x}$ 恒成立,

$x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}, 0 < x^2 + x < 2$, 有 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 4$. 故 D 选项正确.

故选: ABD.

易错点三: 奇偶性的前提及两个函数与一个函数的区别 (函数的奇偶性、周期性、对称性)



1. 奇偶性技巧

(1) 函数具有奇偶性的必要条件是定义域关于原点对称.

(2) 奇偶函数的图象特征.

函数 $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称;

函数 $f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于原点中心对称.

(3) 若奇函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处有意义, 则有 $f(0) = 0$;

偶函数 $y = f(x)$ 必满足 $f(x) = f(|x|)$.

(4) 偶函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相反; 奇函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相同.

(5) 若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 则函数 $f(x)$ 能表示成一个偶函数与一个奇函数的和的形式. 记

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \quad \text{则 } f(x) = g(x) + h(x).$$

(6) 运算函数的奇偶性规律: 运算函数是指两个 (或多个) 函数式通过加、减、乘、除四则运算所得的函数, 如 $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) \times g(x), f(x) \div g(x)$.

对于运算函数有如下结论: 奇 $\pm$ 奇 = 奇; 偶 $\pm$ 偶 = 偶; 奇 $\pm$ 偶 = 非奇非偶;

奇 $\times (\div)$ 奇 = 奇; 奇 $\times (\div)$ 偶 = 偶; 偶 $\times (\div)$ 偶 = 偶.

(7) 复合函数 $y = f[g(x)]$ 的奇偶性原则: 内偶则偶, 两奇为奇.

(8) 常见奇偶性函数模型

奇函数: ① 函数 $f(x) = m(\frac{a^x + 1}{a^x - 1}) (x \neq 0)$ 或函数 $f(x) = m(\frac{a^x - 1}{a^x + 1})$.

② 函数 $f(x) = \pm(a^x - a^{-x})$.

③ 函数 $f(x) = \log_a \frac{x+m}{x-m} = \log_a (1 + \frac{2m}{x-m})$ 或函数 $f(x) = \log_a \frac{x-m}{x+m} = \log_a (1 - \frac{2m}{x+m})$

④ 函数 $f(x) = \log_a (\sqrt{x^2 + 1} + x)$ 或函数 $f(x) = \log_a (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

注意: 关于①式, 可以写成函数 $f(x) = m + \frac{2m}{a^x - 1} (x \neq 0)$ 或函数 $f(x) = m - \frac{2m}{a^x + 1} (m \in \mathbb{R})$.

偶函数: ① 函数 $f(x) = \pm(a^x + a^{-x})$.

②函数 $f(x) = \log_a(a^{mx} + 1) - \frac{mx}{2}$.

③函数 $f(|x|)$ 类型的一切函数.

④常数函数

2. 周期性技巧

结论 1: 若对于非零常数 m 和任意实数 x , 等式 $f(x+m) = -f(x)$ 恒成立, 则 $f(x)$ 是周期函数, 且 $2m$ 是它的一个周期.

证明: $f(x+2m) = f(x+m+m) = -f(x+m) = f(x) \therefore T = 2m$

也可理解为: 平移 m 个单位到谷底, 再平移一个单位到巅峰, 再平移一个单位又到谷底, 则谷底与谷底的距离为 $2m$, $\therefore T = 2m$

结论 2: 定义在 R 上的函数 $f(x)$, 对任意的 $x \in R$, 若有 $f(x+a) = f(x+b)$ (其中 a, b 为常数, $a \neq b$), 则函数 $f(x)$ 是周期函数, $|a-b|$ 是函数的一个周期.

证明: $f(x-a+a) = f(x-a+b) \Rightarrow f(x) = f(x+b-a) \therefore T = |b-a|$

口诀: 同号差 (周期) 异号加 (对称轴) $\Rightarrow$ 只研究 x 前的正负.

结论 3: 定义在 R 上的函数 $f(x)$, 对任意的 $x \in R$, 若有 $f(x+a) = -f(x+b)$ (其中 a, b 为常数, $a \neq b$), 则函数 $f(x)$ 是周期函数, $2|a-b|$ 是函数的一个周期.

证明: $f(x+a) = -f(x+b)$ 先向左平移 a 个单位得 $f(x-a+a) = -f(x-a+b)$

$\Rightarrow f(x) = -f(x+b-a)$ 令 $b-a = m' \Rightarrow f(x) = -f(x+m')$ 如同结论 1

结论 4: 定义在 R 上的函数 $f(x)$, 对任意的 $x \in R$, 若有 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$, (或 $f(x+a) = -\frac{1}{f(x)}$) (其中 a 为常数, $a \neq 0$), 则函数 $f(x)$ 是周期函数, $2|a|$ 是函数的一个周期.

证明: $f(x+a) = \pm \frac{1}{f(x)}$, $f(x+2a) = f(x+a+a) = \pm \frac{1}{f(x+a)} = f(x) \therefore T = 2|a|$

结论 5: 定义在 R 上的函数 $f(x)$, 对任意的 $x \in R$, 有 $f(a+x) = f(a-x)$ 且 $f(b+x) = f(b-x)$,

(其中 a, b 是常数, $a \neq b$) 则函数 $y = f(x)$ 是周期函数, $2|a-b|$ 是函数的一个周期.

另一种题干出现的信息: ①若 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a, x = b$ 都对称, 则等价于 $f(a+x) = f(a-x)$

且 $f(b+x)=f(b-x)$, 则 $y=f(x)$ 为周期函数且 $T=2|a-b|$.

②若 $y=f(x)$ 为偶函数且图象关于直线 $x=a$ 对称, 则 $y=f(x)$ 为周期函数且 $T=2|a|$

证明: $f(a+x)=f(a-x)$ 向左平移 a 个单位, 得 $f(x-a+a)=f(a-[x-a])$

$\Rightarrow f(x)=f(2a-x)$, 同理 $\Rightarrow f(x)=f(2b-x)$, $\Rightarrow f(2a-x)=f(2b-x)$

利用口诀: 同号差 (周期) 异号加 (对称轴) $\Rightarrow$ 只研究 x 前的正负. 秒出周期

结论 6: 若定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 对任意实数 $x \in R$, 恒有 $f(x)=f(a+x)+f(x-a)$ 成立 ($a \neq 0$),

则 $f(x)$ 是周期函数, 且 $6|a|$ 是它的一个周期.

证明: 由函数 $f(x)=f(a+x)+f(x-a) \Rightarrow f(x+a)=f(x+2a)+f(x)$

$\Rightarrow f(x)=f(x+2a)+f(x)+f(x-a) \Rightarrow f(x-a)=-f(x+2a)$, 向右平移 a 个单位得

$f(x)=-f(x+3a) \Rightarrow f(x+3a+3a)=-f(x+3a)=f(x) \therefore T=6|a|$

口诀: 内同号, 外异号, 内部只差需 2 倍, 出现周期很 easy.

结论 7: 若对于非零常数 m 和任意实数 x , 等式 $f(x+m)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 成立, 则 $f(x)$ 是周期函数, 且 $4m$ 是

它的一个周期.

证明: $f(x+m)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)} \Rightarrow f(x+2m)=\frac{1+f(x+m)}{1-f(x+m)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$

$f(x+2m)=-\frac{1}{f(x)}$ 如同结论 4, $f(x+2m+2m)=-\frac{1}{f(x+2m)}=f(x) \therefore T=4m$

结论 8: 若对于非零常数 m 和任意实数 x , 等式 $f(x+m)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ 成立, 则 $f(x)$ 是周期函数, 且 $2m$ 是

它的一个周期.

证明: $f(x+m)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)} \Rightarrow f(x+2m)=\frac{1-f(x+m)}{1+f(x+m)}=\frac{1-\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\frac{1-f(x)}{1+f(x)}}=f(x)$

$\therefore T=2m$

结论 9: 若对于非零常数 m 和任意实数 x , 等式 $f(x+m) = 1 - \frac{1}{f(x)} (f(x) \neq 0)$ 成立, 则 $f(x)$ 是周期函数,

且 $3m$ 是它的一个周期.

证明: $f(x+m) = 1 - \frac{1}{f(x)} (f(x) \neq 0)$ 得

$$f(x+3m) = 1 - \frac{1}{f(x+2m)} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{f(x+m)}} = \frac{-1}{f(x+m)-1} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{f(x)} - 1} = f(x)$$

$$\therefore T = 3m$$

结论 10: ① 若定义在 R 上的函数 $y = f(x)$ 的图象关于两点 $A(a, y_0), B(b, y_0)$ 都对称, 则 $f(x)$ 是周期函数,

且 $2|b-a|$ 是它的一个周期.

② 若奇函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $A(a, 0)$ 对称, 则 $f(x)$ 是周期函数, 且 $2|a|$ 是它的一个周期.

证明: 函数 $y = f(x)$ 满足 $f(a+x) + f(a-x) = 2y_0$ 且 $f(b+x) + f(b-x) = 2y_0$,

$$\text{则 } f(x) = 2y_0 - f(2a-x) = 2y_0 - f(2b-x) \Rightarrow f(2a-x) = f(2b-x)$$

利用口诀: 同号差 (周期) 异号加 (对称轴) $\Rightarrow$ 只研究 x 前的正负. 秒出周期

结论 11: ① 若定义在 R 上的函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $A(a, y_0)$ 和直线 $x = b$ 都对称, 则 $f(x)$ 是周期函数,

且 $4|b-a|$ 是它的一个周期.

② 若奇函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称, 则 $f(x)$ 是周期函数, 且 $4|a|$ 是它的一个周期.

证明: 函数 $y = f(x)$ 满足 $f(a+x) + f(a-x) = 2y_0$ 且 $f(b+x) = f(b-x)$,

$$\text{则 } f(x) = 2y_0 - f(2a-x) = f(2b-x) \Rightarrow f(x) = 2y_0 - f(2b-2a+x) = 2y_0 - f(2a-x)$$

$$\therefore f(2b+x) = 2y_0 - f(2a+x) \Rightarrow f(x) = 2y_0 - f(2b-2a+x)$$

$$\therefore f(x) = 2y_0 - f(2b-2a+x) = 2y_0 + f(4b-4a+x) - 2y_0 \therefore T = 4|b-a|$$

3. 对称性技巧

(1) 若函数 $y = f(x)$ 关于直线 $x = a$ 对称, 则 $f(a+x) = f(a-x)$.

(2) 若函数 $y = f(x)$ 关于点 (a, b) 对称, 则 $f(a+x) + f(a-x) = 2b$.

(3) 函数 $y = f(a+x)$ 与 $y = f(a-x)$ 关于 y 轴对称, 函数 $y = f(a+x)$ 与 $y = -f(a-x)$ 关于原点对称.

结论:

1. (1) 如果一个奇函数 $f(x)$ 在 0 点处有定义, 即 $f(0)$ 有意义, 那么一定有 $f(0) = 0$.

(2) 如果函数 $f(x)$ 是偶函数, 那么 $f(x) = f(|x|)$.

2. 函数周期性常用结论

对 $f(x)$ 定义域内任一自变量的值 x :

(1) 若 $f(x+a) = -f(x)$, 则 $T = 2a(a > 0)$.

(2) 若 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$, 则 $T = 2a(a > 0)$.

(3) 若 $f(x+a) = -\frac{1}{f(x)}$, 则 $T = 2a(a > 0)$.

3. 对称性的三个常用结论

(1) 若函数 $y = f(x+a)$ 是偶函数, 则函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称.

(2) 若对于 $\mathbf{R}$ 上的任意 x 都有 $f(2a-x) = f(x)$ 或 $f(-x) = f(2a+x)$, 则 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = a$ 对称.

(3) 若函数 $y = f(x+b)$ 是奇函数, 则函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(b, 0)$ 中心对称.

易错提醒: 奇偶性的前提及两个函数与一个函数的区别

1. 函数的奇偶性

由函数奇偶性的定义可知, 函数具有奇偶性的一个前提条件是: 对于定义域内的任意一个 x , $-x$ 也在定义域内 (即定义域关于原点对称).

2. 函数的对称性

(1) 若函数 $y = f(x+a)$ 为偶函数, 则函数 $y = f(x)$ 关于 $x = a$ 对称.

(2) 若函数 $y = f(x+a)$ 为奇函数, 则函数 $y = f(x)$ 关于点 $(a, 0)$ 对称.

(3) 若 $f(x) = f(2a-x)$, 则函数 $f(x)$ 关于 $x = a$ 对称.

(4) 若 $f(x) + f(2a-x) = 2b$, 则函数 $f(x)$ 关于点 (a, b) 对称.



例 . 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(x+1)$ 是奇函数, $f(2x+3)$ 是偶函数, 则 ()

A. $f(0) = 0$

B. $f(4) = 0$

C. $f(5) = 0$

D. $f(-2) = 0$

【答案】C

【详解】因为 $f(x+1)$ 是奇函数，所以 $f(-x+1) = -f(x+1)$ ，则 $f(1) = 0$ 。

又 $f(2x+3)$ 是偶函数，所以 $f(-2x+3) = f(2x+3)$ ，所以 $f(5) = f(1) = 0$ 。

故选：C。

变式 1. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数， $f(2x+1)-1$ 是奇函数，则下列结论不正确的是

()

A. $f(1)=1$

B. $f(0)=0$

C. $f(x)$ 是以 4 为周期的函数

D. $f(x)$ 的图象关于 $x=6$ 对称

【答案】B

【详解】因为函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，所以 $f(x) = f(-x)$ ，

因为 $f(2x+1)-1$ 是奇函数，所以 $f(-2x+1)-1 = -[f(2x+1)-1] = -f(2x+1)+1$ ，

将 x 换成 $\frac{1-x}{2}$ ，则有 $f(x)-1 = -f(2-x)+1 \Rightarrow f(x)+f(2-x) = 2$ ，

A: 令 $x=1$ ，所以 $f(1)+f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 1$ ，因此本选项正确；

B: 因为 $f(x)+f(2-x) = 2$ ，所以函数 $f(x)$ 关于点 $(1,1)$ 对称，

由 $f(x)+f(2-x) = 2$ ，可得 $f(0)+f(2) = 2$ ， $f(2)$ 的值不确定，

因此不能确定 $f(0)$ 的值，所以本选项不正确；

C: 因为 $f(x)+f(2-x) = 2$ ，

所以 $f(x+2)+f(-x) = 2 \Rightarrow f(x+2)+f(x) = 2 \Rightarrow f(x+4)+f(x+2) = 2$ ，

所以 $f(x) = f(x+4)$ ，因此 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，因此本选项正确；

D: 因为 $f(x)+f(2-x) = 2$ ，

所以 $f(2+x)+f(-x) = 2 \Rightarrow f(2+x)+f(x) = 2$ ，

因此有 $f(2+x) = f(2-x)$ ，

所以函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称，

由上可知 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，

所以 $f(x)$ 的图象也关于 $x=6$ 对称，因此本选项正确，

故选：B.

变式 2. 已知函数 $y=f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ ($x \neq 1$)，下列结论中：①当 $x>1$ 时， $f(x)$ 的最小值为 3；②函数 $y=f(x+1)-1$ 是奇函数；③函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 (1,1) 对称；④ $y+1=0$ 是 $y=f(x)$ 图象的一条切线，正确结论的个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【详解】①当 $x>1$ 时， $x-1>0$ ， $f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}+1 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}}+1=3$ ，当且仅当 $x-1=\frac{1}{x-1}$ 即 $x=2$ 时等号成立，所以 $f(x)$ 最小值是 3，正确；

②函数 $y=f(x+1)-1=x+1+\frac{1}{x+1-1}-1=x+\frac{1}{x}$ ，记 $g(x)=x+\frac{1}{x}$ ，其定义域是 $\{x|x \neq 0\}$ ，

$g(-x)=-x-\frac{1}{x}=-g(x)$ ，因此 $g(x)$ 是奇函数，正确；

③ $g(x)$ 的图象关于原点对称，把它向右平移一个单位，再向上平移一个单位得 $f(x)$ 的图象，因此 $f(x)$ 的图象关于点 (1,1) 对称，正确；

④ $f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}$ ，由 $f'(x)=0$ 得 $x=2$ 或 $x=0$ ， $f(2)=3$ ， $f(0)=-1$ ，

因此直线 $y=3$ 和 $y=-1$ 都是函数 $y=f(x)$ 图象的切线，④正确，

故选：D.

变式 3. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$ ， $f(1-x)=f(1+x)$ ，当 $x \in (0,1]$ 时，

$f(x)=2\log_2 x-1$ ，则 $f(2023)$ 的值为 ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】C

【详解】因为 $f(-x)=-f(x)$ ， $f(1-x)=f(1+x)$ ，

所以 $f(2+x)=f(1+1+x)=f[1-(1+x)]=f(-x)=-f(x)$ ，

所以 $f(4+x)=f(2+2+x)=-f(2+x)=f(x)$ ，所以 4 为函数 $f(x)$ 的周期，

所以 $f(2023)=f(4 \times 506-1)=f(-1)=-f(1)=-(2\log_2 1-1)=1$ 。故选：C.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/285041112212011220>