

益阳市 2024 届高三 4 月教学质量检测

数学

(时量: 120 分钟 满分: 150 分)

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设 i 为虚数单位, 且 $z(1+i)=2$, 则 $\bar{z} =$ ()

- A. $-1-i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $1+i$

【答案】D

【解析】

【分析】根据复数的除法运算求 z , 进而可得共轭复数.

【详解】由题意可得: $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$,

所以 $\bar{z} = 1+i$.

故选: D.

2. 已知 $a > 0$, $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - bx$, 则 x_0 是方程 $ax = b$ 的解的充要条件是 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(x_0)$

【答案】C

【解析】

【分析】利用二次函数的图象和性质, 理解全称量词命题和存在量词命题的真假以及充要条件的意义即可.

【详解】因为 $a > 0$, 所以函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - bx$ 的图象是开口向上的抛物线, 且对称轴为:

$$x = -\frac{-b}{2 \times \frac{1}{2}a} = \frac{b}{a}, \text{ 函数的最小值为 } f\left(\frac{b}{a}\right).$$

若 “ x_0 是方程 $ax = b$ 的解”, 则 $x_0 = \frac{b}{a}$, 那么 $f(x_0) = f\left(\frac{b}{a}\right)$ 就是函数 $f(x)$ 的最小值,

所以 “ $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$ ”, 即 “ x_0 是方程 $ax = b$ 的解” 是 “ $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$ ” 的充分条件;

若“ $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$ ”，则 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的最小值，所以 $x_0 = \frac{b}{a}$ ，即 $ax_0 = b$ ，

所以“ x_0 是方程 $ax = b$ 的解”，故“ x_0 是方程 $ax = b$ 的解”是“ $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$ ”的必要条件.

综上所述：“ x_0 是方程 $ax = b$ 的解”的充要条件是“ $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(x_0)$ ”.

故选：C

3. 顶角为 36° 的等腰三角形，常称为“最美三角形”. 已知 $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ，则“最美三角形”的底边长与

腰长的比为（ ）

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用二倍角公式求出 $\sin 18^\circ$ ，再由锐角三角函数计算可得.

【详解】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 36^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D 为 BC 中点，

所以 $AD \perp BC$ ， $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 18^\circ$ ，

又 $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ，则 $\cos 36^\circ = \cos(2 \times 18^\circ) = 1 - 2\sin^2 18^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ，

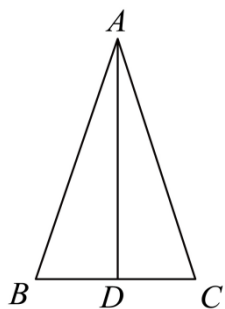
解得 $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 或 $\sin 18^\circ = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ （舍去），

即 $\sin \angle BAD = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ，

又 $\sin \angle BAD = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{BC}{2}}{AB} = \frac{1}{2} \times \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ，

所以 $\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，即“最美三角形”的底边长与腰长的比为 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

故选：B



4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n a_{n+1} = 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$ 且 $a_1 = 1$, 则 $a_9 =$ ()

A. 128

B. 64

C. 32

D. 16

【答案】D

【解析】

【分析】根据递推公式列出前几项即可.

【详解】因为 $a_n a_{n+1} = 2^n (n \in \mathbb{N}^*)$ 且 $a_1 = 1$,

所以 $a_1 a_2 = 2$, 则 $a_2 = 2$,

$a_2 a_3 = 2^2$, 则 $a_3 = 2$,

$a_3 a_4 = 2^3$, 则 $a_4 = 4$,

$a_4 a_5 = 2^4$, 则 $a_5 = 4$,

$a_5 a_6 = 2^5$, 则 $a_6 = 8$,

$a_6 a_7 = 2^6$, 则 $a_7 = 8$,

$a_7 a_8 = 2^7$, 则 $a_8 = 16$

$a_8 a_9 = 2^8$, 则 $a_9 = 16$.

故选: D

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1 (m > 0, n > 0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 有相同的焦点, 则 $\frac{4}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 ()

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【答案】D

【解析】

【分析】首先得到椭圆的焦点坐标, 依题意可得 $m + n = 1 (m > 0, n > 0)$, 利用乘“1”法及基本不等式计算可得.

【详解】椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 $(\pm 1, 0)$,

依题意可得 $m + n = 1 (m > 0, n > 0)$,

$$\text{所以 } \frac{4}{m} + \frac{1}{n} = \left(\frac{4}{m} + \frac{1}{n} \right) (m + n) = 4 + \frac{4n}{m} + \frac{m}{n} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{4n}{m} \cdot \frac{m}{n}} + 5 = 9,$$

当且仅当 $\frac{4n}{m} = \frac{m}{n}$, 即 $n = \frac{1}{3}$, $m = \frac{2}{3}$ 时取等号,

故 $\frac{4}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 9.

故选: D

6. 2023 年的某一天某红酒厂商为了在线出售其红酒产品, 联合小 Y 哥直播间, 邀请某“网红”来现场带货. 在带货期间, 为吸引顾客光临直播间、增加客流量, 发起了这样一个活动: 如果在直播间进来的顾客中, 出现生日相同的顾客, 则奖励生日相同的顾客红酒 1 瓶. 假设每个随机来访的顾客的出生日期都是相互独立的, 并且每个人都等可能地出生在一年 (365 天) 中任何一天 (2023 年共 365 天), 在 n 远小于 365 时, 近似地 $\ln \left[\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365} \right) \right] \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{-k}{365}$, $\ln 2 \approx 0.693$, 其中 $\prod_n a_i = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$. 如果要保证直播间至少两个人的生日在同一天, 那么来到直播间的人数最少应该为 ()

个人的生日在同一天, 那么来到直播间的人数最少应该为 ()

- A. 21 B. 22 C. 23 D. 24

【答案】C

【解析】

【分析】设人数为 n , 根据古典概型概率公式求出“至少有两个人在同一天生日”的概率, 再进行化简计算即可.

【详解】设直播间进来了 $n (n < 365)$ 个人, 则这 n 个人生日的可能性有 365^n 种, 这 n 个人中任意两个人都不在同一天生日的可能结果种数为 $365 \times 364 \times \dots \times (365 - n + 1)$,

设 $A =$ “这 n 个人中任意两个不是同一天生日”, 根据古典概型概率公式可得 $P(A) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365} \right)$,

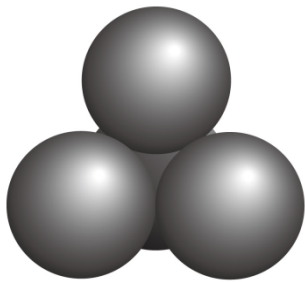
则其对立事件 $\bar{A} =$ “这 n 个人中至少有两个人的生日在同一天”的概率为 $1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365} \right)$.

由题意: $1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365} \right) \geq \frac{1}{2}$, 从而 $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365} \right) \leq \frac{1}{2}$, 得 $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{-k}{365} \leq -\ln 2$, 化简得

$$\frac{(n-1)n}{730} \geq \ln 2 \approx 0.693, \text{ 即 } (n-1)n \geq 730 \times 0.693 \approx 505.89, \text{ 故 } n_{\min} = 23.$$

故选：C.

7. 如图所示，4个球两两外切形成的几何体，称为一个“最密堆垒”. 显然，即使是“最密堆垒”，4个球之间依然存在着空隙. 材料学研究发现，某种金属晶体中4个原子的“最密堆垒”的空隙中如果再嵌入一个另一种金属原子并和原来的4个原子均外切，则材料的性能会有显著性变化. 记原金属晶体的原子半径为 r_A ，另一种金属晶体的原子半径为 r_B ，则 r_A 和 r_B 的关系是（ ）



A. $2r_B = \sqrt{3}r_A$

B. $2r_B = \sqrt{6}r_A$

C. $2r_B = (\sqrt{3}-1)r_A$

D. $2r_B = (\sqrt{6}-2)r_A$

【答案】D

【解析】

【分析】依题意画出直观图，则四个金属原子的球心的连线所围成的图形为正四面体 $P-ABC$ ，设正四面体的棱长为 a ($a > 0$)，高为 h ($h > 0$)，外接球球心为 O ， D 为正三角形 ABC 的中心，求出外接球的

半径 R ，即可得到
$$\begin{cases} a = 2r_A \\ \frac{\sqrt{6}}{4}a = r_A + r_B \end{cases}, \text{ 从而得解.}$$

【详解】由题意知，四个金属原子的球心的连线所围成的图形为如图所示的正四面体 $P-ABC$ ，设正四面体的棱长为 a ($a > 0$)，高为 h ($h > 0$)，外接球球心为 O ， D 为正三角形 ABC 的中心，则必有 $PD \perp$ 平面 ABC 且 P, O, D 三点共线，

在正三角形 ABC 中，易求得 $DB = \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,

在 $\triangle PDB$ 中，由 $PB^2 = PD^2 + DB^2$ ，可得 $h = PD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$,

在 $\triangle OBD$ 中，由 $OB^2 = OD^2 + DB^2$ ，得 $R^2 = (h-R)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$,

再构造函数 $h(x) = x \ln x - 2g(x)$, 则 $h'(x) = \ln x + 1 - 2g'(x) = 1 - \ln x$,

易知, 当 $x \in (0, e)$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x)$ 单调递

减, 所以 $h(x)_{\max} = h(e) = e - 2g(e) = e - 2e^2 f(e)$,

由于 $2ef(e) = 1$, 所以 $h(e) = 0$, 所以 $h(x) \leq 0$,

所以当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减.

又根据单位圆可得三角不等式 $\sin \frac{1}{3} < \frac{1}{3} < \tan \frac{1}{3}$, 又 $\sin \frac{1}{4} < \sin \frac{1}{3}$, $\tan \frac{1}{3} < \tan \frac{1}{2}$, 所以

$$f\left(\tan \frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\sin \frac{1}{3}\right), \text{ 故 } f\left(\tan \frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\sin \frac{1}{4}\right).$$

故选: C.

【点睛】方法点睛: 本题考查构造函数, 并利用导数比大小的问题. 题中条件 $x^2 f'(x) + 2xf(x) = \ln x$ 可以构造函数 $g(x) = x^2 f(x)$, 进一步构造函数 $h(x) = x \ln x - 2g(x)$, 然后讨论 $h(x)$ 的单调性, 由 $h(x) \leq 0$ 得到 $f'(x) < 0$, 再由三角不等式得到自变量的大小关系, 最后根据 $f(x)$ 的单调性求解.

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得部分分.

9. 下列命题中, 正确的是 ()

A. 函数 $v(x) = \frac{|x|}{x}$ 与 $u(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$ 表示同一函数

B. 函数 $v(x) = x^2 - 2x + 2$ 与 $u(t) = t^2 - 2t + 2$ 是同一函数

C. 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $x = 2024$ 的图象至多有一个交点

D. 函数 $f(x) = |x-1| - x$, 则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据相等函数的定义判断 A、B, 根据函数的定义判断 C, 由函数解析式求出函数值, 即可判断

D.

【详解】对于 A: $v(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$, 因为两函数的定义域不相同, 故不是同一函数, 故 A 错误;

对于 B: 函数 $v(x) = x^2 - 2x + 2$ 与 $u(t) = t^2 - 2t + 2$ 定义域相同, 解析式一致故是同一函数, 故 B 正确;

对于 C: 根据函数的定义可知, 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $x = 2024$ 的图象至多有一个交点, 故 C 正确;

对于 D: 因为 $f(x) = |x-1| - x$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{2} - 1\right| - \frac{1}{2} = 0$,

则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(0) = |0-1| - 0 = 1$, 故 D 错误.

故选: BC

10. 如图 1 所示, 为曲杆道闸车库出入口对人车辆作“放行”或“阻拦”管制的工具. 它由转动杆 OP 与横杆 PQ 组成, P, Q 为横杆的两个端点. 在道闸抬起的过程中, 横杆 PQ 始终保持水平. 如图 2 所示, 以点 O 为原点, 水平方向为 x 轴正方向建立平面直角坐标系. 若点 O 距水平地面的高度为 1 米, 转动杆 OP 的长度为 1.6 米, 横杆 PQ 的长度为 2 米, OP 绕点 O 在与水平面垂直的平面内转动, 与水平方向所成的角 $\theta \in [30^\circ, 90^\circ]$ ()

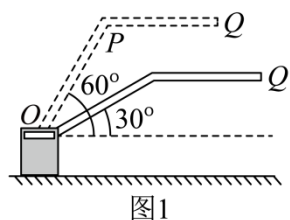


图1

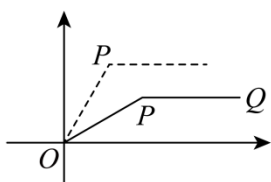


图2

A. 则点 P 运动的轨迹方程为 $x^2 + (y+1)^2 = \frac{64}{25}$ (其中 $x \in \left[0, \frac{4\sqrt{3}}{5}\right], y \in \left[\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right]$)

B. 则点 Q 运动的轨迹方程为 $(x-2)^2 + y^2 = \frac{64}{25}$ (其中 $x \in \left[2, \frac{10+4\sqrt{3}}{5}\right], y \in \left[\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right]$)

C. 若 OP 绕点 O 从与水平方向成 30° 角匀速转动到与水平方向成 90° 角, 则横杆 PQ 距水平地面的高度为 $\frac{13}{5}$ 米

D. 若 OP 绕点 O 从与水平方向成 30° 角匀速转动到与水平方向成 90° 角, 则点 Q 运动轨迹的长度为 $\frac{13}{5}$ 米

【答案】BC

【解析】

【分析】由题意易判断点 P 的轨迹是以 O 为原点， OP 为半径的圆，求得方程判断 A；点 Q 的轨迹是以 $(2,0)$ ，半径为 1.6 的圆，求得方程判断 B；求得横杆 PQ 距水平地面的高度可判断 C；求得点 Q 运动轨迹的长度即为圆（其中）的弧长判断 D.

【详解】对于 A：点 P 的轨迹显然是以 O 为原点， OP 为半径的圆，

故点 P 运动轨迹方程为 $x^2 + y^2 = \frac{64}{25}$ （其中 $x \in [0, \frac{4\sqrt{3}}{5}]$, $y \in [\frac{4}{5}, \frac{8}{5}]$ ），故 A 错误；

对于 B：设 $Q(x, y)$, $P(x_0, y_0)$ ，因为 PQ 平行于 x 轴，

所以 $\begin{cases} x = x_0 + 2 \\ y = y_0 \end{cases}$ ，所以 $\begin{cases} x_0 = x - 2 \\ y_0 = y \end{cases}$ ，又因为 P 在圆 $x^2 + y^2 = \frac{64}{25}$ 上，

所以点 Q 的运动轨迹是以 $(2,0)$ 为圆心，1.6 为半径的圆，

所以点 Q 的轨迹方程为 $(x-2)^2 + y^2 = \frac{64}{25}$ （其中 $x \in [2, \frac{10+4\sqrt{3}}{5}]$, $y \in [\frac{4}{5}, \frac{8}{5}]$ ），故 B 正确；

对于 C：若 OP 绕点 O 从与水平方向成 30° 角匀速转动到与水平方向成 90° 角，

横杆 PQ 达到最高点，此时横杆 PQ 距水平地面的高度为 $1 + 1.6 = \frac{13}{5}$ ，故 C 正确；

对于 D：因为 OP 绕点 O 从与水平方向成 30° 角匀速转动到与水平方向成 90° 角，

故 Q 绕点 $(2,0)$ 转动的角度与点 P 绕点 $(0,0)$ 转动的角度一样为 $90^\circ - 30^\circ = \frac{\pi}{3}$ ，

所以点 Q 运动轨迹的长度即为圆（其中）的弧长，等于 $1.6 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{15}$ ，故 D 错误.

故选：BC.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A ， B ， C 所对的边依次为 a ， b ， c ，已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$ ，则下列结论中正确的是（ ）

A. $(a+b):(b+c):(c+a) = 5:6:7$

B. $\triangle ABC$ 为钝角三角形

C. 若 $a+b+c=18$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是 $6\sqrt{15}$

D. 若 $\triangle ABC$ 的外接圆半径是 R ，内切圆半径为 r ，则 $5R = 16r$

【答案】BD

【解析】

【分析】由正弦定理可得 $a:b:c = 2:3:4$ ，设 $a = 2x$ ($x > 0$)， $b = 3x$ ， $c = 4x$ ，即可判断 A

，利用余弦定理求出 $\cos C$ ，即可判断 B，结合 A 求出边，再结合 B 求出 $\sin C$ ，最后由面积公式判断 C，首先由正弦定理求出 R ，利用等面积法求出 r ，即可判断 D.

【详解】因为 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$ ，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ，可得 $a : b : c = 2 : 3 : 4$ ，

设 $a = 2x (x > 0)$ ， $b = 3x$ ， $c = 4x$ ，

则 $(a+b):(b+c):(c+a) = 5x:7x:6x = 5:7:6$ ，故 A 错误；

由题意可知， C 为最大角，

因为 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4x^2 + 9x^2 - 16x^2}{12x^2} = -\frac{1}{4} < 0$ ，故 C 为钝角，故 B 正确；

若 $a+b+c=18$ ，则 $a=4$ ， $b=6$ ， $c=8$ ，

又 $\cos C = -\frac{1}{4}$ ，所以 $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$ ，故 C 错误；

由正弦定理得， $2R = \frac{c}{\sin C} = \frac{4x}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{16x}{\sqrt{15}}$ ，即 $R = \frac{8x}{\sqrt{15}}$ ，

由面积公式可得 $\frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}ab \sin C$ ，

即 $\frac{1}{2} \times 9x \cdot r = \frac{1}{2} \times 2x \times 3x \times \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，

所以 $r = \frac{\sqrt{15}}{6}x$ ，

所以 $\frac{R}{r} = \frac{16}{5}$ ，故 $5R = 16r$ ，故 D 正确.

故选：BD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 在平面直角坐标系中，已知点 $F_1(-1,0)$ ， $F_2(1,0)$ ，若 P 为平面上的一个动点且 $|PF_1| = \sqrt{2}|PF_2|$ ，则点 P 运动所形成的曲线的方程为_____.

【答案】 $(x-3)^2 + y^2 = 8$.

【解析】

【分析】设 P 点坐标，再根据题意列出等式，化简即可求得轨迹方程.

【详解】设 $P(x,y)$ ，则由 $|PF_1| = \sqrt{2}|PF_2|$ 可得 $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ ，化简得

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/285242244042011201>