

第五篇 向量与几何 专题 20 分形几何 微点 1

分形几何

第五篇 向量与几何

专题 20 分形几何

微点 1 分形几何

【微点综述】

分形几何作为一门新兴的学科已经开始逐渐发展,分形研究深入到各学科领域.近年来,以分形几何为背景的试题在全国各地高考、各类竞赛以及高校强基中频繁出现.本文介绍分形几何的基础知识,并介绍其在各类试题中题型及其解题策略.

【典例剖析】

一、高等数学知识

1. 分形几何数学史简介

传统的欧式几何研究的只是用圆规和直尺画的图形,这些图形是简单的或平滑的,而自然界存在着大量几何不规则的、极不光滑的图形.

如何刻画和研究这类现象,在二十世纪七十年代,法国数学家曼德勃罗特

(*Mandelbrot*)在他的著作中探讨了英国的海岸线有多长?这个问题依赖于测量时所使用的尺度.如果用公里作测量单位,从几米到几十米的一些曲折会被忽略;改用米来做单位,测得的总长度会增加,但是一些厘米量级以下的就不能反映出来.由于涨潮落潮使海岸线的水陆分界线具有各种层次的不规则性.海岸线在大小两个方向都有自然的限制,取不列颠岛外缘上几个突出的点,用直线把它们连起来,得到海岸线长度的一种下界.使用比这更长的尺度是没有意义的.还有海沙石的最小尺度是原子和分子,使用更小的尺度也是没有意义的.在这两个自然限度之间,存在着可以变化许多个数量级的“无标度”区,长度不是海岸线的定量特征,就要用分维.

曼德勃罗特通过研究各种复杂现象后面的规律,揭示了局部与整体之间的本质联系.部分就是整体成比例缩小,局部与整体存在自相似性.例如,一棵参天大树与它自身上的树枝在形状上没有什么大的区别,一头牛的身体中的细胞基因记录着这头牛的全部生长信息.

曼德勃罗特首次提出分形(*fractal*)这个词,并将其定义为:“其组成部分与整体以某种方式相似的形”

，以此来解释自然界中复杂的现象，因此分形几何又称为大自然的几何学。曼德尔勃罗特这位计算机和数学兼通的人物，对分形几何产生了重大的推动作用。他在 1975、1977 和 1982 年先后用法文和英文出版了三本书，特别是《分形——形、机遇和维数》以及《自然界中的分形几何学》，开创了新的数学分支——分形几何学。

日本著名分形专家高安委修树说，“分形这一概念不仅是数学家需要掌握的，而是在高中年级就应该学习，描述形状和现象是自然学科要走的第一步”。

美国物理学大师约翰·惠勒说过：今后谁不熟悉分形，谁就不能被称为科学上的文化人。由此可见分形的重要性。

中国著名学者周海中教授认为：分形几何不仅展示了数学之美，也揭示了世界的本质，还改变了人们理解自然奥秘的方式；可以说分形几何是真正描述大自然的几何学，对它的研究也极大地拓展了人类的认知疆域。

分形几何学作为当今世界十分风靡和活跃的新理论、新学科，它的出现，使人们重新审视这个世界：世界是非线性的，分形无处不在。分形几何学不仅让人们感悟到科学与艺术的融合，数学与艺术审美的统一，而且还有其深刻的科学方法论意义。

2. 分形几何基本思想

分形几何学的基本思想是：客观事物具有自相似的层次结构，局部与整体在形态、功能、信息、时间、空间等方面具有统计意义上的相似性，称为自相似性。例如，一块磁铁中的每一部分都像整体一样具有南北两极，不断分割下去，每一部分都具有和整体磁铁相同的磁场。这种自相似的层次结构，适当的放大或缩小几何尺寸，整个结构不变。

3. 分形几何应用简介

现实空间和地图上有许多类似海岸线那样的不规则曲线，分形几何为这类曲线的度量提供了数学工具。

分形几何学已在自然界与物理学中得到了应用。如在显微镜下观察落入溶液中的一粒花粉，会看见它不间断地作无规则运动（布朗运动），这是花粉在大量液体分子的无规则碰撞（每秒钟多达十亿亿次）下表现的平均行为。布朗粒子的轨迹，由各种尺寸的折线连成。只要有足够的分辨率，就可以发现原以为是直线段的部分，其实由大量更小尺度的折线连成。这是一种处处连续，但又处处无导数的曲线。这种布朗粒子轨迹的分维是 2，大大高于它的拓扑维数 1。

在某些电化学反应中，电极附近沉积的固态物质，以不规则的树枝形状向外增长。受到污染的一些流水中，粘在藻类植物上的颗粒和胶状物，不断因新的沉积而生长，成为带有许多须须毛毛的枝条状，就可以用分维。

自然界中更大的尺度上也存在分形对象。一枝粗干可以分出不规则的枝杈，每个枝杈继

续分为细权.....，至少有十几次分支的层次，可以用分形几何学去测量．有人研究了某些云彩边界的几何性质，发现存在从 1 公里到 1000 公里的无标度区．小于 1

公里的云朵，更受地形地貌影响，大于 1000 公里时，地球曲率开始起作用。大小两端都受到一定特征尺度的限制，中间有三个数量级的无标度区，这已经足够了。分形存在于这中间区域。

分形几何在天线设计中的应用：

分形几何两个独特的特征：自相似性（或自仿射性）和空间填充性，结合天线的特征，使得分形几何在天线工程领域中的应用有了突破性的发展。分形天线的自相似性能减小分形天线元的整体宽度，同时和欧几里德几何天线元保持同样的性能，∴各个天线元具有同样的谐振频率和相同的辐射方向图。分形元能够改善运用欧氏几何天线元的线性天线阵列的设计，运用分形元来改善和提高天线阵列的性能。这里讨论两种方法：

一种方法就是减小天线元之间的相互耦合。∴线性阵列中天线元之间的相互耦合导致整个天线的辐射方向图性能下降。相互耦合还能改变天线元的激发电流。因此，如果在阵列天线的设计过程中忽略天线元之间的内部耦合作用，那么天线的辐射方向图就会受到影响，通常表现为副瓣电平的提高甚至导致零信号的填充。

为了比较分形单元和传统的天线单元之间的相互耦合作用，阵列设计如下图所示，两个阵列都有五个单元组成，单元之间的距离为 $d = 0.3\lambda$ ，阵列单元的相位依次增加 1.632 弧度，主波束沿轴向扫描为 135° 。阵列的远场方向图如，从图中可以看出，两个阵列主波束扫描角度达到理想的 135° ，分形天线元阵列在 45° 方向上有较小的副瓣，同样，通过比较理想阵列元（不考虑阵列元之间的互耦作用）和分形阵列元之间的远场方向图，可以看出阵列元之间的相互耦合作用影响阵列天线的性能和零信号的填充。在 45° 方向上，分形阵列的副瓣辐值比传统天线阵列的副瓣辐值小 $20dB$ ，这意味着更多的能量加在主瓣上。

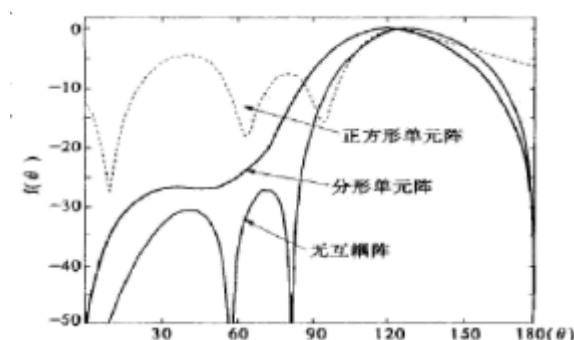


图 1 阵列的方向图比较（ $f(\theta)$ 单位：dB）

另一种方法是在线性阵列中排列更多的分形天线元. 这两种方法极大的扩大了线性阵列的有效扫描角度. 分形也可以用来在一个线性阵列中放置更多的天线元, 即一固定宽度的阵列天线, 如果用分形天线元来代替, 可以增加天线元的个数, 同时减小了天线元之间的距离, 这就使得阵列可以扫描到更低的角度, 不会产生不期望的副瓣, 这是: 在同样的谐振频率且保持天线元的边边距离不变的条件下, 分形元尺寸较小.

增加 1.9 弧度, 都能实现主波束扫描 135° . 阵列的远场方向图如下图, 从图中可以看出, 在 45° 方向上分形元阵列的副瓣辐值比矩形元阵列低 15dB .

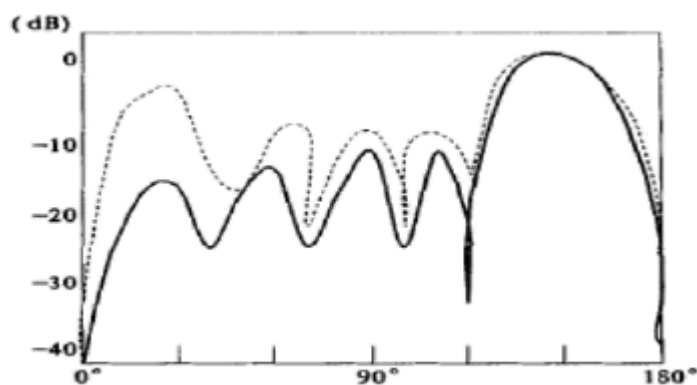


图 2 两种阵列的方向图的比较

随着天线技术的不断发展, 分形几何在天线中的应用也会越来越多, 文献分别研究了分形在 *MIMO* 天线和 *UWB* 射频设计中所获得的理想效果. 我们知道微带天线有低剖面、重量轻、易集成、易于载体共形等特点, 但是, 这种天线的频带窄和难于实现多频带等固有的缺点限制了它的应用, 如能把微带天线的辐射元用分形元来替代, 结合分形天线的特性, 那将会极大的改善天线的性能. 这必将是天线的一个发展趋势. 这里, 我们主要讨论了规则分形图形在天线领域的应用. 随机分形天线分析也有文献探讨, 随机分形图形更接近于复杂的自然形态的结构, 这也是分形理论在天线设计中的一个发展.

近几年在流体力学不稳定性、光学双稳定器件、化学震荡反映等试验中, 都实际测得了混沌吸引子, 并从实验数据中计算出它们的分维. 学会从实验数据测算分维是最近的一大进展. 分形几何学在物理学、生物学上的应用也正在成为有充实内容的研究领域.

4. 康托尔三分集

很多人都不熟悉康托尔函数, 但大家一定了解康托尔三分集, 这二者有着紧密的联系.

康托尔 (*Cantor*) 集以德国数学家格奥尔格·康托尔命名, 是位于一条线段上的一些点的集合, 具有许多深刻的性质. 通过考虑这个集合, 康托尔和其他数学家奠定了现代点集拓扑学的基础. 康托尔三分集则是其中最著名的案例, 是无处稠密的完备集的典型例

子. 构造康托尔三分集, 就是不断去掉一条线段中间的三分之一: 第一次从 $[0,1]$ 中去掉中间的三分之一 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 留下两条线段: $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$

．第二次从这两条线段中去掉中间的三分之一，留下四条线段：

$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ ．以此类推，最后 $[0,1]$ 中剩下的点就构成康托尔三分集．

图 37. 1 显示了这个过程最初的六个步骤．



图 37.1

5. 康托尔函数

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非递减函数，且 $2f\left(\frac{x}{3}\right)=f(x)$ ， $f(x)+f(1-x)=1$ ，则称 $f(x)$ 为康托尔函数．

6. 康托尔函数与康托尔三分集

初看，康托尔函数是一个抽象函数，康托尔三分集则是一个几何构造，两者好像风马牛不相及．但究其本质，则是相通的．

从康托尔函数 $f(x)$ 的定义，容易算出 $f(0)=0$ ， $f(1)=1$ ， $f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$ ，从而当

$x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ 时， $f(x)=\frac{1}{2}$ ．这相当于康托尔三分集的第一次构造（端点值有一点不同，

这不影响本质）．接下来就是利用 $2f\left(\frac{x}{3}\right)=f(x)$ 对 $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ 进行赋值．以此类推，

最后 $[0,1]$ 中的每一个数都会被赋值．

康托尔三分集或者康托尔函数都可从递归的角度来看．康托尔函数用表达式可以这样表

$$\text{示: } f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & \left(0 \leq x < \frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \left(\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}\right) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x-2) & \left(\frac{2}{3} \leq x \leq 1\right) \end{cases}.$$

用图像表示则如图 37. 2 所示（水平线部分表示已经被赋值，斜线部分还有待赋值）．

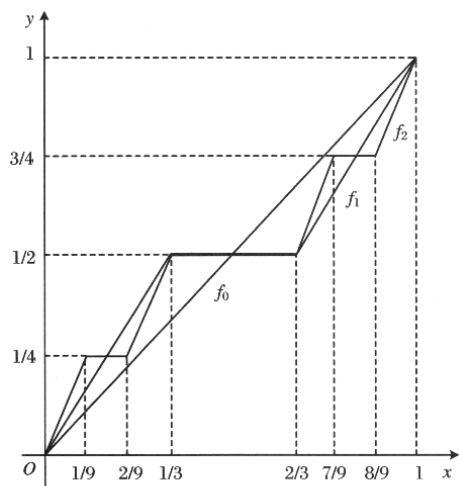


图 37.2

【反思】康托尔三分集容易推广到康托尔 $2k+1$ ($k=2,3,\dots$) 分集.

7. 康托尔函数与三进制

数学家们经过不断研究, 得到构造康托尔三分集的多种方式. 其中最有趣的就是从三进制的视角来看.

康托尔函数 $c: [0,1] \rightarrow [0,1]$, 对于 $x \in [0,1]$, 其函数值 $c(x)$ 可由以下步骤得到:

步骤 1: 以三进制表示 x .

步骤 2: 如果 x 中有数字 1, 就将第一个 1 之后的所有数字换成 0.

步骤 3: 将所有数字 2 换成数字 1.

步骤 4: 以二进制读取转换之后的数, 即为 $c(x)$.

此处的 $c(x)$ 和上文的 $f(x)$ 等价.

或者这样看: 用三进制表示 $[0,1]$ 间的小数, 第一次挖去小数点后第 1 位为 1 的所有数,

第二次挖去小数点后第 2 位为 1 的所有数, 以此类推. 最后剩余的是 $[0,1]$ 区间上三进制

表示法中不包含 1 的所有数的集合. 这个集合就是康托尔三分集,

下面简单说明康托尔三分集与 $[0,1]$ 等势.

先用二进制表示 $[0,1]$ 中的一个数, 然后将数位中所有 1 变为 2, 这样在数位上就跟康托尔三分集中的某个数对应起来. 反过来, 将康托尔三分集中的任一个数 (三进制表示) 中的全部 2 变为 1, 就唯一对应 $[0,1]$ 中的一个二进制小数, 因此, 康托尔三分集与 $[0,1]$ 可以建立一一对应关系.

二、高考、强基、自主招生、竞赛试题举例

例 1.

1. 谢宾斯基三角形是一种分形，由波兰数学家谢宾斯基在 1915 年提出，先作一个正三角形，挖去一个“中心三角形”（即以原三角形各边的中点为顶点的三角形），然后在剩下的小三角形中又挖去一个“中心三角形”，我们用白色代表挖去的面积，那么黑三角形为剩下的面积（我们称黑三角形为谢宾斯基三角形）。向图中第 5 个大正三角形中随机撒 512 粒大小均匀的细小颗粒物，则落在白色区域的细小颗粒物的数量约是（ ）

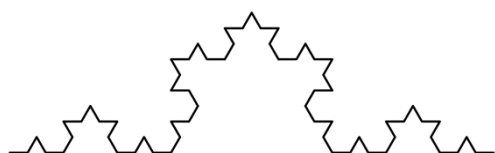


- A. 256 B. 350 C. 162 D. 96

【反思】本题考查均匀随机数思想的应用，关键是能够通过观察得到黑色部分的面积成等比数列的特点。

例 2.

2. 科赫曲线是一种外形像雪花的几何曲线，一段科赫曲线可以通过下列操作步骤构造得到：任画...条线段，然后把它分成三等分，以中间一段为边向外作正三角形，并把中间一段去掉，这样，原来的一条线段就变成了由 4 条小线段构成的折线，称为“一次构造”；用同样的方法把每一条小线段重复上述步骤，得到由 16 条更小的线段构成的折线，称为“二次构造”；...；如此进行“ n 次构造”，就可以得到一条科赫曲线。若要在构造过程中使得到的折线的长度大于初始线段的 100 倍，则至少需要构造的次数是（ ）（取 $\lg 3 \approx 0.4771$ ， $\lg 2 \approx 0.3010$ ）



- A. 16 B. 17 C. 24 D. 25

【反思】本题考查了图形的归纳推理，等比数列的实际应用，指数不等式的求解，考查了数形结合的思想。其中对图形进行归纳推理，构造等比数列是关键。

例 3.

3. 将正 $\triangle ABC$ 分割成 $n^2 (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 个全等的小正三角形（图 2，图 3 分别给出了 $n=2, 3$ 的情形），在每个三角形的顶点各放置一个数，使位于 $\triangle ABC$ 的三边及平行于某边的任一直线上的数（当数的个数不少于 3 时）都分别依次成等差数列。若顶点 A, B, C 处的三个数互不相同且和为 1，记所有顶点上的数之和为 $f(n)$ ，则有 $f(2)=2$ ， $f(3)=$ _____，...， $f(n)=$ _____。

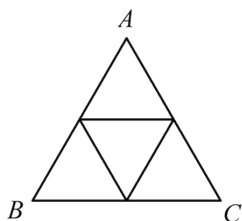


图 2

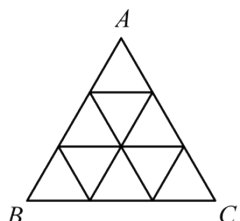


图 3

例 4.

4. 分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学. 分形的外表结构极为复杂, 但其内部却是有规律可寻的. 一个数学意义上分形的生成是基于一个不断迭代的方程式, 即一种基于递归的反馈系统. 下面我们用分形的方法来得到一系列图形, 如图 1, 线段 AB 的长度为 a , 在线段 AB 上取两个点 C, D , 使得 $AC = DB = \frac{1}{4}AB$, 以 CD 为一边在线段 AB 的上方做一个正六边形, 然后去掉线段 CD , 得到图 2 中的图形; 对图 2 中的最上方的线段 EF 作相同的操作, 得到图 3 中的图形; 依此类推, 我们就得到了以下一系列图形:

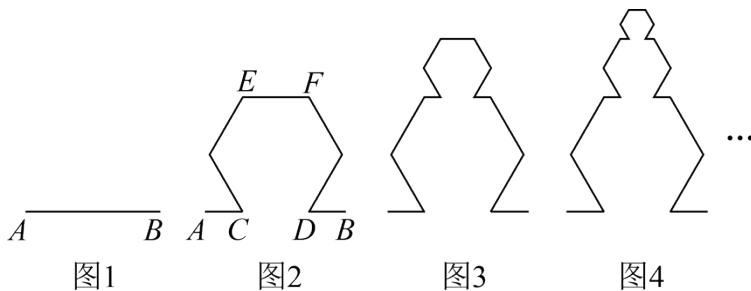


图1

图2

图3

图4

记第 n 个图形 (图 1 为第 1 个图形) 中的所有线段长的和为 S_n , 现给出有关数列 $\{S_n\}$ 的四个命题:

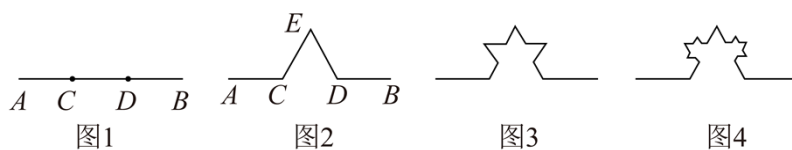
- ① 数列 $\{S_n\}$ 是等比数列;
- ② 数列 $\{S_n\}$ 是递增数列;
- ③ 存在最小的正数 a , 使得对任意的正整数 n , 都有 $S_n > 2018$;
- ④ 存在最大的正数 a , 使得对任意的正整数 n , 都有 $S_n < 2018$.

其中真命题的序号是_____ (请写出所有真命题的序号) .

【反思】 用数列知识解相关的实际问题, 关键是列出相关信息, 合理建立数学模型——数列模型, 判断是等差数列还是等比数列模型; 求解时, 要明确目标, 搞清是求和、求通项、还是解递推关系问题, 所求结论对应的是解方程问题、解不等式问题、还是最值问题, 然后经过数学推理与计算得出的结果, 放回到实际问题中进行检验, 最终得出结论.

例 5.

5. 1967 年, 法国数学家蒙德尔布罗的文章《英国的海岸线有多长? 》标志着几何概念从整数维到分数维的飞跃. 1977 年他正式将具有分数维的图形成为“分形”, 并建立了以这类图形为对象的数学分支——分形几何. 分形几何不只是扮演着计算机艺术家的角色, 事实表明它们是描述和探索自然界大量存在的不规则现象的工具. 下面我们用分形的方法来得到一系列图形, 如图 1, 线段 AB 的长度为 1, 在线段 AB 上取两个点 C, D , 使得 $AC = DB = \frac{1}{3}AB$, 以 CD 为一边在线段 AB 的上方做一个正三角形, 然后去掉线段 CD , 得到图 2 中的图形; 对图 2 中的线段 EC, ED 作相同的操作, 得到图 3 中的图形; 依此类推, 我们就得到了以下一系列图形:



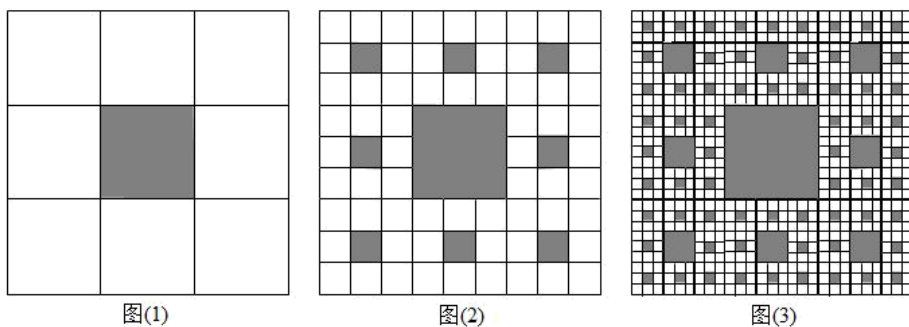
记第 n 个图形 (图 1 为第一个图形) 中的所有线段长的和为 S_n , 对任意的正整数 n , 都有 $S_n < a$, 则 a 的最小值为_____.

【反思】与图形相关的数列的计算问题, 一般根据相邻图形的变化关系寻找目标数列的递推关系, 再根据其形式得到通项, 从而解决图形的计算问题.

例 6.

6. 把一个正方形等分成 9 个相等的小正方形, 将中间的一个正方形挖掉 (如图(1)); 再将剩余的每个正方形都分成 9 个相等的小正方形, 并将中间的一个正方形挖掉 (如图(2)); 如此进行下去, 则

(1) 图(3)共挖掉了多少个正方形?

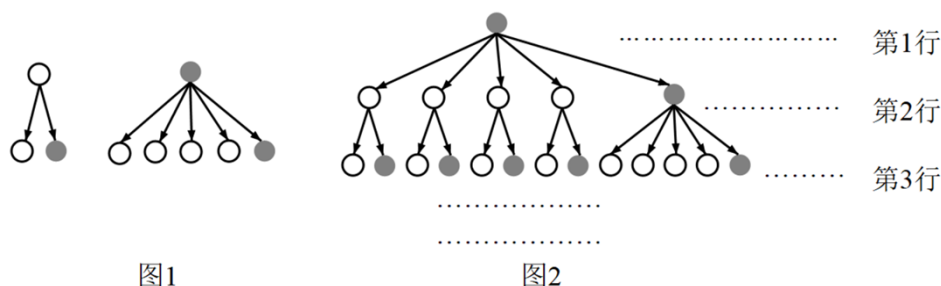


(2) 第 n 个图共挖掉了多少个正方形? 若原正方形的边长为 $a (a > 0)$, 则这些正方形的面积之和为多少?

【反思】本题是将九宫格作为分形图形的一种生成方式. 在现代分形艺术中, 著名的谢尔宾斯基地毯分形图即为本题图形. 从图中可以直观地看出, 最终图形的形成, 就是将一个简单的九宫图反复迭代生成的. 学生通过观察图形变化, 可以直接体会到分形图的生成过程, 加深了对知识的理解, 激发了学生探究的欲望.

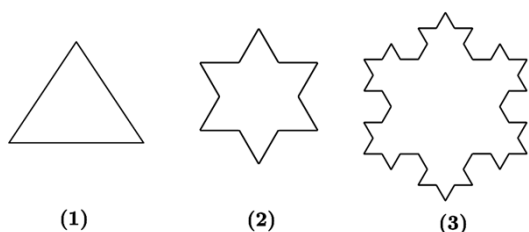
例 7. (2023 福建质优生“筑梦”联考)

7. 分形几何在计算机生成图形和游戏中有广泛应用. 按照如图 1 所示的分形规律可得如图 2 所示的一个树形图. 设图 2 中第 n 行黑圈的个数为 a_n , 则 $a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.



例 8.

8. 如图, 将一个边长为 1 的正三角形的每条边三等分, 以中间一段为边向形外作正三角形, 并擦去中间一段, 得图 (2). 如此继续下去, 得图 (3)试探求第 n 个图形的边长和周长.



【反思】本题是“Koch 曲线”分形图形的应用. 1904 年, 瑞典数学家柯赫构造了“Koch 曲线”. Koch 曲线大于一维, 具有无线长度, 但又小于二维, 生成的图形面积为零, 是个典型的分形图, 是引导学生认识分形的绝佳案例.

例 9.

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的非递减函数, 且 $2f\left(\frac{x}{3}\right) = f(x)$, $f(x) + f(1-x) = 1$, 求 $f\left(\frac{1}{2011}\right)$.

【反思】本题和 2011 年高中数学联赛贵州预赛题大同小异, 关键区别在于贵州预赛题将此处的 $[0,1]$ 改为实数集 R , 从而使题目出现矛盾, 这一点在《两道竞赛题的纠错》

(《数学教学》2012 年第 9 期) 中已经指出. 为何要将定义域 R 改为 $[0,1]$, 而不是其他

呢？这是∴本题有着深刻的高等数学背景，定义域不能随便改．本题的高等数学背景是康托尔函数．

【总结与反思】

分形几何是未来中学数学学习的重要内容，分形理论已经对方法论和自然观产生了深远的影响。我们对于大自然的研究从未止步，分形几何为我们开辟了一条新的研究道路，了解分形几何对开拓学生的智力和思维都是有益的。系统地学习分形知识也有助于培养学生的创造力和独特见解力。

【针对训练】

一、单选题：

（强基计划模拟题）

10. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的非递减函数，且 $2f\left(\frac{x}{3}\right)=f(x)$ ， $f(x)+f(1-x)=1$ ，则 $f\left(\frac{1}{2022}\right)=$ _____.

（强基计划模拟题）

11. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的非递减函数，且 $2f\left(\frac{x}{3}\right)=f(x)$ ， $f(x)+f(1-x)=1$ ，则 $f\left(\frac{1}{13}\right)=$ _____.

【反思】若用常规方法计算， $\frac{1}{13} \approx 0.076$ ， $\frac{3}{13} \approx 0.230$ ， $\frac{9}{13} \approx 0.692$ ， $\frac{10}{13} \approx 0.769$ ， $\frac{4}{13} \approx 0.307$ ，都不在 $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{3}{9}, \frac{6}{9}\right] \cup \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ 内。这就需要进一步计算一些区间的值，计算次数的多少取决于所求值在 $[0,1]$ 内所处的位置。这里给出的方法很巧妙。也可以利用

三进制求解， $\therefore \frac{1}{13} \approx 0.076923076923\text{L} \approx (0.002002002002\text{L})_3$ ，经过步骤 2 仍为

0. 002002002002...，经过步骤 3 变为 0. 001001001001...，以二进制读取，即为

$$2^{-3} + 2^{-6} + 2^{-9} + \text{L} = \frac{2^{-3}}{1-2^{-3}} = \frac{1}{7}. \therefore f\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{1}{7}.$$

12. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的非递减函数，且 $2f\left(\frac{x}{5}\right)=f(x)$ ， $f(x)+f(1-x)=1$ ，则 $f\left(\frac{1}{2023}\right)=$ _____.

13. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(1-x)=1$ ， $f\left(\frac{x}{10}\right)=\frac{1}{2}f(x)$ ，且当

$0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ 时， $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，则 $f\left(\frac{1}{2023}\right)=$ _____.

【反思】易知 $f\left(\frac{1}{10}\right)=f\left(\frac{9}{10}\right)=\frac{1}{2}$ ，且 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非递减函数，从而当 $x \in \left[\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right]$ 时， $f(x)=\frac{1}{2}$ 。∴ 本题也可以用第 3 题的方法来解：

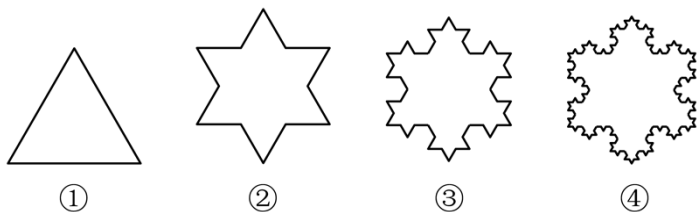
$$f\left(\frac{1}{2023}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{10}{2023}\right) = \frac{1}{2^3}f\left(\frac{1000}{2023}\right) = \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

当然，第 1 题和第 3 题也可以用本题的方法来解。

二、多选题：

（2023 湖北孝感高二期中考试）

14. 如图是瑞典数学家科赫在 1904 年构造的能够描述雪花形状的图案.图形的作法是：从一个正三角形开始，把每条边分成三等份，然后以各边的中间一段为底边分别向外作正三角形，再去掉底边.反复进行这一过程，就得到一条“雪花”状的曲线，若原正三角形边长为 1，记第 n 个图中图形的边数为 a_n ，第 n 个图中图形的周长为 b_n ，则下列命题正确的是（ ）



A. $a_3 = 48$

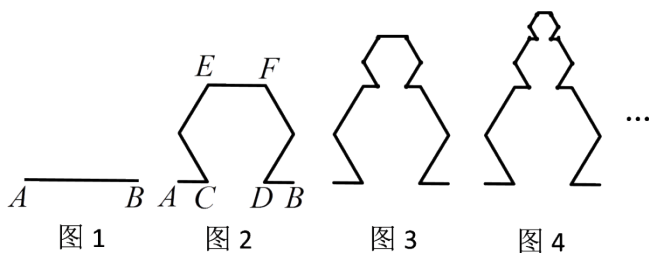
B. $a_n = 3a_{n-1} (n \geq 2)$

C. $b_4 = \frac{64}{9}$

D. 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $9\left(\frac{4}{3}\right)^n - 9$

（2022 广东汕头高三月考）

15. 分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学.分形的外表结构极为复杂，但其内部却是有规律可循的.下面我们用法分形的方法来得到一系列图形，如图 1，线段 AB 的长度为 a ，在线段 AB 上取两个点 C, D ，使得 $AC = DB = \frac{1}{4}AB$ ，以 CD 为边在线段 AB 的上方作一个正六边形，然后去掉线段 CD ，得到图 2 中的图形；对图 2 中的最上方的线段 EF 做相同的操作，得到图 3 中的图形；依此类推，得到第 n 个图形.



记第 n 个图形（图 1 为第 1 个图形）中的所有线段长的和为 S_n ，现给出有关数列 $\{S_n\}$ 的四个结论，其中正确的有（ ）

A. 数列 $\{S_n\}$ 是等比数列

B. 数列 $\{S_n\}$ 是递增数列

C. 存在最小的正数 a ，使得对任意的正整数 n ，都有 $S_n > 4040$

D. 存在最大的正数 a ，使得对任意的正整数 n ，都有 $S_n < 4040$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/285244240022011302>