

2023-2024 年上期高一数学期中考试

第I卷（选择题）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 不等式 $|x+m| - |x-1| < 3$ 恒成立的一个充分不必要条件可以为（ ）。

A. $-5 < m < 3$

B. $-4 < m < 2$

C. $1 < m < 3$

D. $-2 < m < 2$

【答案】D

【解析】

【分析】利用绝对值三角不等式解得 $-4 < m < 2$ ，再由充分条件、必要条件的定义即可求解。

【详解】 $|x+m| - |x-1| \leq |m+1| < 3$ ，解得 $-4 < m < 2$ ，

故不等式 $|x+m| - |x-1| < 3$ 恒成立的一个充分不必要条件可以为 $-2 < m < 2$ 。

故选：D

2. 下列各组函数中表示同一函数的是（ ）

A. $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$ ， $g(x) = x + 2$

B. $f(x) = x^2 - 3x$ ， $g(t) = t^2 - 3t$

C. $f(x) = (\sqrt{x})^2$ ， $g(x) = x$

D. $f(x) = \sqrt{x^2}$ ， $g(x) = x$

【答案】B

【解析】

【分析】

利用函数的定义判断。

【详解】A. $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ ， $g(x) = x + 2$ 的定义域为 R ，故不是同一函数；

B. $f(x) = x^2 - 3x$ 与 $g(t) = t^2 - 3t$ 定义域都为 R ，且解析式相同，故是同一函数；

C. $f(x) = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x | x \geq 0\}$ ， $g(x) = x$ 的定义域为 R ，故不是同一函数；

D. $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ 与 $g(x) = x$ 解析式不同，故不是同一函数；

故选：B

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R ，且 $f(2x-1)$ 是偶函数， $f(x+1)$ 是奇函数，则下列说法一定正确的有 ()

① $f(x-8)=f(x)$ ； ② $f(1+x)=-f(1-x)$ ； ③ $f(-3)=0$ ； ④ $f(2+x)=f(2-x)$

A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【答案】B

【解析】

【分析】由 $f(x+1)$ 是奇函数得到 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，可判定②正确；由 $f(2x-1)$ 是偶函数，得到 $f(x)$ 的图象关于 $x=-1$ 对称，可判定③正确；在 $f(-1-x)=f(-1+x)$ 中，分别将 x 用 $x-7$ 替换，将 x 用 $x-5$ 替换，再将 x 用 $x+4$ 替换，可判定①正确。

【详解】由题意，函数 $f(x+1)$ 是奇函数，可得 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，所以 $f(1+x)+f(1-x)=0$ ，所以②正确；

令 $x=0$ ，则 $f(1)=0$ ，

又由 $f(2x-1)$ 是偶函数，所以 $f(2x)$ 的图象关于 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，

所以 $f(x)$ 的图象关于 $x=-1$ 对称，则有 $f(-1-x)=f(-1+x)$ ，令 $x=2$ ，则 $f(-3)=f(1)=0$ ，所以③正确。

在 $f(-1-x)=f(-1+x)$ 中，将 x 用 $x-7$ 替换，则 $f(x-8)=f(6-x)$ ，

在 $f(1+x)=-f(1-x)$ 中，将 x 用 $x-5$ 替换，则 $f(6-x)=-f(x-4)$ ，

所以 $f(x-8)=-f(x-4)$ ，再将 x 用 $x+4$ 替换，则 $f(x-4)=-f(x)$ ，

所以 $f(x-8)=f(x)$ ，所以①正确；

对于④中，由 $f(2-x)=-f(x)$ ， $f(2+x)=-f(-x)$ ，无法推出其一定相等。

故选：B.

4. 已知正数 x, y 满足 $x+y=1$ ，且 $\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+1} \geq m$ ，则 m 的最大值为 ()

A. $\frac{16}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】

根据题意 $\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+1} = \frac{(1-y)^2}{y+1} + \frac{(1-x)^2}{x+1} = (\frac{4}{y+1} + \frac{4}{x+1}) \square 5$, 由基本不等式的性质求出 $\frac{4}{y+1} + \frac{4}{x+1} =$

$\frac{1}{3} (\frac{4}{y+1} + \frac{4}{x+1}) [(x+1)+(y+1)]$ 的最小值, 即可得 $\frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+1}$ 的最小值, 据此分析可得答案.

【详解】根据题意, 正数 x, y 满足 $x+y=1$,

$$\text{则 } \frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+1} = \frac{(1-y)^2}{y+1} + \frac{(1-x)^2}{x+1}$$

$$= (y+1) + \frac{4}{y+1} \square 4 + (x+1) + \frac{4}{x+1} \square 4 = (\frac{4}{y+1} + \frac{4}{x+1}) \square 5,$$

$$\text{又由 } \frac{4}{y+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{1}{3} (\frac{4}{y+1} + \frac{4}{x+1}) [(x+1)+(y+1)],$$

$$= \frac{1}{3} [8 + \frac{4(x+1)}{y+1} + \frac{4(y+1)}{x+1}] \geq \frac{16}{3},$$

当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时等号成立,

$$\text{所以 } \frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+1} = (\frac{4}{y+1} + \frac{4}{x+1}) \square 5 \geq \frac{16}{3} \square 5 = \frac{1}{3},$$

$$\text{即 } \frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+1} \text{ 的最小值为 } \frac{1}{3},$$

所以 $m \leq 3$, 则 m 的最大值为 $\frac{1}{3}$;

故选: B.

【点睛】本题主要考查基本不等式的性质以及应用, 还考查了转化求解问题的能力, 属于中档题.

5. 下列对应 $f: A \rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的函数的是 ()

A. $A = \{x | x > 0\}, B = \{y | y \geq 0\}, f: y = \frac{1}{x}$

B. $A = \{x | x \geq 0\}, B = \{y | y > 0\}, f: y = x^2$

C. $A = \{x | x \text{ 是三角形}\}, B = \{y | y \text{ 是圆}\}, f: \text{每一个三角形对应它的内切圆}$

D. $A = \{x | x \text{ 是圆}\}$, $B = \{y | y \text{ 是三角形}\}$, f : 每一个圆对应它的外切三角形

【答案】A

【解析】

【分析】由函数的定义，分别判断即可.

【详解】A.集合 A 中的任意一个元素，在集合 B 中有唯一的对应，满足条件，A 正确；

B.集合 A 中的 0，在集合 B 中没有对应，不满足条件，B 不正确；

C.集合 A,B 不是数集，不满足条件，C 不正确；

D.集合 A,B 不是数集，不满足条件，D 不正确；

故选：A

6. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，则以下函数中图象一定关于点 $(-1,0)$ 成中心对称的是 ()

A. $y = (x-1)f(x-1)$

B. $y = (x+1)f(x+1)$

C. $y = xf(x)+1$

D. $y = xf(x)-1$

【答案】B

【解析】

【分析】分析函数 $g(x) = xf(x)$ 的奇偶性，结合函数图象变换可判断 ABCD 选项.

【详解】构造函数 $g(x) = xf(x)$ ，该函数的定义域为 R ，

所以， $g(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -g(x)$ ，函数 $g(x)$ 为奇函数，故函数 $g(x)$ 的对称中心为原点.

对于 A 选项，函数 $y = (x-1)f(x-1)$ 的图象可在函数 $g(x)$ 的图象上向右平移 1 个单位，

故函数 $y = (x-1)f(x-1)$ 图象的对称中心为 $(1,0)$ ；

对于 B 选项，函数 $y = (x+1)f(x+1)$ 的图象可在函数 $g(x)$ 的图象上向左平移 1 个单位，

故函数 $y = (x+1)f(x+1)$ 图象的对称中心为 $(-1,0)$ ；

对于 C 选项，函数 $y = xf(x)+1$ 的图象可在函数 $g(x)$ 的图象上向上平移 1 个单位，

故函数 $y = xf(x)+1$ 图象的对称中心为 $(0,1)$ ；

对于 D 选项，函数 $y = xf(x)-1$ 的图象可在函数 $g(x)$ 的图象上向下平移 1 个单位，

故函数 $y = xf(x)-1$ 图象的对称中心为 $(0,-1)$.

故选: B.

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2-a^2)x-1, & x < 1 \\ a^x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 对任意 $x_1, x_2 \in R$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时总有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(1, \sqrt{2})$ B. $(-\sqrt{2}, 1)$ C. $[1, \sqrt{2})$ D. $(-\sqrt{2}, 1]$

【答案】A

【解析】

【分析】由题意, 函数 $f(x)$ 在定义域 R 上是增函数, 列出不等式组, 解出即可.

【详解】 $\because$ 对任意 $x_1, x_2 \in R$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时总有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在定义域 R 上是增函数,

$$\begin{cases} 2-a^2 > 0 \\ a > 1 \\ a-1 \geq 2-a^2-1 \end{cases}, \text{解得: } 1 < a < \sqrt{2}.$$

故选: A.

8. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2021-ax}}{a-1}$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 那么实数 a 的取值的范围是 ()

- A. $(-\infty, 0) \cup (1, 2021]$ B. $(-\infty, 0) \cup (0, 2021]$
C. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

【答案】A

【解析】

【分析】分别讨论 $a < 0$ 、 $a = 0$ 、 $0 < a < 1$ 和 $a > 1$ 情况下, $y = \sqrt{2021-ax}$ 单调性及 $a-1$ 的正负, 综合分析, 即可得答案.

【详解】当 $a < 0$ 时, $y = \sqrt{2021-ax}$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 且 $a-1 < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 符合题意,

当 $a = 0$ 时, $f(x) = -\sqrt{2021}$ 无单调性, 不符合题意,

当 $0 < a < 1$ 时, $y = \sqrt{2021-ax}$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 且 $a-1 < 0$, 不符合题意,

当 $a > 1$ 时, $y = \sqrt{2021 - ax}$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, $a - 1 > 0$, 符合题意,

还需 $\begin{cases} 2021 - 0 \times a \geq 0 \\ 2021 - 1 \times a \geq 0 \end{cases}$, 解得 $1 < a \leq 2021$,

综上实数 a 的取值的范围是 $(-\infty, 0) \cup (1, 2021]$.

故选: A

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. (多选) 已知 x, y 为非零实数, 代数式 $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|}$ 的值所组成的集合为 M , 则下列判断错误的是 ()

A. $0 \notin M$ B. $1 \in M$ C. $-2 \in M$ D. $2 \in M$

【答案】AB

【解析】

【分析】分 x, y 都大于零, x, y 中一个大于零, 另一个小于零和 x, y 都小于零求解判断即可

【详解】当 x, y 都大于零时, $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 1 + 1 = 2$;

当 x, y 中一个大于零, 另一个小于零时, $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = 0$;

当 x, y 都小于零时, $\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} = -1 - 1 = -2$.

根据元素与集合的关系, 可知 $0 \in M$, $1 \notin M$, $-2 \in M$, $2 \in M$.

故选: AB.

10. 下列说法正确的是 ()

A. 很小的实数可以构成集合

B. 集合 $\{x | y = x^2 - 1\}$ 与集合 $\{(x, y) | y = x^2 - 1\}$ 是同一个集合

C. 由 $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \left| -\frac{1}{2} \right|, 0.5$ 这些数组成的集合有 4 个元素

D. 集合 $\{(x, y) | xy < 0, x, y \in R\}$ 是指第二或第四象限内的点集

【答案】CD

【解析】

【分析】A 选项：集合中元素需要具备确定性，而很小的数标准不确定；B 选项：点集和数集无法相等；

C 选项：集合中相同的元素算做 1 个；D 选项：可以判断出 x 和 y 异号；

【详解】A 选项：很小的实数标准不确定，故不能构成集合；

B 选项：其中第一个集合是数集，第二个集合是点集，故不是同一集合。

C 选项：因为 $\left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} = 0.5$ ，故这些数组成的集合有 4 个元素。

D 选项：因为 $xy < 0$ ，故点 (x, y) 是第二或第四象限内的点。综上，CD 正确。

故选：CD

11. 下列说法正确的序号是 ()

A. 偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2a-1, a]$ ，则 $a = \frac{1}{3}$

B. 设 $A = \{x \mid x^2 + 3x - 10 = 0\}$, $B = \{x \mid ax = 1\}$ ，若 $A \cup B = A$ ，则实数 a 的值为 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{5}$

C. 奇函数 $f(x)$ 在 $[2, 4]$ 上单调递增，且最大值为 8，最小值为 -1，则 $2f(-4) + f(-2) = -15$

D. 若集合 $A = \{x \mid -ax^2 + 4x + 2 = 0\}$ 中至多有一个元素，则 $a \leq -2$

【答案】AC

【解析】

【分析】根据偶函数定义域关于原点对称可得 $2a-1 = -a$ ，进而可判断选项 A；

根据集合之间的关系可得 $B \subseteq A$ ，对集合 B 的取值分类讨论，即可判断选项 B；

根据奇函数的定义与单调性可得 $f(-2) = 1$, $f(-4) = -8$ ，计算进而可判断选项 C；

对 a 的取值分为 $a=0$ 和 $a \neq 0$ 两种情况讨论，求出对应的范围，即可判断选项 D。

【详解】A：因为函数 $f(x)$ 为偶函数，所以它的定义域关于原点对称，

有 $2a-1 = -a \Rightarrow a = \frac{1}{3}$ ，故 A 正确；

B： $A = \{-5, 2\}$ ，由 $A \cup B = A$ 得 $B \subseteq A$ ，

当 $B = \emptyset$ 时， $a=0$ ；当 $B = \{-5\}$ 时， $a = -\frac{1}{5}$ ；当 $B = \{2\}$ 时， $a = \frac{1}{2}$ ；

所以 a 的取值为 $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$, 故 B 错误;

C: 由 $f(x)$ 为奇函数, $f(2) = -1, f(4) = 8$, 得 $f(-2) = -f(2) = 1, f(-4) = -f(4) = -8$,
所以 $4f(-4) + f(-2) = -16 + 1 = -15$, 故 C 正确;

D: 由 A 中至多有一个元素, 得当 $a=0$ 时, $A = \{-\frac{1}{2}\}$, 符合题意;

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = 16 + 8a \leq 0 \Rightarrow a \leq -\frac{1}{2}$, 所以 a 的取值为 $a \leq -\frac{1}{2}$ 或 $a=0$, 故 D 错误.

故选: AC

12. 设函数 $f(x) = \min\{|x-2|, x^2, |x+2|\}$ 其中 $\min\{x, y, z\}$ 表示 x, y, z 中的最小者. 下列说法正确的有 ()

A. 函数 $f(x)$ 为偶函数

B. 当 $x \in [1, +\infty)$ 时, 有 $f(x-2) \leq f(x)$

C. 当 $x \in R$ 时, $f(f(x)) \leq f(x)$

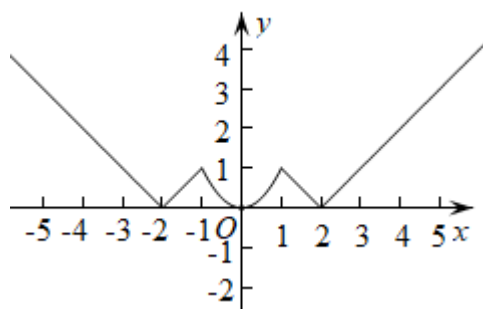
D. 当 $x \in [-4, 4]$ 时, $|f(x-2)| \geq f(x)$

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据题意画出 $f(x)$ 的大致图像, 然后依据图像逐个检验即可.

【详解】画 $f(x)$ 的图象如图所示:



$$f(x) = \begin{cases} |x+2|, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 < x < 1, \\ |x-2|, & x \geq 1, \end{cases}$$

对 A 选项, 所以 $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 故选项 A 正确;

对 B 选项, 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = |x-2|$, $f(x-2)$ 可以看做是 $f(x)$ 向右平移两个单位, 经过平移知

$f(x-2) \leq f(x)$ 恒成立, 故选项 B 正确;

对 C 选项, 由图知, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) \geq 0$, 可令 $t = f(x)$, 由 $y = f(t)$ 和 $y = t(t \geq 0)$ 的图象知, 当 $t \geq 0$ 时, $y = t$ 在 $y = f(t)$ 的上方, 所以当 $t \geq 0$ 时, $t \geq f(t)$, 即 $f(f(x)) \leq f(x)$ 成立, 故选项 C 正确;

对 D 选项, 根据函数图像向右平移 2 个单位的图像不完全在原来函数图像上方知选项 D 错误.

故选: ABC

第II卷 (非选择题)

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. 已知 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | 2^{1-x} + a \leq 0, x^2 - 2(a+7)x + 5 \leq 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $-4 \leq a \leq -1$

【解析】

【分析】化简集合 A, 解指数不等式并借助包含关系求 a 的范围, 再分析求解一元二次不等式, 结合包含关系求 a 的范围, 然后综合得解.

【详解】 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0, x \in \mathbf{R}\} = \{x | 1 < x < 3\}$, 由 $2^{1-x} + a \leq 0$, 得 $2^{1-x} \leq -a$,

则 $a < 0$ 且 $1-x \leq \log_2(-a)$, 即 $x \geq 1 - \log_2(-a)$, 而 $A \subseteq B$, 于是 $1 - \log_2(-a) \leq 1$, 解得 $a \leq -1$;

由不等式 $x^2 - 2(a+7)x + 5 \leq 0$, 得 $\Delta = [2(a+7)]^2 - 4 \times 5 = 4a^2 + 56a + 176 > 0$,

且有 $a+7 - \sqrt{a^2 + 14a + 44} \leq x \leq a+7 + \sqrt{a^2 + 14a + 44}$, 而 $A \subseteq B$,

因此
$$\begin{cases} a+7 - \sqrt{a^2 + 14a + 44} \leq 1 \\ a+7 + \sqrt{a^2 + 14a + 44} \geq 3 \\ a^2 + 14a + 44 > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } a \geq -4,$$

所以实数 a 的取值范围是 $-4 \leq a \leq -1$.

14. 若正实数 a, b 满足 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{2}$, 则 $ab + a + b$ 的最小值为_____.

【答案】 $4\sqrt{2} + 5$

【解析】

【分析】

由 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{2}$, 得 $ab = b + 4$, $a = \frac{b+4}{b} = 1 + \frac{4}{b}$ 代入 $ab + a + b$ 中化简, 再利用基本不等式可求得答案

【详解】解: 由 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{2}$, 得 $ab = b + 4$,

因为 a, b 为正实数,

所以 $a = \frac{b+4}{b} = 1 + \frac{4}{b}$,

所以 $ab + a + b = b + 4 + 1 + \frac{4}{b} + b = 2b + \frac{4}{b} + 5 \geq 2\sqrt{2b \cdot \frac{4}{b}} + 5 = 4\sqrt{2} + 5$,

当且仅当 $2b = \frac{4}{b}$, 即 $b = \sqrt{2}$ 时, 取等号 (此时 $a = 1 + 2\sqrt{2}$),

所以 $ab + a + b$ 的最小值为 $4\sqrt{2} + 5$,

故答案为: $4\sqrt{2} + 5$

【点睛】易错点睛: 利用基本不等式求最值时, 要注意其必须满足的三个条件:

(1)“一正二定三相等”“一正”就是各项必须为正数;

(2)“二定”就是要求和的最小值, 必须把构成和的二项之积转化成定值; 要求积的最大值, 则必须把构成积的因式的和转化成定值;

(3)“三相等”是利用基本不等式求最值时, 必须验证等号成立的条件, 若不能取等号则这个定值就不是所求的最值, 这也是最容易发生错误的地方

15. 已知命题 $p: x^2 - 2(a+1)x + a(a+2) \leq 0$; 命题 $q: -2 \leq x-1 \leq 5$, 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $[-1, 4]$

【解析】

【分析】解一元二次不等式求命题 p 的解集, 解一元一次方程求命题 q 的解集, 再由 p 是 q 的充分不必要条件列不等式组, 求 a 的取值范围.

【详解】由题设, 命题 p 为 $a \leq x \leq a+2$, 命题 q 为 $-1 \leq x \leq 6$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/286022234020010242>