

@专属教育

考试复习专用

考试参考习题—系统复习
备考题库训练—习题强化
考前模拟测试—模拟演练
通关宝典梳理—真题体验
技巧提升冲刺—技能技巧

注：文本内容应以实际为准，下载前需仔细预览

@助你一战成名

2024 年广东省专升本《高等数学》 黄金考点汇编

第一章 函数、极限、连续

第一节 函数

考点 1: 判断函数是否为同一函数

方法：定义域和对应法则都相同的函数为同一函数。

1. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一函数的是 ()

A. $f(x)=|x|$, $g(x)=x$

B. $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$

C. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$, $g(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

D. $f(x)=\ln x^3$, $g(x)=3\ln x$

【答案】 D

【考点】 函数的二要素：定义域、对应法则。

【解析】解：判断函数是否是同一函数，需要定义域、对应法则都一样，是同一函数。A、B 选项对应法则不一样，C 选项定义域不一样，D 选项定义域和对应法则都一样。

考点 2: 求函数定义域

$$(1) \text{ 具体函数求定义域 } \begin{cases} \frac{a}{f(x)}, f(x) \neq 0 \\ \sqrt[n]{f(x)}, f(x) \geq 0 \\ \log_a f(x), f(x) > 0 \\ \arcsin f(x), \arccos f(x), -1 \leq f(x) \leq 1 \end{cases}$$

(2) 抽象函数求定义域： $f[g(x)], f[h(x)]$ ，要使得 $g(x), h(x)$ 值域要相同，
求出 x 的范围即可。

1. 函数 $y = \sqrt{x^2 + x - 12}$ 的定义域为_____.

【答案】 $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$

【考点】 考查函数的定义域。

【解析】 解: $x^2 + x - 12 \geq 0, (x-3)(x+4) \geq 0, x \in (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$

2. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$, 求函数 $f(2x-4)$ 的定义域.

【答案】 $x \in [1, 3]$

【考点】 考查函数的定义域。

【解析】 解: $-2 \leq 2x-4 \leq 2, 1 \leq x \leq 3, x \in [1, 3]$

考点 3: 函数的解析式、反函数的求法

函数的解析式: 配凑法, 换元法

反函数: 反解出 $x = \varphi(y)$, 互换自变量与因变量。

1. 已知 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ 则 $f[f(x)] =$ ()

- A. $x-1$ B. $\frac{1}{x-1}$ C. $1-x$ D. $\frac{1}{1-x}$

【答案】 D

【考点】 求函数的解析式。

【解析】 解: $f[f(x)] = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-x}$

2. 已知函数 $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 求反函数 $f^{-1}(x)$.

【答案】 $f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

【考点】 求解反函数。

【解析】 解: $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, y^2 = \frac{1-x}{1+x}, x = \frac{1-y^2}{1+y^2}, f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

考点 4: 函数的基本性质

基本性质:

单调性: 利用导数判断, $f'(x) > 0$, 函数单调递增, 求出自变量的范围为单调递增区间; $f'(x) < 0$, 函数单调递减, 求出自变量的范围为单调递减区间。

奇偶性: 根据定义判定。函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 若 $f(-x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 为偶函数, 若 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数。

关于奇偶函数重要的结论: 设 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域分别是 D_1, D_2 , 那么在它们的公共定义域上: 奇+奇=奇, 奇 \times 奇=偶, 偶+偶=偶, 偶 \times 偶=偶, 奇 \times 偶=奇。

有界性 (识记常见有界函数)

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, |\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \leq \pi, |\arctan x| < \frac{\pi}{2}.$$

周期性 (不常考)

1. 函数 $f(x) = 1 + \ln x$ 在 $(0, e)$ 内 ()

- A. 严格单调递增且有界 B. 严格单调递减且有界
C. 严格单调递增且无界 D. 严格单调递减且无界

【答案】 C

【考点】 函数的基本性质。

【解析】 解: $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, $f(x)$ 在 $(0, e)$ 内是单调递增函数, 在 $(0, e)$ 内,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty, \quad f(x) = 1 + \ln x \text{ 无下界.}$$

2. 判断函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的奇偶性:

【答案】 奇函数

【考点】 函数的基本性质。

$$\begin{aligned} \text{【解析】解: } y(-x) &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \left[\frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right] \\ &= \ln \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right) = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -y(x), y \text{ 为奇函数.} \end{aligned}$$

第二节 极 限

考点 5: 数列的极限

如果当 n 无限增大时, 数列 $\{x_n\}$ 无限趋近于确定的常数 a , 那么 a 就叫做数列 $\{x_n\}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

1. 根据题意填空:

(1) 数列 $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, 其通项为_____.

【答案】 $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

【考点】 求数列的通项公式。

【解析】解: 通项为 $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

(2) 设数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$, 则数列的前 n 项和 $S_n =$ _____.

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ _____.

【答案】 见解析

【考点】 求数列的极限。

【解析】解：通项为 $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$

2. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x^2 - 5}{3x^3 + 2x + 1}$

【答案】 $\frac{2}{3}$

【考点】 求数列的极限。

【解析】解： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x^2 - 5}{3x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{6}{x} - \frac{5}{x^3}}{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{3}$

【总结】： $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & m < n \\ \frac{a_m}{b_n}, & m = n \\ \infty, & m > n \end{cases}$

考点 6: 函数的极限

【总结】 计算极限的常用方法:

有 7 种未定式: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$

1. 求下列函数的极限 ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 型, 又称基本型) 方法有:

①约去零因式法 (此法适用于 $x \rightarrow x_0, \frac{0}{0}$);

②除以适当无穷大 (适用于 $x \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ 时, $\frac{\infty}{\infty}$);

③分子或分母有理化 (适用于带有根号的极限问题);

④通分, 倒代换 (适用于 $\infty - \infty$);

⑤利用基本极限公式 (适用于 $\frac{0}{0}, 1^\infty$);

⑥等价无穷小替换；

⑦无穷小量的性质（无穷小·无穷小=无穷小，无穷小·有界量=无穷小）；

⑧利用夹逼原理（进行适当放缩）；

⑨取 e 法或取对数法（适用于 1^∞ ， 0^0 和 ∞^0 ）；

⑩洛必达法则（ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ ）。

1. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x \sin^2 x}$$

【答案】见解析

【考点】求函数的极限。

【解析】解：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\sin x - x} - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

考点 7: 无穷小量的阶

设 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$.

(1) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$ ，

(2) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ ，就说 β 是比 α 低阶的无穷小。

(3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ ，就说 β 与 α 是同阶无穷小。特别地，当 $c=1$ 时，

即 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ ，此时称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$ 。

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列 () 是 x 的高阶无穷小量.

A. $e^{\sqrt{x}} - 1$ B. $\sqrt{1+x} - 1$ C. $x \sin \frac{1}{x}$ D. $1 - \cos x$

【答案】 D

【考点】 考查无穷小量。

【解析】解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = 0$, 可判断 D 正确。

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(\cos x)$ 与 Ax^k 是等价无穷小, 则常数 $A =$ _____,

常数 $k =$ _____.

【答案】 $A = -\frac{1}{2}, k = 2$

【考点】 考查无穷小量。

【解析】解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{Ax^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{Ax^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{Ax^k}, A = -\frac{1}{2}, k = 2$

考点 8: 用极限解决参数问题

1. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 2$, 求常数 a, b 的值.

【答案】 $a = 2, b = -4$

【考点】 考查无穷小量。

【解析】解: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^2 + 1 - (x + 1)(ax + b)}{x + 1} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1 - ax^2 - bx - ax - b}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (4x - 2ax - b - a) = 2,$

$a = 2, -a - b = 2, b = -4$

第三节 连续

考点 9: 函数的连续性

判断函数在某一点是否连续遵循以下步骤:

① $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义;

② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在;

③ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否等于 $f(x_0)$.

1. 若函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{3}{x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 试确定 a 的值.

【答案】 $A = -\frac{1}{2}, k = 2$

【考点】 考查函数在某一点的连续性.

【解析】 函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{3}{x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 必须使

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 故 $a = e^3$.

考点 10: 求函数的间断点及其类型

① 第一类间断点 ($f(x_0^-), f(x_0^+)$ 存在)

可去间断点: $f(x_0^-) = f(x_0^+)$;

跳跃间断点: $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$;

② 第二类间断点 ($f(x_0^-), f(x_0^+)$ 至少有一个不存在)

无穷间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$

1. 设函数 $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{|x|(x^2 - 1)}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的_____间断点.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/286044144202010041>