

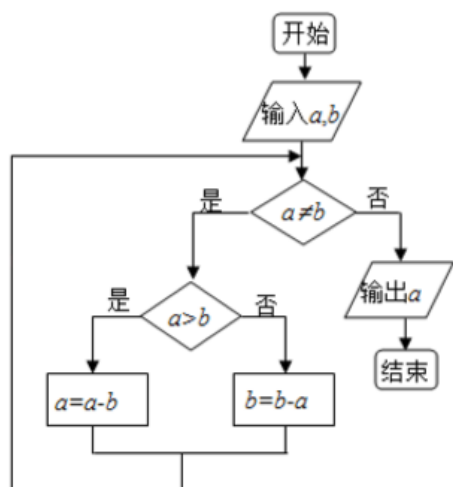
2023-2024 学年安徽省安庆五校联盟高三第三次教学质量监测数学试题试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 如下的程序框图的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”。执行该程序框图，若输入的 a, b 分别为 176, 320，则输出的 a 为 ()



- A. 16 B. 18 C. 20 D. 15

2. 已知 AB 是过抛物线 $y^2 = 4x$ 焦点 F 的弦， O 是原点，则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} =$ ()

- A. -2 B. -4 C. 3 D. -3

3. 已知函数 $f(x) = a(e^2x - 2\ln x) (a > 0)$ ， $D = \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 若所有点 $(s, f(t))$ ， $(s, t \in D)$ 所构成的平面区域面积为

$e^2 - 1$ ，则 $a =$ ()

- A. e B. $\frac{1}{e-2}$ C. 1 D. $\frac{e}{e-2}$

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 恰有 4 个不相等的实数根，则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right]$ D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$

5. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BP$, $AC \perp PC$, $AB \perp AC$, $PB = PC = 2\sqrt{2}$, 点 P 到底面 ABC 的距离为 2, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 ()

A. 3π B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ C. 12π D. 24π

6. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(-x)$, 且在区间 $[1, 2]$ 上是减函数, 令

$a = \ln 2, b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}, c = \log_{\frac{1}{2}} 2$, 则 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系为 ()

A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(a) < f(c) < f(b)$

C. $f(b) < f(a) < f(c)$ D. $f(c) < f(a) < f(b)$

7. 我们熟悉的卡通形象“哆啦 A 梦”的长宽比为 $\sqrt{2}:1$. 在东方文化中通常称这个比例为“白银比例”, 该比例在设计和建筑领域有着广泛的应用. 已知某电波塔自下而上依次建有第一展望台和第二展望台, 塔顶到塔底的高度与第二展望台到塔底的高度之比, 第二展望台到塔底的高度与第一展望台到塔底的高度之比皆等于“白银比例”, 若两展望台间高度差为 100 米, 则下列选项中与该塔的实际高度最接近的是 ()

A. 400 米 B. 480 米
C. 520 米 D. 600 米

8. 小王因上班繁忙, 来不及做午饭, 所以叫了外卖. 假设小王和外卖小哥都在 12:00~12:10 之间随机到达小王所居住的楼下, 则小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率是 ()

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{4}$

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$, 过左焦点 F_1 作斜率为 1 的直线交双曲线 C 的右支于点 P , 若线段 PF_1 的中点在圆 $O: x^2 + y^2 = c^2$ 上, 则该双曲线的离心率为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}+1$ D. $2\sqrt{2}+1$

10. 已知角 α 的顶点与坐标原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 若点 $P(2, -1)$ 在角 α 的终边上, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) =$ ()

A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

11. 在区间 $[-1,1]$ 上随机取一个实数 k ，使直线 $y=k(x+3)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

12. $F(-c,0)$ 为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左焦点，过点 F 的直线与圆 $x^2+y^2 = \frac{3}{4}c^2$ 交于 A 、 B 两点，(A 在 F 、 B

之间)与双曲线 E 在第一象限的交点为 P ， O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{BP}$ ，且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{3}{100}c^2$ ，则双曲线 E 的离心

率为（ ）

- A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. 5

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ \frac{2}{x}, & x < 0 \end{cases}$ ，则使得不等式 $f(f(a)) > 0$ 成立的 a 的取值范围为_____.

14. 近年来，新能源汽车技术不断推陈出新，新产品不断涌现，在汽车市场上影响力不断增大.动力蓄电池技术作为新能源汽车的核心技术，它的不断成熟也是推动新能源汽车发展的主要动力.假定现在市售的某款新能源汽车上，车载动力蓄电池充放电循环次数达到2000次的概率为85%，充放电循环次数达到2500次的概率为35%.若某用户的自用新能源汽车已经经过了2000次充电，那么他的车能够充电2500次的概率为_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A ， B ， C 的对边长分别为 a ， b ， c ，满足 $a^2 - 2a(\sin B + \sqrt{3}\cos B) + 4 = 0$ ， $b = 2\sqrt{7}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的左右焦点为 F_1, F_2 ，过 F_2 作 x 轴的垂线与 C 相交于 A, B 两点， F_1B 与 y 轴相交于 D .若 $AD \perp F_1B$ ，则双曲线 C 的离心率为_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 6$ ，圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 10\cos\theta \\ y = 10\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数).

(1) 请分别把直线 l 和圆 C 的方程化为直角坐标方程；

(2) 求直线 l 被圆截得的弦长.

18. (12分) 已知 $P(0, -2)$ ，点 A, B 分别为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点，直线 BP 交 E 于另一点

Q ， $\triangle ABP$ 为等腰直角三角形，且 $|PQ|:|QB| = 3:2$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设过点 P 的直线 l 与椭圆 E 交于 M, N 两点, 总使得 $\angle MON$ 为锐角, 求直线 l 斜率的取值范围.

19. (12 分) [选修 4-5: 不等式选讲]: 已知函数 $f(x) = |x+2a| + |x-a|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 4 - |x+2|$ 的解集;

(2) 设 $a > 0, b > 0$, 且 $f(x)$ 的最小值为 t . 若 $t+3b=3$, 求 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值.

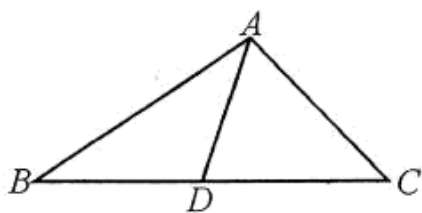
20. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x$.

(1) 若函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} - \frac{1}{x}$, 求 $g(x)$ 的极值;

(2) 证明: $f(x) + 1 < e^x - x^2$.

(参考数据: $\ln 2 \approx 0.69 \quad \ln 3 \approx 1.10 \quad e^{\frac{3}{2}} \approx 4.48 \quad e^2 \approx 7.39$)

21. (12 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 BC 上, $\angle CAD = \frac{\pi}{4}$, $AC = \frac{7}{2}$, $\cos \angle ADB = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

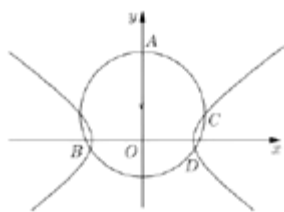


(1) 求 $\sin C$ 的值;

(2) 若 $BD=5$, 求 AB 的长.

22. (10 分) 如图, 已知圆 $\Gamma_1: x^2 + \left(y - \frac{r}{2}\right)^2 = r^2 (r > 0)$ 和双曲线 $\Gamma_2: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$, 记 Γ_1 与 y 轴正半轴、 x

轴负半轴的公共点分别为 A, B , 又记 Γ_1 与 Γ_2 在第一、第四象限的公共点分别为 C, D .



(1) 若 $r=2$, 且 B 恰为 Γ_2 的左焦点, 求 Γ_2 的两条渐近线的方程;

(2) 若 $r=2$, 且 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (m, -5)$, 求实数 m 的值;

(3) 若 B 恰为 Γ_2 的左焦点, 求证: 在 x 轴上不存在这样的点 P , 使得 $|PA| - |PC| = 2.019$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据题意可知最后计算的结果为 a, b 的最大公约数.

【详解】

输入的 a, b 分别为 176, 320, 根据流程图可知最后计算的结果为 a, b 的最大公约数, 按流程图计算 $320-176=144$, $176-144=32$, $144-32=112$, $112-32=80$, $80-32=48$, $48-32=16$, $32-16=16$, 易得 176 和 320 的最大公约数为 16, 故选: A.

【点睛】

本题考查的是利用更相减损术求两个数的最大公约数, 难度较易.

2、D

【解析】

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 设 $AB: x = my + 1$, 联立方程得到 $y_1 y_2 = -4$, 计算

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2 \text{ 得到答案.}$$

【详解】

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 故 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2$.

易知直线斜率不为 0, 设 $AB: x = my + 1$, 联立方程 $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$,

得到 $y^2 - 4my - 4 = 0$, 故 $y_1 y_2 = -4$, 故 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{y_1^2 y_2^2}{16} + y_1 y_2 = -3$.

故选: D.

【点睛】

本题考查了抛物线中的向量的数量积，设直线为 $x = my + 1$ 可以简化运算，是解题的关键。

3、D

【解析】

依题意，可得 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上单调递增，于是可得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上的值域为 $[a(e+2), e^2a]$ ，继而可得

$$a(e^2 - e - 2) \left(1 - \frac{1}{e}\right) = e^2 - 1, \text{ 解之即可.}$$

【详解】

$$\text{解: } f'(x) = a \left(e^2 - \frac{2}{x} \right) = \frac{a(e^2x - 2)}{x}, \text{ 因为 } x \in \left[\frac{1}{e}, 1 \right], a > 0,$$

所以 $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上单调递增，

则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ 上的值域为 $[a(e+2), e^2a]$ ，

因为所有点 $(s, f(t)) (s, t \in D)$ 所构成的平面区域面积为 $e^2 - 1$ ，

$$\text{所以 } a(e^2 - e - 2) \left(1 - \frac{1}{e}\right) = e^2 - 1,$$

$$\text{解得 } a = \frac{e}{e-2},$$

故选：D.

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的单调性，理解题意，得到 $a(e^2 - e - 2)(1 - \frac{1}{e}) = e^2 - 1$ 是关键，考查运算能力，属于中档题。

4、D

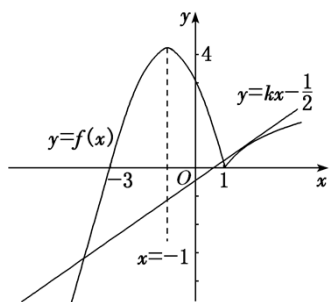
【解析】

由已知可将问题转化为： $y=f(x)$ 的图象和直线 $y=kx - \frac{1}{2}$ 有 4 个交点，作出图象，由图可得：点(1,0)必须在直线 $y=kx - \frac{1}{2}$ 的下方，即可求得： $k > \frac{1}{2}$ ；再求得直线 $y=kx - \frac{1}{2}$ 和 $y=\ln x$ 相切时， $k = \frac{\sqrt{e}}{e}$ ；结合图象即可得解。

【详解】

若关于 x 的方程 $f(x) = kx - \frac{1}{2}$ 恰有 4 个不相等的实数根，

则 $y=f(x)$ 的图象和直线 $y=kx-\frac{1}{2}$ 有 4 个交点. 作出函数 $y=f(x)$ 的图象, 如图,



故点 $(1,0)$ 在直线 $y=kx-\frac{1}{2}$ 的下方.

$$\therefore k \times 1 - \frac{1}{2} > 0, \text{ 解得 } k > \frac{1}{2}.$$

当直线 $y=kx-\frac{1}{2}$ 和 $y=\ln x$ 相切时, 设切点横坐标为 m ,

$$\text{则 } k = \frac{\ln m + \frac{1}{2}}{m} = \frac{1}{m}, \therefore m = \sqrt{e}.$$

此时, $k = \frac{1}{m} = \frac{\sqrt{e}}{e}$, $f(x)$ 的图象和直线 $y=kx-\frac{1}{2}$ 有 3 个交点, 不满足条件,

故所求 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)$,

故选 D..

【点睛】

本题主要考查了函数与方程思想及转化能力, 还考查了导数的几何意义及计算能力、观察能力, 属于难题.

5、C

【解析】

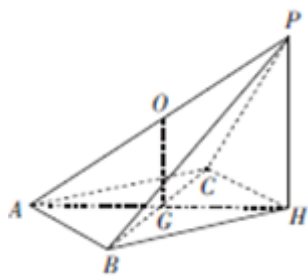
首先根据垂直关系可确定 $OP=OA=OB=OC$, 由此可知 O 为三棱锥外接球的球心, 在 $\triangle PAB$ 中, 可以算出 AP 的一个表达式, 在 $\triangle OAG$ 中, 可以计算出 AO 的一个表达式, 根据长度关系可构造等式求得半径, 进而求出球的表面积.

【详解】

取 AP 中点 O , 由 $AB \perp BP$, $AC \perp PC$ 可知: $OP=OA=OB=OC$,

$\therefore O$ 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球球心,

过 P 作 $PH \perp$ 平面 ABC , 交平面 ABC 于 H , 连接 AH 交 BC 于 G , 连接 OG , HB , HC ,



$Q PB = PC$, $\therefore HB = HC$, $\therefore AB = AC$, $\therefore G$ 为 BC 的中点

由球的性质可知: $OG \perp$ 平面 ABC , $\therefore OG \parallel PH$, 且 $OG = \frac{1}{2}PH = 1$.

设 $AB = x$,

$$Q PB = 2\sqrt{2}, \therefore AO = \frac{1}{2}PA = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 8},$$

$$Q AG = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}x, \therefore \text{在 } \triangle OAG \text{ 中, } AG^2 + OG^2 = OA^2,$$

$$\text{即 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 8}\right)^2, \text{ 解得: } x = 2,$$

$$\therefore \text{三棱锥 } P-ABC \text{ 的外接球的半径为: } AO = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + (2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{三棱锥 } P-ABC \text{ 外接球的表面积为 } S = 4\pi R^2 = 12\pi.$$

故选: C.

【点睛】

本题考查三棱锥外接球的表面积的问题, 求解几何体外接球相关问题的关键是能够利用球的性质确定外接球球心的位置.

6、C

【解析】

可设 $x \in [0, 1]$, 根据 $f(x)$ 在 R 上为偶函数及 $f(x+2) = f(-x)$ 便可得到: $f(x) = f(-x) = f(-x+2)$, 可设 x_1 ,

$x_2 \in [0, 1]$, 且 $x_1 < x_2$, 根据 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数便可得出 $f(x_1) < f(x_2)$, 从而得出 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 再

根据对数的运算得到 a 、 b 、 c 的大小关系, 从而得到 $f(a)$ 、 $f(b)$ 、 $f(c)$ 的大小关系.

【详解】

解: 因为 $\ln 1 < \ln 2 < \ln e$, 即 $0 < a < 1$, 又 $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 2$, $c = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$

设 $x \in [0, 1]$, 根据条件, $f(x) = f(-x) = f(-x+2)$, $-x+2 \in [1, 2]$;

若 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ，且 $x_1 < x_2$ ，则： $-x_1 + 2 > -x_2 + 2$ ；

Q $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数；

$$\therefore f(-x_1 + 2) < f(-x_2 + 2)；$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2)；$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增函数；

$$\text{所以 } f(b) = f(2) = f(0), \quad f(c) = f(-1) = f(1)$$

$$\therefore f(b) < f(a) < f(c)$$

故选：C

【点睛】

考查偶函数的定义，减函数及增函数的定义，根据单调性定义判断一个函数单调性的方法和过程：设 $x_1 < x_2$ ，通过条件比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ ，函数的单调性的应用，属于中档题.

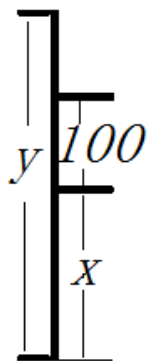
7、B

【解析】

根据题意，画出几何关系，结合各线段比例可先求得第一展望台和第二展望台的距离，进而由比例即可求得该塔的实际高度.

【详解】

设第一展望台到塔底的高度为 x 米，塔的实际高度为 y 米，几何关系如下图所示：



由题意可得 $\frac{100+x}{x} = \sqrt{2}$ ，解得 $x = 100(\sqrt{2} + 1)$ ；

且满足 $\frac{y}{x+100} = \sqrt{2}$ ，

故解得塔高 $y = (x+100)\sqrt{2} = 200(\sqrt{2} + 1) \approx 480$ 米，即塔高约为 480 米.

故选：B

【点睛】

本题考查了对中国文化的理解与简单应用，属于基础题.

8、C

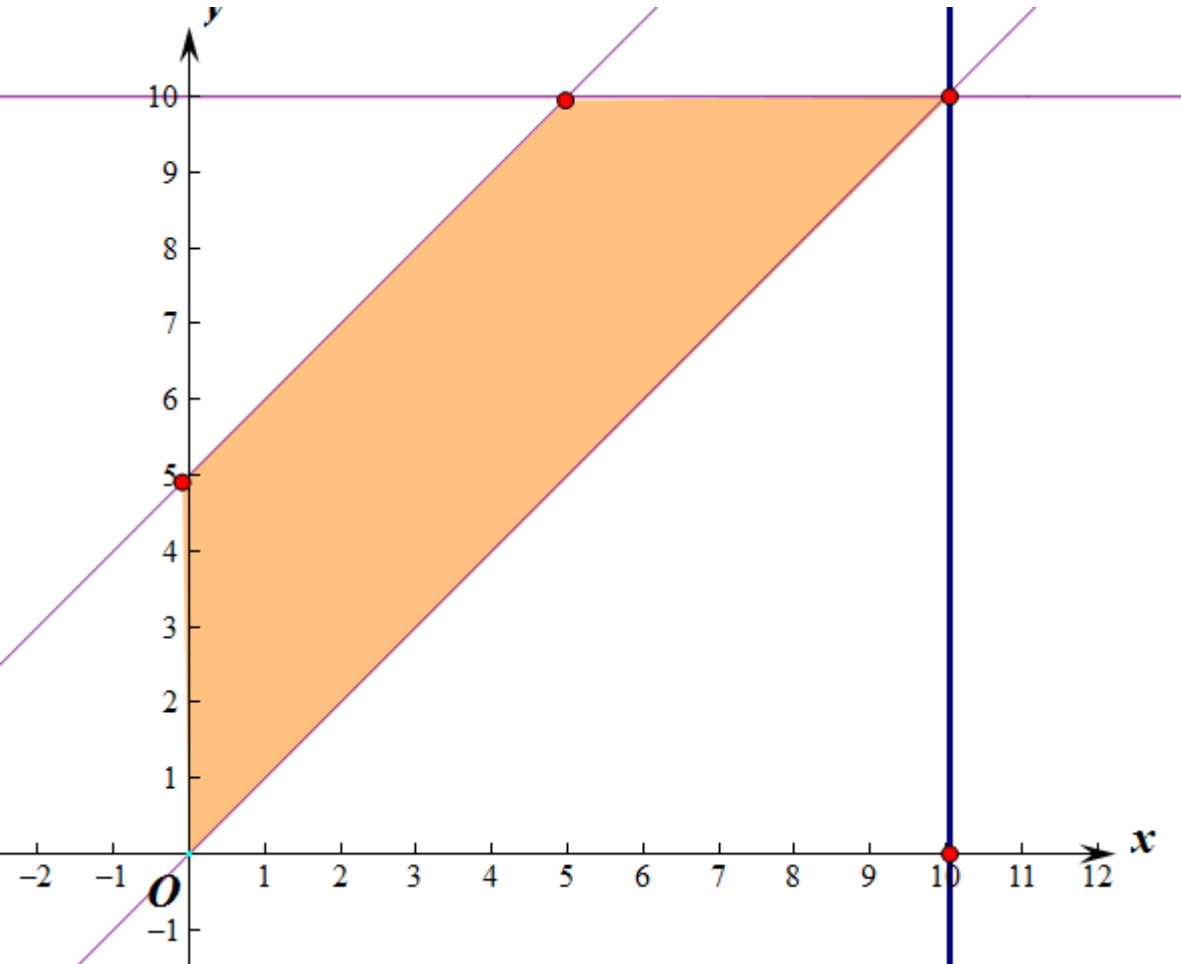
【解析】

设出两人到达小王的时间，根据题意列出不等式组，利用几何概型计算公式进行求解即可.

【详解】

设小王和外卖小哥到达小王所居住的楼下的时间分别为 x, y ，以 12:00 点为开始算起，则有 $\begin{cases} x \leq y \\ y - x \leq 5 \end{cases}$ ，在平面直角

坐标系内，如图所示：图中阴影部分表示该不等式组的所表示的平面区域，



所以小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率为：

$$P = \frac{10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5}{10 \cdot 10} = \frac{3}{8}.$$

故选：C

【点睛】

本题考查了几何概型中的面积型公式，考查了不等式组表示的平面区域，考查了数学运算能力.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/286052134201010203>