

2024 届新疆木垒县中学高三 1 月检测试题数学试题

注意事项:

1. 答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚, 将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答, 超出答题区域书写的答案无效; 在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出, 确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁, 不要折暴、不要弄破、弄皱, 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是函数 $f(x) = a\sqrt{x} + bx^2$ 的函数图像上的任意两点, 且 $y = f(x)$ 在点

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ 处的切线与直线 AB 平行, 则()

- A. $a = 0$, b 为任意非零实数 B. $b = 0$, a 为任意非零实数
C. a 、 b 均为任意实数 D. 不存在满足条件的实数 a , b

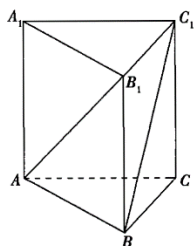
2. 已知函数 $f(x) = A\cos(2x + \varphi)$ ($\varphi > 0$) 的图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后, 得到的图像关于 y 轴对称, $f(0) = 1$, 当 φ 取得最小值时, 函数 $f(x)$ 的解析式为()

- A. $f(x) = \sqrt{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4})$ B. $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{4})$
C. $f(x) = \sqrt{2}\cos(2x - \frac{\pi}{4})$ D. $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

3. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{3}$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, 则 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

4. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的所有棱长均相等, 侧棱 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 过 AB_1 作平面 α 与 BC_1 平行, 设平面 α 与平面 ACC_1A_1 的交线为 l , 记直线 l 与直线 AB, BC, CA 所成锐角分别为 α, β, γ , 则这三个角的大小关系为()



- A. $\alpha > \gamma > \beta$ B. $\alpha = \beta > \gamma$
C. $\gamma > \beta > \alpha$ D. $\alpha > \beta = \gamma$

5. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是 ()

- A. $y = x^{\frac{1}{2}}$ B. $y = 2^x$ C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ D. $y = -\frac{1}{x}$

6. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{13} = 0$, $a_3 + a_4 = 21$, 则 S_7 的值为 ().

- A. 21 B. 63 C. 13 D. 84

7. 设 α, β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个不等实数根, 记 $a_n = \alpha^n + \beta^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 下列两个命题 ()

①数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是正整数;

②数列 $\{a_n\}$ 存在某一项是 5 的倍数.

- A. ①正确, ②错误 B. ①错误, ②正确
C. ①②都正确 D. ①②都错误

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的焦距为 $2c$. 点 A 为双曲线 C 的右顶点, 若点 A 到双曲线 C 的渐近线的距离为 $\frac{1}{2}c$, 则双曲线 C 的离心率是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

9. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_3 + a_1 = S_2$, $a_4 = 6$, 则 $S_5 =$ ()

- A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

10. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-1 \leq 0 \\ x-y+3 \leq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$, 则 $x^2 + y^2$ 的最大值是 ()

- A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C. 13 D. $\sqrt{13}$

11. 已知 F_1, F_2 是椭圆和双曲线的公共焦点, P 是它们的一个公共点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{2\pi}{3}$, 设椭圆和双曲线的离心率

分别为 e_1, e_2 , 则 e_1, e_2 的关系为 ()

- A. $\frac{3}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 4$ B. $\frac{4}{3}e_1^2 + \frac{1}{3}e_2^2 = 4$
C. $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4$ D. $e_1^2 + 3e_2^2 = 4$

12. 对于函数 $f(x)$, 若 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$, 则称 x_1, x_2 为函数 $f(x)$ 的一对“线性对称点”. 若实数 a 与 b 和 $a+b$ 与 c 为函数 $f(x) = 3^x$ 的两对“线性对称点”, 则 c 的最大值为 ()

- A. $\log_3 4$ B. $\log_3 4 + 1$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\log_3 4 - 1$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 某次足球比赛中, A, B, C, D 四支球队进入了半决赛. 半决赛中, A 对阵 C , B 对阵 D , 获胜的两队进入决赛争夺冠军, 失利的两队争夺季军. 已知他们之间相互获胜的概率如下表所示.

	A	B	C	D
A 获胜概率	—	0.4	0.3	0.8
B 获胜概率	0.6	—	0.7	0.5
C 获胜概率	0.7	0.3	—	0.3
D 获胜概率	0.2	0.5	0.7	—

则 A 队获得冠军的概率为_____.

14. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过点 F_1 作直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 相切于点 A , 且与双曲线的右支相交于点 B , 若 A 是 BF_1 上的一个靠近点 F_1 的三等分点, 且 $|BF_2| = 10$, 则四边形 AOF_2B 的面积为_____.

15. 已知 $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\sqrt{6}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为_____.

16. 能说明“若 $f(x+1) < f(x)$ 对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ 都成立, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数”为假命题的一个函数是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 其前 n 项和为 S_n , 且满足 $2S_n = (n+1)a_n (n \in \mathbf{N}_+)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = 3^n - \lambda a_n^2$, 若数列 $\{b_n\}$ 为递增数列, 求 λ 的取值范围.

18. (12 分) 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = m + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 \cos^2 \theta + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 12$, 且曲线 C 的左焦点 F 在直线 l 上.

(I) 求 l 的极坐标方程和曲线 C 的参数方程;

(II) 求曲线 C 的内接矩形的周长的最大值.

19. (12 分) 已知动圆过定点 $F(0,1)$, 且与直线 $l: y = -1$ 相切, 动圆圆心的轨迹为 C , 过 F 作斜率为 $k(k \neq 0)$ 的直线 m 与 C 交于两点 A, B , 过 A, B 分别作 C 的切线, 两切线的交点为 P , 直线 PF 与 C 交于两点 M, N .

(1) 证明: 点 P 始终在直线 l 上且 $PF \perp AB$;

(2) 求四边形 $AMBN$ 的面积的最小值.

20. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 设 $\frac{3 \sin B}{\sin C} + \frac{3 \sin C}{\sin B} = \frac{3 \sin^2 A}{\sin B \sin C} + 4\sqrt{2}$

(1) 求 $\tan A$ 的值;

(2) 若 $\sqrt{2} \sin B = 3 \sin C$, 且 $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2}$, 求 a 的值.

21. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其面积记为 S , 满足 $\frac{2\sqrt{3}}{3} S = \overline{AB} \cdot \overline{CA}$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $\sqrt{3}(b+c) = 2a$, 求 $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$ 的值.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数). 以平面直角坐标系的原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta = \sqrt{3}$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程;

(2) 设 C_1 和 C_2 交点的交点为 A, B , 求 $\triangle AOB$ 的面积.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

求得 $f(x)$ 的导函数，结合两点斜率公式和两直线平行的条件：斜率相等，化简可得 $a=0$ ， b 为任意非零实数.

【详解】

依题意 $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}} + 2bx$ ， $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$ 处的切线与直线 AB 平行，即有

$$\frac{\frac{a}{2\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}}} + b(x_1+x_2)}{\frac{x_2-x_1}{\frac{x_1+x_2}{2}}} = \frac{a\sqrt{x_2} + bx_2^2 - a\sqrt{x_1} - bx_1^2}{x_2-x_1}$$
$$= \frac{a(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})}{x_2-x_1} + b(x_1+x_2), \text{ 所以 } \frac{a}{\sqrt{2(x_1+x_2)}} = \frac{a}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}, \text{ 由于对任意 } x_1, x_2 \text{ 上式都成立, 可得 } a=0, b \text{ 为非}$$

零实数.

故选：A

【点睛】

本题考查导数的运用，求切线的斜率，考查两点的斜率公式，以及化简运算能力，属于中档题.

2、A

【解析】

先求出平移后的函数解析式，结合图像的对称性和 $f(0)=1$ 得到 A 和 φ .

【详解】

因为 $f(x) = A\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + \varphi\right] = A\cos\left(2x - \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$ 关于 y 轴对称，所以 $-\frac{\pi}{4} + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ，

φ 的最小值是 $\frac{\pi}{4}$. $f(0) = A\cos\frac{\pi}{4} = 1$ ，则 $A = \sqrt{2}$ ，所以 $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

【点睛】

本题主要考查三角函数的图像变换及性质. 平移图像时需注意 x 的系数和平移量之间的关系.

3、A

【解析】

根据向量的运算法则展开后利用数量积的性质即可.

【详解】

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 3 + 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}.$$

故选：A.

【点睛】

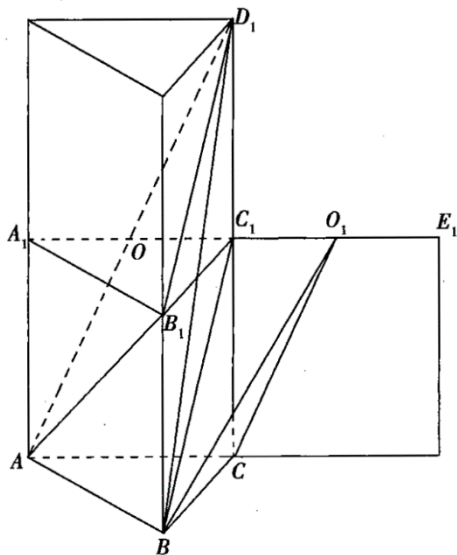
本题主要考查数量积的运算，属于基础题.

4、B

【解析】

利用图形作出空间中两直线所成的角，然后利用余弦定理求解即可.

【详解】



如图， $D_1C_1 = CC_1$ ， $C_1E_1 = A_1C_1$ ，设 O 为 A_1C_1 的中点， O_1 为 C_1E_1 的中点，

由图可知过 AB_1 且与 BC_1 平行的平面 α 为平面 AB_1D_1 ，所以直线 l 即为直线 AD_1 ，

由题易知， $\angle D_1AB$ ， $\angle O_1CB$ 的补角， $\angle D_1AC$ 分别为 α ， β ， γ ，

设三棱柱的棱长为 2，

在 $\triangle D_1AB$ 中， $D_1B = 2\sqrt{5}$ ， $AB = 2$ ， $AD_1 = 2\sqrt{5}$ ，

$$\cos \angle D_1AB = \frac{(2\sqrt{5})^2 + 4 - (2\sqrt{5})^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}, \therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{10};$$

在 $\triangle O_1BC$ 中， $O_1B = \sqrt{11}$ ， $BC = 2$ ， $O_1C = \sqrt{5}$ ，

$$\cos \angle O_1CB = \frac{(\sqrt{5})^2 + 4 - (\sqrt{11})^2}{2 \times 2 \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{10}, \therefore \cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{10};$$

在 $\triangle D_1AC$ 中， $CD_1 = 4$ ， $AC = 2$ ， $AD_1 = 2\sqrt{5}$ ，

$$\cos \angle D_1AC = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

Q $\cos \alpha = \cos \beta < \cos \gamma$ ， $\therefore \alpha = \beta > \gamma$.

故选：B

【点睛】

本题主要考查了空间中两直线所成角的计算，考查了学生的作图，用图能力，体现了学生直观想象的核心素养.

5、C

【解析】

由每个函数的单调区间，即可得到本题答案.

【详解】

因为函数 $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = 2^x$ 和 $y = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 递增，而 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 递减.

故选：C

【点睛】

本题主要考查常见简单函数的单调区间，属基础题.

6、B

【解析】

由已知结合等差数列的通项公式及求和公式可求 d ， a_1 ，然后结合等差数列的求和公式即可求解.

【详解】

解：因为 $S_{13} = 0$ ， $a_3 + a_4 = 21$ ，

所以 $\begin{cases} 13a_1 + 13 \times 6d = 0 \\ 2a_1 + 5d = 21 \end{cases}$ ，解可得， $d = -3$ ， $a_1 = 18$ ，

则 $S_7 = 7 \times 18 + \frac{1}{2} \times 7 \times 6 \times (-3) = 63$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查等差数列的通项公式及求和公式的简单应用，属于基础题.

7、A

【解析】

利用韦达定理可得 $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$, 结合 $a_n = \alpha^n + \beta^n$ 可推出 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, 再计算出 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 从而推出①正确; 再利用递推公式依次计算数列中的各项, 以此判断②的正误.

【详解】

因为 α, β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个不等实数根,

所以 $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$,

因为 $a_n = \alpha^n + \beta^n$,

所以 $a_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1}$

$$= (\alpha^n + \beta^n)\alpha + (\alpha^n + \beta^n)\beta - \beta^n\alpha - \alpha^n\beta$$

$$= (\alpha^n + \beta^n)(\alpha + \beta) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

$$= (\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = a_n + a_{n-1},$$

即当 $n \geq 3$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 中的任一项都等于其前两项之和,

$$\text{又 } a_1 = \alpha + \beta = 1, a_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3,$$

$$\text{所以 } a_3 = a_2 + a_1 = 4, a_4 = a_3 + a_2 = 7, a_5 = a_4 + a_3 = 11,$$

以此类推, 即可知数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是正整数, 故①正确;

若数列 $\{a_n\}$ 存在某一项是 5 的倍数, 则此项个位数字应当为 0 或 5,

由 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 依次计算可知,

数列 $\{a_n\}$ 中各项的个位数字以 1, 3, 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2 为周期,

故数列 $\{a_n\}$ 中不存在个位数字为 0 或 5 的项, 故②错误;

故选: A.

【点睛】

本题主要考查数列递推公式的推导, 考查数列性质的应用, 考查学生的综合分析以及计算能力.

8、A

【解析】

由点到直线距离公式建立 a, b, c 的等式, 变形后可求得离心率.

【详解】

由题意 $A(a, 0)$, 一条渐近线方程为 $y = \frac{b}{a}x$, 即 $bx - ay = 0$, $\therefore d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2}c$,

$$\frac{a^2 b^2}{c^2} = \frac{1}{4} c^2, \text{ 即 } \frac{a^2 (c^2 - a^2)}{c^2} = \frac{1}{4} c^2, \quad e^4 - 4e^2 + 4 = 0, \quad e = \sqrt{2}.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查求双曲线的离心率，掌握渐近线方程与点到直线距离公式是解题基础.

9、C

【解析】

利用等差通项，设出 a_1 和 d ，然后，直接求解 S_5 即可

【详解】

$$\text{令 } a_n = a_1 + (n-1)d, \text{ 则 } 3a_1 + \frac{3 \times 2 \times d}{2} + a_1 = a_1 + a_1 + d, \quad a_1 + 3d = 6, \quad \therefore a_1 = -3, \quad d = 3, \quad \therefore$$

$$S_5 = 5 \times (-3) + 10 \times 3 = 15.$$

【点睛】

本题考查等差数列的求和问题，属于基础题

10、C

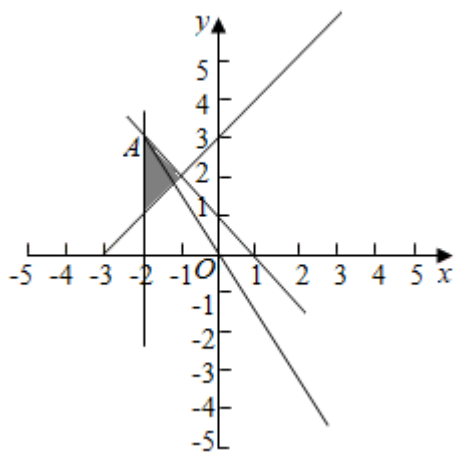
【解析】

由已知画出可行域，利用目标函数的几何意义求最大值.

【详解】

解： $x^2 + y^2$ 表示可行域内的点 (x, y) 到坐标原点的距离的平方，画出不等式组表示的可行域，如图，由 $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$

$$\text{解得 } \begin{cases} y = 3 \\ x = -2 \end{cases} \text{ 即 } A(-2, 3)$$



点 $A(-2, 3)$ 到坐标原点 $(0, 0)$ 的距离最大，即 $(x^2 + y^2)_{\max} = (-2)^2 + 3^2 = 13$.

故选：C.

【点睛】

本题考查线性规划问题，考查数形结合的数学思想以及运算求解能力，属于基础题.

11、A

【解析】

设椭圆的半长轴长为 a_1 ，双曲线的半长轴长为 a_2 ，根据椭圆和双曲线的定义得：
$$\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 2a_1 \\ |PF_1| - |PF_2| = 2a_2 \end{cases}$$
，解得

$$\begin{cases} |PF_1| = a_1 + a_2 \\ |PF_2| = a_1 - a_2 \end{cases}$$
，然后在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得：

$$4c^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 - 2(a_1 + a_2) \cdot (a_1 - a_2) \cdot \cos \frac{2\pi}{3}, \text{ 化简求解.}$$

【详解】

设椭圆的长半轴长为 a_1 ，双曲线的长半轴长为 a_2 ，

由椭圆和双曲线的定义得：
$$\begin{cases} |PF_1| + |PF_2| = 2a_1 \\ |PF_1| - |PF_2| = 2a_2 \end{cases}$$
，

解得
$$\begin{cases} |PF_1| = a_1 + a_2 \\ |PF_2| = a_1 - a_2 \end{cases}$$
，设 $|F_1F_2| = 2c, \angle F_1PF_2 = \frac{2\pi}{3}$ ，

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理得：
$$4c^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 - 2(a_1 + a_2) \cdot (a_1 - a_2) \cdot \cos \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{化简得 } 3a_1^2 + a_2^2 = 4c^2,$$

$$\text{即 } \frac{3}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 4.$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查椭圆，双曲线的定义和性质以及余弦定理的应用，还考查了运算求解的能力，属于中档题.

12、D

【解析】

根据已知有 $3^{a+b} + 3^c = 3^{a+b+c}$ ，可得 $3^c = 1 + \frac{1}{3^{a+b} - 1}$ ，只需求出 3^{a+b} 的最小值，根据

$3^{a+b} = 3^a + 3^b$ ，利用基本不等式，得到 3^{a+b} 的最小值，即可得出结论.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/287002101044006142>