第 8 讲　导数和函数压轴小题 11 类（1）

【题型一】 整数解

【典例分析】

在关于 x 的不等式 $e^2x^2-\left(ae^x+4e^2\right)x+ae^x+4e^2>0$（其中 e=2.71828… 为自然对数的底数）的解集中，有且仅有两个大于 2 的整数，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$\left(\dfrac{16}{5e^4},\dfrac{1}{2e}\right]$　　　　B．$\left[\dfrac{9}{4e^2},\dfrac{1}{2e}\right)$

C．$\left(\dfrac{16}{5e^4},\dfrac{4}{3e^2}\right]$　　　　D．$\left[\dfrac{9}{4e^2},\dfrac{4}{3e^2}\right)$

【变式演练】

1.已知函数 $f\left(x\right)=a\left(x+1\right)e^x-x$，若存在唯一的正整数 x_0，使得 $f\left(x_0\right)<0$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left[-\dfrac{1}{2e},\dfrac{3}{4e^3}\right)$　　B．$\left[\dfrac{3}{4e^3},\dfrac{2}{3e^2}\right)$　　C．$\left[\dfrac{2}{3e^2},\dfrac{1}{2e}\right)$　　D．$\left[\dfrac{1}{2e},\dfrac{1}{2}\right)$

2.已知偶函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f(3+x)=f(3-x)$，且当 $x\in\left[0,3\right]$ 时，$f\left(x\right)=xe^{-\frac{x}{2}}$，若关于 x 的不等式 $f^2\left(x\right)-tf\left(x\right)>0$ 在 $\left[-150,150\right]$ 上有且只有 150 个整数解，则实数 t 的取值范围是（　　）

A．$\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right)$　　B．$\left[e^{-\frac{1}{2}},3e^{-\frac{3}{2}}\right)$　　C．$\left(3e^{-\frac{3}{2}},2e^{-1}\right)$　　D．$\left(e^{-\frac{1}{2}},2e^{-1}\right)$

3.已知对任意实数 $k>1$，关于 x 的不等式 $k\left(x-a\right)>\dfrac{2x}{e^x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，则 a 的最大整数值为

A．0　　B．-1　　C．-2　　D．-3

【题型二】 零点

【典例分析】

已知函数 $f\left(x\right)=\left(x^2-2x\right)e^x$，若方程 $f\left(x\right)=a$ 有 3 个不同的实根 x_1，x_2，x_3（$x_1<x_2<x_3$），则 $\dfrac{a}{x_2-2}$ 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}},0\right)$　　B．$\left(-\dfrac{1}{e},0\right)$　　C．$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}},\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$　　D．$\left(0,\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$

【变式演练】

1.已知$f\left(x\right)=ax^3-3x^2+1$，若$f\left(x\right)$存在唯一的零点$x_0$，且$x_0>0$，则$a$的取值范围是（　　）

A．$\left(2,+\infty\right)$　　B．$\left(-\infty,-2\right)$　　C．$\left(1,+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,1\right)$

2.已知函数$f(x)=\dfrac{x-2m}{3x^2}(m<0),g(x)=\dfrac{2\ln(-x)}{x}$，设方程$f(g(x))+\dfrac{1}{m}=0$的3个实根分别为$x_1,x_2,x_3$，且$x_1<x_2<x_3$，则$g\left(x_1\right)+2g\left(x_2\right)+3g\left(x_3\right)$的值可能为（　　）

A．$-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$　　B．$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$　　C．$-\dfrac{3}{\mathrm{e}}$　　D．$\dfrac{3}{\mathrm{e}}$

3.已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}$，对于正实数$a$，若关于$t$的方程$f\left(t\right)=f\left(\dfrac{a}{t}\right)$恰有三个不同的正实数根，则$a$的取值范围是（　　）

A．$\left(1,8\right)$　　B．$\left(e^2,8\right)$　　C．$\left(8,+\infty\right)$　　D．$\left(e^2,+\infty\right)$

【题型三】　同构

【典例分析】

定义：设函数$y=f(x)$在(a,b)上的导函数为$f'(x)$，若$f'(x)$在(a,b)上也存在导函数，则称函数$y=f(x)$在(a,b)上存在二阶导函数，简记为$y=f''(x)$.若在区间(a,b)上$f''(x)>0$，则称函数$y=f(x)$在区间(a,b)上为凹函数".已知$f(x)=me^x+\dfrac{(x+1)^2}{4}[1+2\ln m-2\ln(x+1)]+x$在区间$(-1,+\infty)$上为"凹函数"，则实数$m$的取值范围为（　　）

A．$(1,+\infty)$　　B．$(\sqrt{e},+\infty)$　　C．$(e,+\infty)$　　D．$(\sqrt{e},e)$

【变式演练】

1.已知函数$f\left(x\right)=x-\ln\left(x+1\right)$，$g\left(x\right)=e^x-x-1$，若$g\left(x\right)\geq kf\left(x\right)$对$\forall x\in\left[0,+\infty\right)$恒成立，求实数$k$的取值范围.

2.已知不等式$xe^{x+1}-x\geq\ln x+2m+3$对$\forall x\in\left(0,+\infty\right)$恒成立，则$m$取值范围为（　　）

A．$m\le -\frac{1}{2}$　　B．$m\ge -\frac{1}{2}$　　C．$m\le -2$　　D．$m>-2$

3.设$k>0$，若存在正实数x，使得不等式$\log_{27}x-k\cdot 3^{kx-1}\ge 0$成立，则$k$的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{e\ln 3}$　　B．$\frac{\ln 3}{e}$　　C．$\frac{e}{\ln 3}$　　D．$\frac{\ln 3}{2}$

【题型四】 恒成立求参：移项讨论型

【典例分析】

若$x\in\left(0,1\right]$，$mx-x\ln x\le m$恒成立，则实数m的取值范围为（　　）

A．$\left[1,+\infty\right)$　　B．$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C．$\left[2,+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,1\right]$

【变式演练】

1.若关于x的不等式$e^{x-a}\ge \ln x+a$对一切正实数x恒成立，则实数a的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$　　B．$\left(-\infty,e\right]$　　C．$\left(-\infty,1\right]$　　D．$\left(-\infty,2\right]$

2.已知函数$f\left(x\right)=xe^{x}-\frac{1}{3}ax^{3}-\frac{1}{2}ax^{2}+1$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，若$f\left(x\right)$有最小值，则实数$a$的取值范围是

A．$\left[e,+\infty\right)$　　B．$\left(e,+\infty\right)$　　C．$\left[\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$　　D．$\left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$

3. 已知函数$f\left(x\right)=\left(x-a-1\right)e^{x}+b$，若存在$b\in R$，对于任意$x\in\left[1,2\right]$，都有$\left|f\left(x\right)\right|<\frac{e}{2}$，则实数$a$的取值范围是________.

【题型五】 恒成立求参：代入消参型（虚设根型）

【典例分析】

设实数$\lambda>0$，若对任意$x\in\left(0,+\infty\right)$，不等式$\frac{e^x}{\lambda}-\ln\left(\lambda x\right)\geq 0$恒成立，则$\lambda$的取值范围是（　　）

A．$0<\lambda\leq\frac{1}{e}$　　B．$0<\lambda\leq e-1$　　C．$0<\lambda\leq e$　　D．$0<\lambda\leq e^2$

【变式演练】

1.已知函数$f\left(x\right)=x^2-\ln\left(1+x\right)-\ln\left(a-x\right)$有唯一零点，则$a=$（　　）

A．0　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

2.已知函数$f(x)=xe^{2x}-1$，不等式$f(x)\geq mx+\ln x$对任意$x\in(0,+\infty)$恒成立，则实数m的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,2]$　　B．$[0,2]$　　C．$\left(-\infty,\mathrm{e}^2-1\right]$　　D．$\left[0,e^2-1\right]$

3.若对任意$x\in$（0，+∞），不等式e^{2x-} $m\ln$（$2m$）﹣$m\ln x\geq 0$恒成立，则实数m的最大值（　　）

A．$\sqrt{e}$　　B．e　　C．$2e$　　D．e^2

【题型六】 恒成立求参：构造函数

【典例分析】

已知函数$f\left(x\right)=\frac{1-2\ln x}{x^2}$的定义域为$\left(0,\frac{1}{e}\right]$，若对任意的$x_1,x_2\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$，$\left|\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}\right|>\frac{m\left(x_1+x_2\right)}{x_1^2x_2^2}$恒成立，则实数$m$的取值范围为（　　）

A．$\left(-\infty,3\right]$　　B．$\left(-\infty,4\right]$　　C．$\left(-\infty,5\right]$　　D．$(-\infty,6]$

【变式演练】

1.已知函数$f(x)=(a\mathrm{e}^x+\mathrm{e}x)(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}x)$与$g(x)=\mathrm{e}^{2x}$的图象恰有三个不同的公共点（其中e为自然对数的底数），则实数a的取值范围是（　　）

A．$\left(-\frac{1}{2},1\right)$　　B．$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　C．$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$　　D．$(1,\sqrt{2})$

2.对于任意x_1，$x_2 \in [1,+\infty)$，当$x_2 > x_1$时，恒有$a\ln\frac{x_2}{x_1} < 2(x_2 - x_1)$成立；则实数$a$的取值范围是（　）

A．$(-\infty,0]$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$(-\infty,2]$　　D．$(-\infty,3]$

3.已知函数$f(x)$满足$e^x\left(f'(x)+2f(x)\right)=\sqrt{x}, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2e}}$，若对任意正数$a,b$都有$f\left(3^x-2^x-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{a^2e^2}+\frac{1}{64b^2}+\frac{ab}{8}$，则$x$的取值范围是

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-\infty,0)$　　C．$(0,1)$　　D．$(1,+\infty)$

【题型七】　恒成立求参：分离参数（常规）

【典例分析】

设函数$f(x)=x^2+x-\frac{ax}{x+1}+\frac{16x}{(x+1)^2}$，若$x>0$时，$f(x)>0$，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$(0,+\infty)$　　B．$(-\infty,12)$　　C．$(-\infty,0)$　　D．$(12,+\infty)$

【变式演练】

1.不等式$x^{-3}e^x-a\ln x \ge x+1$对任意$x\in(1,+\infty)$恒成立，则实数a的取值范围

A．$(-\infty,1-e]$　　B．$(-\infty,2-e^2]$　　C．$(-\infty,-2]$　　D．$(-\infty,-3]$

2.已知函数$f(x)=e^{x-1}+x\ln x-x^2-ax$满足$f(x)\ge 0$恒成立，则实数$a$的取值范围是____.

3.已知函数$f(x)=\frac{1}{e}xe^x-\ln x-ax$，若对于任意$x\in(0,+\infty)$，不等式$f(x)\ge 0$恒成立，则实数$a$的最大值为________.

【题型八】　恒成立求参：分离参数（洛必达法则）

【典例分析】

若$\frac{1}{2}(a-1)x^2+1<e^x-x$对$\forall x>0$恒成立，则实数$a$的取值范围是

A．$(-\infty,2]$　　B．$(-\infty,2)$　　C．$(-\infty,1]$　　D．$(-\infty,3]$

变式演练】

1.已知函数 $f(x)=x^2\ln x-a(x^2-1)$ (a∈R),若 $f(x)\ge 0$ 在 x∈(0,1］ 时恒成立,则实数 a 的取值范围是

A．$[\frac{\sqrt{2}}{4},+\infty)$　　B．$[\frac{1}{2},+\infty)$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

2.若对任意 $x\in(0,\pi)$，不等式 $e^x-e^{-x}>a\sin x$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是

A．$[-2,2]$　　B．$(-\infty,e]$　　C．$(-\infty,2]$　　D．$(-\infty,1]$

【题型九】 恒成立求参：倍函数

【典例分析】

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若满足条件：存在 $[m,n]\subseteq D$，使 $f(x)$ 在 $[m，n]$ 上的值域为 $[km，kn]$（$k\in\mathbf{R}$ 且 $k>0$），则称 $f(x)$ 为“k 倍函数”，若函数 $f(x)=a^x$ $(a>1)$ 为“3 倍函数”，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(1,e^{\frac{3}{e}}\right)$　　B．$\left(1,e^3\right)$　　C．$\left(e^{\frac{2}{e}},e\right)$　　D．$\left(e,e^3\right)$

【变式演练】

1.若存在 $x_1,x_2\in[a,b]$ 且 $x_1\ne x_2$，使 $|g(x_1)-g(x_2)|>L|f(x_1)-f(x_2)|$ 成立，则在区间 $[a,b]$ 上，称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的“倍函数”．设 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\dfrac{x}{2\ln x+1}$，若在区间 $\left[\sqrt{e},e\right]$ 上，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的“倍函数”，则实数 L 的取值范围为（　　）

A．$\left(-\infty,\frac{e}{9}\right]$　　B．$\left(-\infty,\frac{e}{9}\right)$

C．$(-\infty,e]$　　D．$(-\infty,e)$

2..对于函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[a，b]$，当 $x\in[a，b]$ 时的值域为 $[ka，kb](k>0)$，则称 $y=f(x)$ 为 k 倍值函数.若 $f(x)=e^x+3x$ 是 k 倍值函数，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(e+\frac{1}{e}，+\infty)$　　B．$(e+\frac{2}{e}，+\infty)$

C．$(e+2，+\infty)$　　D．$(e+3，+\infty)$

3.如果存在x_1，$x_2\in[a,b]$且$x_1\neq x_2$，使$\left|g(x_1)-g(x_2)\right|>L\left|f(x_1)-f(x_2)\right|$成立，则在区间$[a,b]$上，称$g(x)$为$f(x)$的“倍函数”．设$f(x)=\ln x$，$g(x)=\dfrac{x}{2\ln x+1}$，若在区间$\left[\sqrt{e},e\right]$上，$g(x)$为$f(x)$的“倍函数”，则实数$L$的取值范围为______.

【题型十】 恒成立求参：双函数最值型

【典例分析】

已知函数$f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}+1$，$g(x)=\dfrac{a}{x}+x\ln x$，对任意的$m\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},3\right]$，总存在$n\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},3\right]$使得$g(m)\ldots f(n)$成立，则$a$的范围为_________.

【变式演练】

1.已知$f(x)=xe^x+\dfrac{1}{e}+e^2$，$g(x)=-(x+1)^2+a\ln(x+1)$，若存在$x_1\in R$，$x_2\in(-1,+\infty)$，使得$f(x_1)\leq g(x_2)$成立，则实数$a$的取值范围是______.

2.已知$f(x)=\ln x-\dfrac{x}{4}+\dfrac{3}{4x}$，$g(x)=-x^2-2ax+4$，若对任意的$x_1\in(0,2]$，存在$x_2\in[1,2]$，使得$f(x_1)\geq g(x_2)$成立，则$a$的取值范围是(　　)

A. $\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right)$　　B. $\left[-\dfrac{1}{8},+\infty\right)$　　C. $\left[-\dfrac{1}{8},\dfrac{5}{4}\right]$　　D. $\left(-\infty,-\dfrac{5}{4}\right]$

3.已知函数$f(x)=2ax^3-3ax^2+1,g(x)=-\dfrac{a}{4}x+\dfrac{3}{2}$，若任意给定的$x_0\in[0,2]$，总存在两个不同的$x_i(i=1,2)\in[0,2]$，使得$f(x_i)=g(x_0)$成立，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　D．$[-1,1]$

【题型十一】 数列与导数：

【典例分析】

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$，记$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$T_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,n\in\mathbf{N}^*$，则下列结论正确的是（　　）

A．$a_n<\dfrac{15}{16}$　　　B．$2a_{n+1}-a_n-1\ge 0$　　　C．$S_n<\dfrac{5}{6}n$　　　D．$2S_n-T_n\le n$

【变式演练】

1.已知数列$\{a_n\}\{b_n\}\{c_n\}\{d_n\}$满足：$a_n=n^n,b_n=n!,c_n=n^{\frac{1}{n}},d_n=\dfrac{1}{n}$.则对于任意正整数$n$>100，有（　　）

A．$a_{2n}-a_n<b_{2n}-b_n$

B．$b_{2n}-b_n<c_{2n}-c_n$

C．$c_{2n}-c_n<d_{2n}-d_n$

D．$a_{2n}-a_n<d_{2n}-d_n$

2.已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n^2+1}$，满足$a_1\in(0,1)$，$a_1+a_2+\cdots+a_{2021}=2020$，则下列成立的是（　　）

A．$\ln a_1\cdot\ln a_{2021}>\dfrac{1}{2020}$

B．$\ln a_1\cdot\ln a_{2021}=\dfrac{1}{2020}$

C．$\ln a_1\cdot\ln a_{2021}<\dfrac{1}{2020}$

D．以上均有可能

3.设$a,b\in\mathbf{R}$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$，$a_n=\ln a_{n+1}+b\left(n\in N^*\right)$，则（　　）

A．若$b=-2$，则$a_{2020}>a$

B．若$b=-2$，则$a_{2020}<a$

C．若$b=2$，则$a_{2020}>a$

D．若$b=2$，则$a_{2020}<a$

【课后练习】

1.已知函数$f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$，若关于x的不等式$f^2(x)+af(x)>0$恰有两个整数解，则实数a的取值范围是

A．$(-\dfrac{1+\ln 2}{2},-\dfrac{1+\ln 3}{3}]$

B．$[\dfrac{1+\ln 3}{3},\dfrac{1+\ln 2}{2})$

C．$(-\dfrac{1+\ln 2}{2},-\dfrac{1+\ln 3}{3})$

D．$(-1,-\dfrac{1+\ln 3}{3}]$

2.已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e\ln x},x>1,\\5-2x-x^2,x\le 1,\end{cases}$若函数$y=[f(x)]^2+(2-4a)f(x)+1$恰有5个零点，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\left[\dfrac{9}{8},\dfrac{49}{24}\right)$

B．$\left(1,\dfrac{49}{24}\right)$

C．$\left(1,\dfrac{9}{8}\right]$

D．$\left[\dfrac{9}{8},+\infty\right)$

3.已知$f(x)=x^3-3a^2x-a$，若存在$x\in[-1,1]$，使得$f(x)\ge 0$成立，则实数a的取值范围为__________.

4.已知函数$f(x)=xe^x-2a(\ln x+x)$有两个零点，则a的最小整数值为（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

5.若对任意$x\in(0,+\infty)$，不等式$2e^{2x}-a\ln a-a\ln x\ge 0$恒成立，则实数$a$的最大值为（　　）

A．$\sqrt{e}$　　B．e　　C．$2e$　　D．e^2

6.不等式$ax+1+lnx\le xe^x$对于定义域内的任意x恒成立，则a的取值范围为__________.

7.设函数$h(x)$的定义域为D，若满足条件：存在$[a,b]\subseteq D$，使$h(x)$在$[a,b]$上的值域为$[2a,2b]$，则称$h(x)$为'倍胀函数".若函数$f(x)=\ln x+t$为"倍胀函数"，则实数t的取值范围是________.

8.对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，不等式$(1+\frac{1}{n})^n\le e(\frac{n}{n+1})^a$（其中$e$是自然对数的底）恒成立，则$a$的最大值为（　　）

A．$\ln 2-1$　　B．$\dfrac{1}{\ln 2}-1$　　C．$\ln 3-1$　　D．$\dfrac{1}{\ln 3}-1$

9.数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$a_1+3a_2+3^2a_3+\dots+3^{n-1}a_n=\dfrac{n}{3}$，$(n\in N^*)$，$b_n=\dfrac{3^n}{n}\cdot a_n$，若$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则下列选项正确的是（　　）

A．$ln2018>S_{2017}$

B．$S_{2018}>ln2018+1$

C．$ln2018<S_{1009}-1$

D．$S_{2018}-1<\ln 2018$

10. 已知函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}, g(x)=\frac{e^x}{x}$，若存在实数 x_1, x_2 使得 $f\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)=m$，则 m 的取值范围是__________；若 $x_2<0$，则 $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 e^{g\left(x_2\right)}$ 的最大值是__________.

第 8 讲　导数和函数压轴小题 11 类

【题型一】 整数解

【典例分析】

在关于x的不等式$e^2x^2-\left(ae^x+4e^2\right)x+ae^x+4e^2>0$（其中e=2.71828… 为自然对数的底数）的解集中，有且仅有两个大于 2 的整数，则实数a的取值范围为（　　）

A. $\left(\frac{16}{5e^4},\frac{1}{2e}\right]$　　**B.** $\left[\frac{9}{4e^2},\frac{1}{2e}\right)$

C. $\left(\frac{16}{5e^4},\frac{4}{3e^2}\right]$　　**D.** $\left[\frac{9}{4e^2},\frac{4}{3e^2}\right)$

【答案】D

【分析】将不等式转化为$e^2\left(x-2\right)^2>a\left(x-1\right)e^x$，分别研究两个函数的性质，确定$a$的取值范围，构造函数，利用放缩法进一步缩小$a$的取值范围，列出不等式组，求出结果.

【详解】由$e^2x^2-\left(ae^x+4e^2\right)x+ae^x+4e^2>0$，化简得：$e^2\left(x-2\right)^2>a\left(x-1\right)e^x$，

设$f\left(x\right)=e^2\left(x-2\right)^2$，$g\left(x\right)=a\left(x-1\right)e^x$，则原不等式即为$f\left(x\right)>g\left(x\right)$.若$a\le0$，则当$x>2$时，$f\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)<0$，

$\therefore$原不等式的解集中有无数个大于 2 的整数，$\therefore a>0$.$\because f\left(2\right)=0$，$g\left(2\right)=ae^2>0$，$\therefore f\left(2\right)<g\left(2\right)$.

当$f\left(3\right)\le g\left(3\right)$，即$a\ge\frac{1}{2e}$时，设$h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)\left(x\ge4\right)$，则$h'\left(x\right)=2e^2\left(x-2\right)-axe^x\le2e^2\left(x-2\right)-\frac{xe^x}{2e}$.

设$\varphi\left(x\right)=2e^2\left(x-2\right)-\frac{xe^x}{2e}\left(x\ge4\right)$，则$\varphi'\left(x\right)=2e^2-\frac{\left(x+1\right)e^x}{2e}$在$\left[3,+\infty\right)$单调递减，所以$\varphi'\left(x\right)=2e^2-\frac{\left(x+1\right)e^x}{2e}\le\varphi'\left(3\right)=0$，所以$\varphi\left(x\right)=2e^2\left(x-2\right)-\frac{xe^x}{2e}$在$\left[4,+\infty\right)$单调递减，$\therefore$ $\varphi\left(x\right)\le\varphi\left(4\right)=2e^2\left(2-e\right)<0$，

$\therefore$当$x\ge4$时，$h'\left(x\right)<0$，$\therefore h\left(x\right)$在$\left[4,+\infty\right]$上为减函数，即$h\left(x\right)\le h\left(4\right)=4e^2-3ae^4\le e^2\left(4-\frac{3e}{2}\right)<0$，

$\therefore$当$x\ge4$时，不等式$f\left(x\right)<g\left(x\right)$恒成立，$\therefore$原不等式的解集中没有大于 2 的整数.

$\therefore$ 要使原不等式的解集中有且仅有两个大于 2 的整数，则$\begin{cases} f(3) > g(3) \\ f(4) > g(4) \\ f(5) \le g(5) \end{cases}$，即$\begin{cases} e^2 > 2ae^3 \\ 4e^2 > 3ae^4 \\ 9e^2 \le 4ae^5 \end{cases}$，解得

$\frac{9}{4e^2} \le a < \frac{4}{3e^2}$.

则实数 a 的取值范围为$\left[\frac{9}{4e^2}, \frac{4}{3e^2}\right)$.故选：D

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=a(x+1)e^x-x$，若存在唯一的正整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{1}{2e}, \frac{3}{4e^3}\right)$　　**B.** $\left[\frac{3}{4e^3}, \frac{2}{3e^2}\right)$　　**C.** $\left[\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{2e}\right)$　　**D.** $\left[\frac{1}{2e}, \frac{1}{2}\right)$

【答案】C

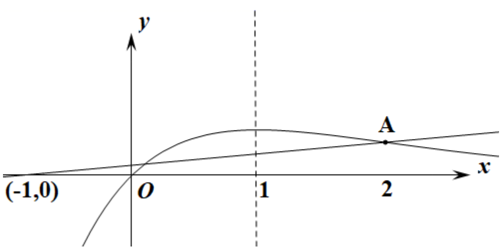
【分析】

题意等价于存在唯一的正整数 x_0 使得不等式 $a(x+1)<\frac{x}{e^x}$ 成立，求出函数 $g(x)=\frac{x}{e^x}$ 的单调区间，直线 $y=a(x+1)$ 过定点 $(-1,0)$，作出函数 $g(x)=\frac{x}{e^x}$ 和直线 $y=a(x+1)$ 图像，结合图形列出不等式组化简即可.

解：函数 $f(x)=a(x+1)e^x-x$，若存在唯一的正整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$。等价于存在唯一的正整数 x_0，使得不等式 $a(x+1)<\frac{x}{e^x}$ 成立，令 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，由 $g'(x)>0$ 得 $x<1$，由 $g'(x)<0$ 得 $x>1$

所以函数 $g(x)=\frac{x}{e^x}$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上递减。所以 $g(x)_{\max}=g(1)=\frac{1}{e}$，

直线 $y=a(x+1)$ 过定点 $(-1,0)$，作出函数 $g(x)=\frac{x}{e^x}$ 和直线 $y=a(x+1)$ 图像如下：



由图可得要使存在唯一的正整数 x_0 使得不等式 $a(x+1)<\frac{x}{e^x}$ 成立

必有$\begin{cases} 2a<\frac{1}{e} \\ (2+1)a \ge \frac{2}{e^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3e^2} \le a < \frac{1}{2e}$ 所以实数 a 的取值范围是$\left[\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{2e}\right)$

故选：C.

2.已知偶函数 $f(x)$ 满足 $f(3+x)=f(3-x)$，且当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$，若关于 x 的不等式 $f^2(x)-tf(x)>0$ 在 $[-150,150]$ 上有且只有 150 个整数解，则实数 t 的取值范围是（　　）

A． $\left(0,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$　　**B．** $\left[e^{-\frac{1}{2}},3e^{-\frac{3}{2}}\right)$　　**C．** $\left(3e^{-\frac{3}{2}},2e^{-1}\right)$　　**D．** $\left(e^{-\frac{1}{2}},2e^{-1}\right)$

【答案】B

【分析】

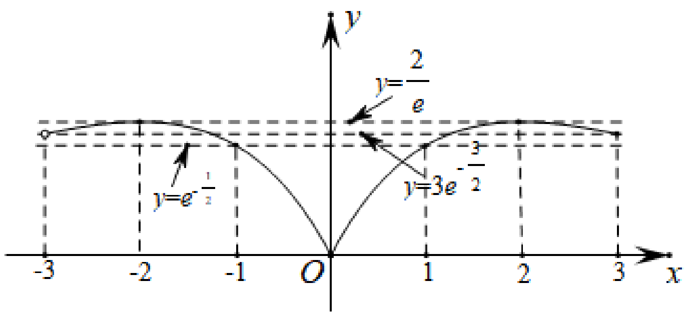
根据偶函数 $f(x)$ 满足 $f(3+x)=f(3-x)$，得到函数 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数，由 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$，用导数法结合偶函数，作出数 $f(x)$ 在 $(-3,3]$ 上的图象，将不等式 $f^2(x)-tf(x)>0$ 在 $[-150,150]$ 上有且只有 150 个整数解，转化为在一个周期 $(-3,3]$ 上 $f(x)>t$ 有 3 个整数解分别为-2，2，3 求解.

【详解】因为偶函数 $f(x)$ 满足 $f(3+x)=f(3-x)$，所以 $f(6-x)=f(x)=f(-x)$，即 $f(6+x)=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数，当 $x\in[0,3]$ 时，$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$，所以 $f'(x)=e^{-\frac{x}{2}}(1-\frac{x}{2})$，

当 $0\le x<2$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 递增；当 $2<x\le 3$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 递减；

当当 $x=2$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值 $f(x)=\frac{2}{e}$，作出函数 $f(x)$ 在 $(-3,3]$ 上的图象，如图所示：



因为不等式 $f^2(x)-tf(x)>0$ 在 $[-150,150]$ 上有且只有 150 个整数解，

所以不等式 $f^2(x)-tf(x)>0$ 在 $(-3,3]$ 上有且只有 3 个整数解，

当 $f(x)=0$ 时，不符合题意，故不等式 $f(x)>t$ 在 $(-3,3]$ 上有且只有 3 个整数解，

因为$f\left(1\right)=e^{-\frac{1}{2}},f\left(3\right)=3e^{-\frac{3}{2}}$，所以$\dfrac{f\left(3\right)}{f\left(1\right)}=\dfrac{3}{e}>1$，即$f\left(1\right)<f\left(3\right)$，

故不等式$f\left(x\right)>t$在$(-3,3]$上的 3 个整数解分别为-2，2，3，

所以，$f\left(1\right)<t<f\left(3\right)$，即$e^{-\frac{1}{2}}<t<3e^{-\frac{3}{2}}$，故选：B

3.已知对任意实数$k>1$，关于x的不等式$k\left(x-a\right)>\dfrac{2x}{e^x}$在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立，则$a$的最大整数值为

A．0　　　　　**B．**-1　　　　　**C．**-2　　　　　**D．**-3

【答案】B

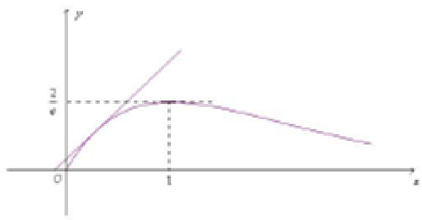
【详解】令$f\left(x\right)=\dfrac{2x}{e^x}\left(x>0\right)$，依题意，对任意$k>1$，当$x>0$时，$y=f\left(x\right)$图象在直线$y=k\left(x-a\right)$下方，∴

e^-

$f'\left(x\right)=\dfrac{2\left(1-x\right)}{e^x}$列表

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↑	$\frac{2}{e}$	↓

$y=f\left(x\right)$得的大致图象



则当$a=0$时，$\because f'\left(0\right)=2$，∴当$1<k<2$时不成立；

当$a=-1$时，设$y=k_0\left(x+1\right)$与$y=f\left(x\right)$相切于点$\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$.

则$k_0=\dfrac{2\left(1-x_0\right)}{e^{x_0}}=\dfrac{f\left(x_0\right)}{x_0+1}\Leftrightarrow 1-{x_0}^2=x_0$，解得$x_0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\in\left(0,1\right)$.

$\therefore k_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}<\dfrac{1}{\sqrt{e}}<1$，故成立，∴当$a\in Z$时，$a_{\max}=-1$.故选 B.

【题型二】 零点

【典例分析】

已知函数 $f\left(x\right)=\left(x^{2}-2x\right)e^{x}$，若方程 $f\left(x\right)=a$ 有 3 个不同的实根 x_1，x_2，x_3（$x_1<x_2<x_3$），则 $\dfrac{a}{x_2-2}$ 的取值范围是（　　）

A. $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}},0\right)$　　**B.** $\left(-\dfrac{1}{e},0\right)$　　**C.** $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}},\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$　　**D.** $\left(0,\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\right)$

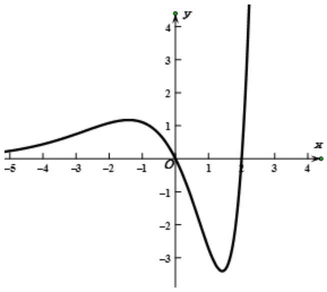
【答案】B

【分析】对 $f\left(x\right)$ 求导，利用 $f\left(x\right)$ 的图像求得 x_2 的范围，以及 a 与 x_2 的关系，将问题转化为关于 x_2 的函数值域的问题进行处理即可.

【详解】因为 $f\left(x\right)=\left(x^{2}-2x\right)e^{x}$，故可得 $f'\left(x\right)=e^{x}\left(x^{2}-2\right)$，令 $f'\left(x\right)=0$，解得 $x=\pm\sqrt{2}$，

故可得 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 单调递减，在 $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ 单调递增.

又 $f\left(-\sqrt{2}\right)=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$，$f\left(\sqrt{2}\right)=\left(2-2\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}}$，且当 x 趋近于负无穷时，$f\left(x\right)$ 趋近于零，故 $f\left(x\right)$ 的图象如下所示：



故若方程 $f\left(x\right)=a$ 有 3 个不同的实根，则 $a\in\left(0,\dfrac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$，又因为 $f\left(x_2\right)=\left(x_2^{2}-2x_2\right)e^{x_2}=a$，$x_2\in\left(-\sqrt{2},0\right)$

故 $\dfrac{a}{x_2-2}=\dfrac{\left(x_2^{2}-2x_2\right)e^{x_2}}{x_2-2}=x_2e^{x_2}$，不妨令 $h\left(x\right)=xe^{x},x\in\left(-\sqrt{2},0\right)$，则 $h'\left(x\right)=e^{x}\left(x+1\right)$，令 $h'\left(x\right)=0$，解得 $x=-1$，

容易知 $h\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\sqrt{2},-1\right)$ 单调递减，在 $\left(-1,0\right)$ 单调递增.故可得 $h\left(x\right)_{min}=h\left(-1\right)=-\dfrac{1}{e}$，又 $h\left(-\sqrt{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$ $<h\left(0\right)=0$ 故可得 $h\left(x\right)<0$，则 $h\left(x\right)\in\left[-\dfrac{1}{e},0\right)$，即 $\dfrac{a}{x_2-2}\in\left[-\dfrac{1}{e},0\right)$.故选：B

【变式演练】

1.已知 $f\left(x\right)=ax^{3}-3x^{2}+1$，若 $f\left(x\right)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 *a* 的取值范围是（　　）

A. $\left(2,+\infty\right)$　　**B.** $\left(-\infty,-2\right)$　　**C.** $\left(1,+\infty\right)$　　**D.** $\left(-\infty,1\right)$

【答案】B

【分析】

分类讨论：当$a\geq 0$时，容易判断出不符合题意；当$a<0$时，求出函数的导数，利用导数和极值之间的关系转化为求极小值$f\left(\frac{2}{a}\right)>0$，解出即可.

解：当$a=0$时，$f(x)=-3x^2+1=0$，解得$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，函数$f(x)$有两个零点，不符合题意，应舍去；

当$a>0$时，令$f'(x)=3ax^2-6x=3ax\left(x-\frac{2}{a}\right)=0$，解得$x=0$或$x=\frac{2}{a}>0$，列表如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{2}{a}\right)$	$\frac{2}{a}$	$\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$
$f'($	+	0	-	0	+
$f($	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

$\because x\to-\infty$，$f(x)\to-\infty$，而$f(0)=1>0$，

$\therefore$存在$x<0$，使得$f(x)=0$，

不符合条件：$f(x)$存在唯一的零点x_0，且$x_0>0$，应舍去，

当$a<0$时，$f'(x)=3ax^2-6x=3ax\left(x-\frac{2}{a}\right)=0$，

解得$x=0$或$x=\frac{2}{a}<0$，

列表如下：

x	$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)$	$\frac{2}{a}$	$\left(\frac{2}{a},0\right)$	0	$(0,+\infty)$
$f'($	-	0	+	0	-
$f($	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

而$f(0)=1>0$，$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$，$\therefore$存在$x_0>0$，使得$f(x_0)=0$，

$\because f\left(x\right)$存在唯一的零点x_0，且$x_0>0$，$\therefore$极小值$f\left(\frac{2}{a}\right)=a(\frac{2}{a})^3-3(\frac{2}{a})^2+1>0$，化为$a^2>4$，

$\because a<0$，$\therefore a<-2$，综上可知：a的取值范围是$\left(-\infty,-2\right)$．故选: B．

2.已知函数$f(x)=\frac{x-2m}{3x^2}(m<0),g(x)=\frac{2\ln(-x)}{x}$，设方程$f(g(x))+\frac{1}{m}=0$的3个实根分别为$x_1,x_2,x_3$，且$x_1<x_2<x_3$，则$g\left(x_1\right)+2g\left(x_2\right)+3g\left(x_3\right)$的值可能为（　　）

A． $-\frac{2}{\mathrm{e}}$　　**B．** $\frac{2}{\mathrm{e}}$　　**C．** $-\frac{3}{\mathrm{e}}$　　**D．** $\frac{3}{\mathrm{e}}$

【答案】B

【分析】

利用导数研究$g(x)$的单调性、极值及区间值域，由题设可知$3x^2+mx-2m^2=0$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上必有两个不等的实根$t_1,t_2$(假设$t_1>t_2$)且$t_1=-m,t_2=\frac{2m}{3}$，结合$g(x)$的性质有$-\frac{2}{\mathrm{e}}<\frac{2m}{3}<0$且$t_2=g(x_1)=g(x_2)$，$t_1=g(x_3)$，进而求目标式的值，即可确定答案.

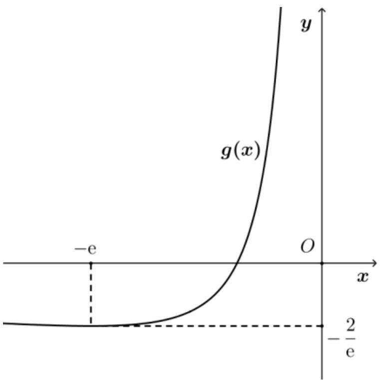
【详解】

由题设，$g(x)=\frac{2\ln(-x)}{x}$的定义域为$(-\infty,0)$，且$g'(x)=\frac{2[1-\ln(-x)]}{x^2}$，

$\therefore$当$x\in(-\infty,-\mathrm{e})$时，$g'(x)<0$，即$g(x)$递减；当$x\in(-\mathrm{e},0)$时，$g'(x)>0$，即$g(x)$递增.

$\therefore g(x)\ge g(-\mathrm{e})=-\frac{2}{\mathrm{e}}$，又$x$在$(-\infty,-\mathrm{e})$上逐渐变小时$g(x)$逐渐趋近于0，当$-1<x<0$时$g(x)>g(-1)=0$且随$x$趋向于0，$g(x)$趋向无穷大.

$\therefore g(x)$的图象如下：



$\because f(x)$的定义域为$\{x\,|\,x\ne0\}$，由$f(x)+\frac{1}{m}=0$可得：$3x^2+mx-2m^2=0$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上必有两个不等的实根$t_1,t_2$(假设$t_1>t_2$)且$t_1=-m,t_2=\frac{2m}{3}\ (m<0)$，

$\therefore$令$t=g(x)$，要使$f(t)+\frac{1}{m}=0$的3个实根，则$t_1\in[0,+\infty)$、$t_2\in(-\frac{2}{\mathrm{e}},0)$，即$-\frac{2}{\mathrm{e}}<\frac{2m}{3}<0$，可得$-\frac{3}{\mathrm{e}}<m<0$.

$\therefore$由 $x_1 < x_2 < x_3$ 知：$t_2 = g(x_1) = g(x_2)$，$t_1 = g(x_3)$，$\therefore g(x_1) + 2g(x_2) + 3g(x_3) = 3(t_1 + t_2) = -m \in (0, \frac{3}{e})$.故选：B.

3.已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$，对于正实数 a，若关于 t 的方程 $f(t) = f\left(\frac{a}{t}\right)$ 恰有三个不同的正实数根，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(1,8)$　　**B.** $(e^2,8)$　　**C.** $(8,+\infty)$　　**D.** $(e^2,+\infty)$

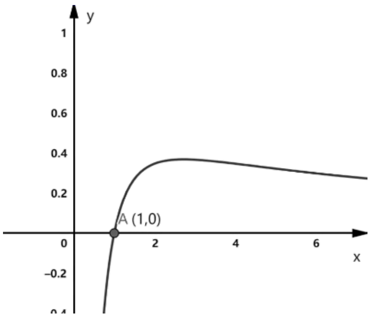
【答案】D

【分析】

研究 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图像可知，若 $f(t) = f\left(\frac{a}{t}\right)$，令 $x_1 = t, x_2 = \frac{a}{t}$，则 $f(x_1) = f(x_2)$，且 $x_1, x_2 > 1$，可以推出，$x_1 = x_2$ 或 $x_1x_2 = a$，通过对数不等式写出关于 x_1x_2 的不等式，即可求出 a 的范围

【详解】

因为 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$，$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$，令 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$ 得：$0 < x < e$；令 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0$ 得：$x > e$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,e)$ 单调递增，在 $(e,+\infty)$ 单调递减，且 $x \to \infty$ 时，$f(x) > 0$ 恒成立，$f(x)$ 的图像如下：



令 $x_1 = t, x_2 = \frac{a}{t}$，则 $f(x_1) = f(x_2)$，且 $x_1, x_2 > 1$

①当 $x_1 = x_2$ 时，$t = \frac{a}{t}, t = \sqrt{a}$，成立，所以 $\sqrt{a}$ 是方程的一个实数根

②当 $x_1 \neq x_2$ 时，由 $f(x_1) = f(x_2)$ 得：$\frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2}$，令 $\frac{\ln x_1}{x_1} = \frac{\ln x_2}{x_2} = m$

则：$\begin{cases} mx_1 = \ln x_1 \\ mx_2 = \ln x_2 \end{cases}$，两式相减得：$m = \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2}$，两式相加得：$m = \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{x_1 + x_2}$

所以：$\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = \frac{x_1 + x_2}{\ln x_1 + \ln x_2}$，由对数均值不等式得：$\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$

所以：$\frac{x_1 + x_2}{\ln x_1 + \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$，且 $x_1, x_2 > 1$，所以 $\ln x_1x_2 > 2$，$x_1x_2 > e^2$，即：$t \cdot \frac{a}{t} = a > e^2$

所以 $a > e^2$　故选：D

【题型三】 同构

【典例分析】

定义：设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上的导函数为 $f'(x)$，若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上也存在导函数，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上存在二阶导函数，简记为 $y=f''(x)$.若在区间 (a,b) 上 $f''(x)>0$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上为“凹函数”.已知 $f(x)=me^x+\frac{(x+1)^2}{4}[1+2\ln m-2\ln(x+1)]+x$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上为“凹函数”，则实数 m 的取值范围为（　　）

A． $(1,+\infty)$　　**B．** $(\sqrt{e},+\infty)$　　**C．** $(e,+\infty)$　　**D．** $(\sqrt{e},e)$

【答案】A

【分析】

根据题中“凹函数”的定义，$f''(x)=me^x+\ln m-\ln(x+1)-1>0$ 对任意 $x\in(-1，+\infty)$都成立，

同构为 $e^{x+\ln m}+(x+\ln m)>e^{\ln(x+1)}+\ln(x+1)$，利用 $g(x)=e^x+x$ 在$(-\infty，+\infty)$是增函数，得不等式

$\ln m>h(x)=\ln(x+1)-x$ 的最大值，求出 $g(x)=\ln(x+1)-x$ 的最大值，即可得解.

解：因为 $f(x)=me^x+\frac{(x+1)^2}{4}[1+21nm-21n(x+1)]+x$

所以 $f'(x)=me^x+(x+1)[\ln m-\ln(x+1)]+1$，$f''(x)=me^x+\ln m-\ln(x+1)-1$，

因为 $f(x)=me^x+\frac{(x+1)^2}{4}[1+21nm-21n(x+1)]+x$ 在区间$(-1，+\infty)$上为“凹函数”，

所以 $f''(x)=me^x+\ln m-\ln(x+1)-1>0$ 对任意 $x\in(-1，+\infty)$都成立，因为

$me^x+\ln m-\ln(x+1)-1>0\Leftrightarrow me^x+\ln m>\ln(x+1)+1$

$\Leftrightarrow e^{x+\ln m}+(x+\ln m)>\ln(x+1)+(x+1)\Leftrightarrow e^{x+\ln m}+(x+\ln m)>e^{\ln(x+1)}+\ln(x+1)$，且 $g(x)=e^x+x$ 在$(-\infty，+\infty)$是增函数，

所以 $e^{x+\ln m}+(x+\ln m)>e^{\ln(x+1)}+\ln(x+1)\Leftrightarrow x+\ln m>\ln(x+1)\Leftrightarrow \ln m>\ln(x+1)-x$，

由题意，$\ln m>h(x)=\ln(x+1)-x$ 的最大值，$g(x)=\ln(x+1)-x$，$g'(x)=\frac{1}{x+1}-1$，$x\in(-1,0),g'(x)>0$，

$g(x)$ 单调递增；

$x\in(0,+\infty),g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$g(x)\le g(0)=0$，

即 $\ln m>0$，所以 $m>1$，故选：A

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=x-\ln(x+1)$，$g(x)=e^x-x-1$，若 $g(x)\ge kf(x)$ 对 $\forall x\in[0，+\infty)$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

解析：由题意得： $e^x-x-1\ge k[x-\ln(x+1)]$

右边式子凑 1 得 $e^x-x-1\ge k[x+1-\ln(x+1)-1]$

即 $e^x-x-1\ge k\left[e^{\ln(x+1)}-\ln(x+1)-1\right]$，因为 $x\ge\ln(x+1)$

当且仅当 $x=0$ 等号成立，所以满足 $k\le1$ 即可

当且仅当 $e^x-x-1=1$，即 $x=0$ 等号成立，所以 $k\le1$.

2.已知不等式 $xe^{x+1}-x\ge\ln x+2m+3$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 m 取值范围为（　　）

A．$m\le-\frac{1}{2}$　　B．$m\ge-\frac{1}{2}$　　C．$m\le-2$　　D．$m>-2$

【答案】A

【分析】

将问题转化为 $xe^{x+1}-x-\ln x\ge2m+3$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，构造函数 $f(x)=xe^{x+1}-x-\ln x$，进而通过导数方法求出函数的最小值，即可得到答案.

【详解】

不等式 $xe^{x+1}-x\ge\ln x+2m+3$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 $xe^{x+1}-x-\ln x\ge2m+3$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，令

$f(x)=xe^{x+1}-x-\ln x(x>0)$，$f'(x)=(x+1)e^{x+1}-1-\frac{1}{x}=(x+1)\left(e^{x+1}-\frac{1}{x}\right)$，而 $g(x)=e^{x+1}-\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增（增+增），且 $\begin{cases}g(1)=e^2-1>0\\ g\left(\frac{1}{16}\right)=e^{\frac{17}{16}}-16<0\end{cases}$，所以 $\exists x_0\in\left(\frac{1}{16},1\right)$（$x_0$ 唯一），使得 $g(x_0)=e^{x_0+1}-\frac{1}{x_0}=0$.

则 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0e^{x_0+1}-x_0-\ln x_0$

根据 $g(x_0)=e^{x_0+1}-\frac{1}{x_0}=0\Rightarrow\begin{cases}x_0e^{x_0+1}=1\\ \ln x_0=-(x_0+1)\end{cases}$，

所以 $f(x)_{\min}=1-x_0+(x_0+1)=2$，所以 $2\ge2m+3\Rightarrow m\le-\frac{1}{2}$.

3.设 $k>0$，若存在正实数 x，使得不等式 $\log_{27}x-k\cdot3^{kx-1}\ge0$ 成立，则 k 的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{e\ln3}$　　B．$\frac{\ln3}{e}$　　C．$\frac{e}{\ln3}$　　D．$\frac{\ln3}{2}$

【答案】A

【分析】化简 $\log_{27}x-k\cdot3^{kx-1}\ge0$ 得 $\log_3x\geqslant k3^{kx}$，从而 $x\log_3x\geqslant kx\cdot3^{kx}$，$3^{\log_3x}\cdot\log_3x\geqslant kx\cdot3^{kx}$，

构造函数 $f(x)=x\cdot3^x$，有单调性得 $\log_3x\geqslant kx>0$，再化简得 $k\leqslant\frac{\log_3x}{x}$，

再构造函数 $g(x)=\frac{\log_3x}{x}$，求 $g(x)=\frac{\log_3x}{x}$ 得最大值即可.

解：因为 $\log_{3^3}x\geqslant k3^{kx-1}$，所以 $\log_3x\geqslant k3^{kx}$，因为 $x>0$，所以 $x\log_3x\geqslant kx\cdot3^{kx}$，即 $3^{\log_3x}\cdot\log_3x\geqslant kx\cdot3^{kx}$，

设函数 $f(x)=x\cdot3^x$，$x>0$，$f'(x)=3^x+x\cdot3^x\cdot\ln3=3^x(1+x\cdot\ln3)>0$，所以函数 $f(x)=x\cdot3^x$ 在 $(0，+\infty)$ 为增函数，

所以 $\log_3 x \geqslant kx > 0$ 所以 $k \leqslant \frac{\log_3 x}{x}$，设函数 $g(x)=\frac{\log_3 x}{x}$， $g'(x)=\frac{\frac{1}{x\ln 3}\cdot x-\log_3 x}{x^2}=\frac{\frac{1}{\ln 3}-\frac{\ln x}{\ln 3}}{x^2}=\frac{1-\ln x}{\ln 3\cdot x^2}$，

所以函数 $g(x)=\frac{\log_3 x}{x}$ 在 $(0，\mathrm{e})$ 为增函数，在 $(\mathrm{e}，+\infty)$ 为减函数，所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{\log_3 e}{e}=\frac{1}{e\ln 3}$，

所以 k 的最大值为 $\frac{1}{\mathrm{e}\ln 3}$，故选：A.

【题型四】 恒成立求参：移项讨论型

【典例分析】

若 $x\in(0,1]$，$mx-x\ln x\le m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为（　　）

A． $[1,+\infty)$　　　　**B．** $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　　　**C．** $[2,+\infty)$　　　　**D．** $(-\infty,1]$

【答案】A

【分析】

把给定恒成立的不等式变形，构造函数 $f(x)=m(x-1)-x\ln x(0<x\le 1)$，利用导数探讨 $f(x)$ 的最大值不超过 0 即可作答.

【详解】

$\forall x\in(0,1]$， $mx-x\ln x\le m \Leftrightarrow m(x-1)-x\ln x\le 0$，

令 $f(x)=m(x-1)-x\ln x(0<x\le 1)$，则 $f'(x)=m-1-\ln x$，而 $\ln x\le 0$ 成立，

当 $m\ge 1$ 时， $f'(x)\ge 0$，即 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上递增，当 $x=1$ 时 $f(x)_{\max}=0$，

于是有当 $m\ge 1$ 时，恒有 $m(x-1)-x\ln x\le 0$，

当 $m<1$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=e^{m-1}$， $0<x<e^{m-1}$ 有 $f'(x)>0$， $e^{m-1}<x<1$ 有 $f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $[e^{m-1},1)$ 上递减，

当 $x\in[e^{m-1},1)$ 时， $f(x)>f(1)=0$，即 $m(x-1)-x\ln x>0$ 成立，不符合题意，

综上： $m\ge 1$，

所以实数 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

故选：A

【变式演练】

1.若关于x的不等式$e^{x-a}\geq \ln x+a$对一切正实数x恒成立，则实数a的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$　　**B.** $\left(-\infty,e\right]$　　**C.** $\left(-\infty,1\right]$　　**D.** $\left(-\infty,2\right]$

【答案】C

【分析】

构造函数$f(x)=e^{x-a}-lnx-a(x>0)$，将原不等式转化为求解函数$f(x)$的最小值，通过导数判断函数的单调性研究函数的最值，得到$e^{x_0-a}-lnx_0-a\geqslant 0$，再利用基本不等式进行求解即可．

【详解】

解：设$f(x)=e^{x-a}-lnx-a(x>0)$，则$f(x)\geqslant 0$对一切正实数x恒成立，即$f(x)_{min}\geqslant 0$，

由$f'(x)=e^{x-a}-\dfrac{1}{x}$，令$h(x)=e^{x-a}-\dfrac{1}{x}$，则$h'(x)=e^{x-a}+\dfrac{1}{x^2}>0$恒成立，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

当$x\to 0$时，$h(x)\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$h(x)\to+\infty$，则在$(0,+\infty)$上，存在x_0使得$h(x_0)=0$，

当$0<x<x_0$时，$h(x)<0$，当$x>x_0$时，$h(x)>0$，故函数$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0$，$+\infty)$上单调递增，

所以函数$f(x)$在$x=x_0$处取得最小值为$f(x_0)=e^{x_0-a}-lnx_0-a\geqslant 0$，

因为$e^{x_0-a}=\dfrac{1}{x_0}$，即$x_0-a=-lnx_0$，所以$\dfrac{1}{x_0}+x_0-a-a\geqslant 0$恒成立，即$2a\leqslant x_0+\dfrac{1}{x_0}$，

又$x_0+\dfrac{1}{x_0}\geqslant 2\sqrt{x_0\cdot\dfrac{1}{x_0}}=2$，当且仅当$x_0=\dfrac{1}{x_0}$，即$x_0=1$时取等号，故$2a\leqslant 2$，所以$a\leqslant 1$．故选：C．

2.已知函数$f\left(x\right)=xe^x-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}ax^2+1$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，若$f\left(x\right)$有最小值，则实数$a$的取值范围是

A. $\left[e,+\infty\right)$　　**B.** $\left(e,+\infty\right)$　　**C.** $\left[\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$　　**D.** $\left(\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$

【答案】C

【分析】

对函数 $y=f(x)$ 求导得出 $f'(x)=(x+1)(e^x-ax)$，由题意得出函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在极小值点，然后对参数 a 分类讨论，在 $a\le e$ 时，函数 $y=f(x)$ 单调递增，无最小值；在 $a>e$ 时，根据函数 $y=f(x)$ 的单调性得出 $f(x)_{极小值}\le f(0)$，从而求出实数 a 的取值范围.

【详解】

$\because f(x)=xe^x-\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}ax^2+1$，$\therefore f'(x)=(x+1)e^x-ax^2-ax=(x+1)(e^x-ax)$，

构造函数 $g(x)=e^x-ax$，其中 $x>0$，则 $g'(x)=e^x-a$.

①当 $a\le 1$ 时，对任意的 $x>0$，$g'(x)>0$，则函数 $y=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

此时，$g(x)>g(0)=1>0$，则对任意的 $x>0$，$f'(x)>0$.

此时，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最小值；

②当 $a>1$ 时，解方程 $g'(x)=e^x-a=0$，得 $x=\ln a$.

当 $0<x<\ln a$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>\ln a$ 时，$g'(x)>0$，

此时，$g(x)_{\min}=g(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)$.

（i）当 $1-\ln a\ge 0$ 时，即当 $1<a\le e$ 时，则对任意的 $x>0$，$f'(x)\ge 0$，

此时，函数 $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最小值；

（ii）当 $1-\ln a<0$ 时，即当 $a>e$ 时，$\therefore g(0)=1$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

由零点存在定理可知，存在 $t_1\in(0,\ln a)$ 和 $t_2\in(\ln a,+\infty)$，使得 $g(t_1)=g(t_2)=0$，

即 $e^{t_1}-at_1=e^{t_2}-at_2=0$，且当 $0<x<t_1$ 和 $x>t_2$ 时，$g(x)>0$，此时，$f'(x)>0$；

当 $t_1<x<t_2$ 时，$g(x)<0$，此时，$f'(x)<0$.

所以，函数 $y=f(x)$ 在 $x=t_1$ 处取得极大值，在 $x=t_2$ 取得极小值，

由题意可知，$f(x)_{极小值}=f(t_2)\le f(0)=1$，

$\therefore f\left(t_2\right)=t_2e^{t_2}-\frac{1}{3}at_2^3-\frac{1}{2}at_2^2=t_2e^{t_2}-\frac{1}{3}t_2^2e^{t_2}-\frac{1}{2}t_2e^{t_2}+1=1--\frac{1}{3}t_2^2e^{t_2}+\frac{1}{2}t_2e^{t_2}\le 1$，

可得$t_2\ge\frac{3}{2}$，又$e^{t_2}-at_2=0$，可得$a=\frac{e^{t_2}}{t_2}$，构造函数$h\left(x\right)=\frac{e^x}{x}$，其中$x\ge\frac{3}{2}$，

则$h'\left(x\right)=\frac{e^x\left(x-1\right)}{x^2}>0$，此时，函数$y=h\left(x\right)$在区间$\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$上单调递增，

当$x\ge\frac{3}{2}$时，则$h\left(x\right)\ge h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{e^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}$，$\therefore a\ge\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}$.

因此，实数a的取值范围是$\left[\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$，故选 C.

3.已知函数$f\left(x\right)=\left(x-a-1\right)e^x+b$，若存在$b\in R$，对于任意$x\in\left[1,2\right]$，都有$\left|f\left(x\right)\right|<\frac{e}{2}$，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】$\left(1,\frac{e+1}{e-1}\right)$

【分析】

设$g(x)=(x-a-1)e^x$，问题转化为对于任意$x\in\left[1,2\right]$，都有$g(x)_{\max}-g(x)_{\min}<e$，利用导数研究$g(x)$的最值，建立关于$a$的不等式即可求解.

【详解】设$g(x)=(x-a-1)e^x$，由 b 的任意性，结合题意可知，对于任意$x\in\left[1,2\right],-\frac{e}{2}<f(x)<\frac{e}{2}$，

即$g(x)_{\max}-g(x)_{\min}<e$，

又$g'(x)=(x-a)e^x$，易知函数$g(x)$在$(-\infty,a)$单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增，

①当$a\le 1$时，$g(x)$在$[1,2]$上单调递增，

则$g(x)_{\max}=g(2)=(1-a)e^2$，　$g(x)_{\min}=g(1)=-ae$

故$g(x)_{\max}-g(x)_{\min}=(1-a)e^2+ae<e$，解得$a>1$，此时无解.

②当$a\ge 2$时，$g(x)$在$[1,2]$上单调递减，

则 $g(x)_{\max}=g(1)=-ae$, $g(x)_{\min}=g(2)=(1-a)e^2$ 故 $g(x)\max_{\min}=-ae-(1-a)e^2<e$，解得 $2\leqslant a<\dfrac{e+1}{e-1}$

③当 $1<a<2$ 时，$g(x)$ 在 $[1，a]$ 上单调递减，在 $(a,2]$ 上单调递增，

则 $g(x)_{\min}=g(a)=-e^a, g(x)_{\max}=\max\{g(1),g(2)\}$，

故只需 $g(1)-g(a)=e^a-ae<e$ 且 $g(2)-g(a)=e^a+(1-a)e^2<e$

记函数 $m(a)=e^a-ae-e$，则 $m'(a)=e^a-e>0$，函数 $m(a)$ 在 $(1,2)$ 上递增，

则 $m(a)<m(2)=e^2-3e=e(e-3)<0$，

记函数 $n(a)=e^a+(1-a)e^2-e$ 则 $n'(a)=e^a-e^2<0$，

函数 $n(a)$ 在 $(1,2)$ 上递减，则 $n(a)<n(1)=e^1+0-e=0$

故当 $1<a<2$ 时，$g(1)-g(a)<e$ 且 $g(2)-g(a)<e'$ 恒成立，满足题意，

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left(1,\dfrac{e+1}{e-1}\right)$，故答案为：$\left(1,\dfrac{e+1}{e-1}\right)$

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的单调性极值最值，查了不等式的恒成立问题，考查分类讨论思想，考查了推理能力与计算能力，属于难题.

【题型五】 恒成立求参：代入消参型（虚设根型）

【典例分析】

设实数 $\lambda>0$，若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $\dfrac{e^x}{\lambda}-\ln(\lambda x)\geq 0$ 恒成立，则 λ 的取值范围是（　　）

A. $0<\lambda\leq\dfrac{1}{e}$　　**B.** $0<\lambda\leq e-1$　　**C.** $0<\lambda\leq e$　　**D.** $0<\lambda\leq e^2$

【答案】C

【分析】

令 $f(x)=\dfrac{e^x}{\lambda}-\ln(\lambda x)$，根据二阶导数的符号判断 $f'(x)$ 的单调性，由零点存在性定理易知 $\exists x_0\in(0,+\infty)$ 使

$f'(x_0)=0$，此时 $\lambda=x_0e^{x_0}$，进而讨论 $f(x)$ 的单调性可知 $f(x)\ge f(x_0)$，要使题设不等式恒成立，即 $f(x_0)=\dfrac{e^{x_0}}{\lambda}-\ln\lambda-\ln x_0\ge 0$ 成立，构造 $g(x_0)=\dfrac{1}{x_0}-2\ln x_0-x_0$ 利用导数研究其单调性确定 $g(x_0)\ge 0$ 的区间，进而求 λ 的范围.

【详解】令 $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{\lambda}-\ln\left(\lambda x\right)$，只需要 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上 $f(x)\ge 0$ 恒成立，

$\because f'(x)=\dfrac{e^x}{\lambda}-\dfrac{1}{x}$ 且 $\lambda>0$，

$\therefore f''(x)=\dfrac{e^x}{\lambda}+\dfrac{1}{x^2}>0$，即 $f'(x)$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

$\because \lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，

$\therefore \exists x_0\in(0,+\infty)$，使 $f'(x_0)=0$，即 $\lambda=x_0e^{x_0}$，$\therefore x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

故只需 $f\left(x\right)\ge f\left(x_0\right)=\dfrac{e^{x_0}}{\lambda}-\ln\left(\lambda x_0\right)=\dfrac{e^{x_0}}{\lambda}-\ln\lambda-\ln x_0\ge 0$，令 $g(x_0)=\dfrac{1}{x_0}-2\ln x_0-x_0$，

$\therefore g'(x_0)=-(\dfrac{1}{x_0}+1)^2<0$，故 $g(x_0)$ 在 $x_0\in(0,+\infty)$ 上递减，而 $g(1)=0$，

$\therefore x_0\in(0,1]$ 时，$g(x_0)\ge 0$ 恒成立，可知 $\lambda=x_0e^{x_0}\in(0,e]$. 故选：C

【变式演练】

1.已知函数 $f\left(x\right)=x^2-\ln\left(1+x\right)-\ln\left(a-x\right)$ 有唯一零点，则 $a=$（　　）

A． 0　　　　**B．** $-\dfrac{1}{2}$　　　　**C．** 1　　　　**D．** 2

【答案】C

【分析】

分析可知函数 $f\left(x\right)$ 存在极小值 $f\left(x_0\right)=0$ 且满足 $\dfrac{1}{a-x_0}=\dfrac{1}{x_0+1}-2x_0$，由此可得出

$f\left(x_0\right)=x_0^2+\ln\left[\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}-\frac{2x_0}{x_0+1}\right]=0$，构造函数$\varphi\left(x\right)=x^2+\ln\left[\frac{1}{\left(x+1\right)^2}-\frac{2x}{x+1}\right]$，其中$-1<x<\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，利用导数分析得出函数$\varphi\left(x\right)$在区间$\left(-1,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$上为减函数，可求得$x_0$的值，进而可求得$a$的值.

【详解】函数$f\left(x\right)$的定义域为$\left(-1,a\right)$，则$a>-1$，$f'\left(x\right)=2x-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-a}$，

则$f''\left(x\right)=2+\frac{1}{\left(x+1\right)^2}+\frac{1}{\left(x-a\right)^2}>0$，所以，函数$f'\left(x\right)$在$\left(-1,a\right)$上为增函数，

当$x\to-1^+$时，$f'\left(x\right)\to-\infty$，当$x\to a^-$时，$f'\left(x\right)\to+\infty$，

则存在$x_0\in\left(-1,a\right)$，使得$f'\left(x_0\right)=2x_0-\frac{1}{x_0+1}-\frac{1}{x_0-a}=0$，则$\frac{1}{a-x_0}=\frac{1}{x_0+1}-2x_0$，

当$-1<x<x_0$时，$f'\left(x\right)<0$，此时函数$f\left(x\right)$单调递减，

当$x_0<x<a$时，$f'\left(x\right)>0$，此时函数$f\left(x\right)$单调递增，$\therefore f\left(x\right)_{\min}=f\left(x_0\right)=x_0^2-\ln\left(1+x_0\right)-\ln\left(a-x_0\right)$，

由于函数$f\left(x\right)=x^2-\ln\left(1+x\right)-\ln\left(a-x\right)$有唯一零点，则$f\left(x\right)_{\min}=f\left(x_0\right)=x_0^2-\ln\left(1+x_0\right)-\ln\left(a-x_0\right)=0$，

由$\begin{cases}\frac{1}{a-x_0}=\frac{1}{x_0+1}-2x_0>0\\x_0>-1\end{cases}$，解得$-1<x_0<\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，

所以，$x_0^2-\ln\left(1+x_0\right)+\ln\frac{1}{a-x_0}=x_0^2-\ln\left(1+x_0\right)+\ln\left(\frac{1}{x_0+1}-2x_0\right)=x_0^2+\ln\left[\frac{1}{\left(x_0+1\right)^2}-\frac{2x_0}{x_0+1}\right]=0$，

令$\varphi\left(x\right)=x^2+\ln\left[\frac{1}{\left(x+1\right)^2}-\frac{2x}{x+1}\right]$，其中$-1<x<\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，

$$\varphi'\left(x\right)=2x+\frac{\left(x+1\right)^2}{1-2x^2-2x}\cdot\left[-\frac{2\left(x+2\right)}{\left(x+1\right)^3}\right]=2x+\frac{2\left(x+2\right)}{\left(2x^2+2x-1\right)\left(x+1\right)}=\frac{4x^4+8x^3+2x^2+4}{\left(2x^2+2x-1\right)\left(x+1\right)}$$

$$=\frac{4x^2\left(x+1\right)^2+2\left(2-x^2\right)}{\left(2x^2+2x-1\right)\left(x+1\right)},$$

Q $-1<x<\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，则$2x^2+2x-1<0$，$x+1>0$，$2-x^2>0$，则$\varphi'\left(x\right)<0$，