利用传统方法求线线角、线面角、二面角与距离的问题

【考点预测】

知识点 1：线与线的夹角

(1) 位置关系的分类：
- 共面直线
  - 平行直线
  - 相交直线
- 异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点

(2) 异面直线所成的角

①定义：设 a，b 是两条异面直线，经过空间任一点 O 作直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，把 a' 与 b' 所成的锐角 (或直角) 叫做异面直线 a 与 b 所成的角 (或夹角)．

②范围：$\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

③求法：平移法：将异面直线 a，b 平移到同一平面内，放在同一三角形内解三角形.

知识点 2：线与面的夹角

①定义：平面上的一条斜线与它在平面的射影所成的锐角即为斜线与平面的线面角.

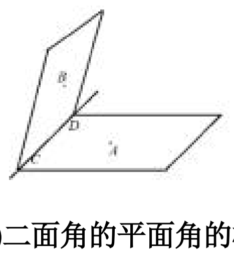
②范围：$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

③求法：

常规法：过平面外一点 B 做 $BB' \perp$ 平面 α, 交平面 α 于点 B'；连接 AB'，则 $\angle BAB'$ 即为直线 AB 与平面 α 的夹角．接下来在 $Rt\triangle ABB'$ 中解三角形．即 $\sin\angle BAB' = \frac{BB'}{AB} = \frac{h}{\text{斜线长}}$(其中 h 即点 B 到面 α 的距离，可以采用等体积法求 h，斜线长即为线段 AB 的长度)；

知识点 3：二面角

(1)二面角定义：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形称为二面角，这条直线称为二面角的棱，这两个平面称为二面角的面．(二面角 $\alpha - l - \beta$ 或者是二面角 $A - CD - B$)

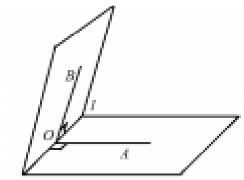


(2)二面角的平面角的概念：平面角是指以二面角的棱上一点为端点，在两个半平面内分别做垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角就叫做该二面角的平面角；范围 $[0，\pi]$.

(3)二面角的求法

法一：定义法

在棱上取点，分别在两面内引两条射线与棱垂直，这两条垂线所成的角的大小就是二面角的平面角，如图在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的棱上任取一点 O，以 O 为垂足，分别在半平面 α 和 β 内作垂直于棱的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 所成的角称为二面角的平面角(当然两条垂线的垂足点可以不相同，那求二面角就相当于求两条异面直线的夹角即可)．


B
l
O
A

法二：三垂线法

在面 α 或面 β 内找一合适的点 A，作 $AO\perp\beta$ 于 O，过 A 作 $AB\perp c$ 于 B，则 BO 为斜线 AB 在面 β 内的射影，$\angle ABO$ 为二面角 $\alpha-c-\beta$ 的平面角．如图 1，具体步骤：

①找点做面的垂线；即过点 A，作 $AO\perp\beta$ 于 O；

②过点 (与①中是同一个点) 做交线的垂线；即过 A 作 $AB\perp c$ 于 B，连接 BO；

③计算：$\angle ABO$ 为二面角 $\alpha-c-\beta$ 的平面角，在 $Rt\triangle ABO$ 中解三角形．

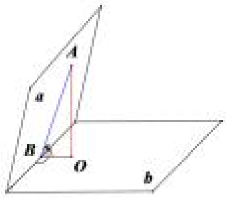


图1

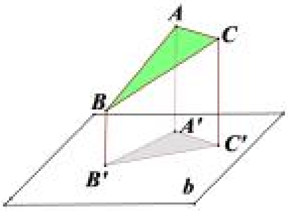


图2

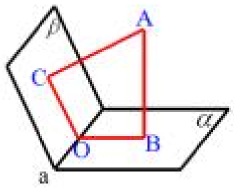


图3

法三：射影面积法

凡二面角的图形中含有可求原图形面积和该图形在另一个半平面上的射影图形面积的都可利用射影面积公式 ($\cos\theta=\frac{S_{射}}{S_{斜}}=\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}$，如图 2) 求出二面角的大小；

法四：补棱法

当构成二面角的两个半平面没有明确交线时，要将两平面的图形补充完整，使之有明确的交线 (称为补棱)，然后借助前述的定义法与三垂线法解题．当二平面没有明确的交线时，也可直接用法三的摄影面积法解题．

法五：垂面法

由二面角的平面角的定义可知两个面的公垂面与棱垂直，因此公垂面与两个面的交线所成的角，就是二面角的平面角．

例如：过二面角内一点 A 作 $AB\perp\alpha$ 于 B，作 $AC\perp\beta$ 于 C，面 ABC 交棱 a 于点 O，则 $\angle BOC$ 就是二面角的平面角．如图 3．此法实际应用中的比较少，此处就不一一举例分析了．

知识点 4：空间中的距离

求点到面的距离转化为三棱锥等体积法求解.

【题型归纳目录】

题型一：异面直线所成角

题型二：线面角

题型三：二面角

题型四：距离问题

【典例例题】

题型一：异面直线所成角