

自考2025 离散数学第四章课后答案

4.1 习题参考答案

-----1、在自然数集 N 中，下列哪种运算是可结合的()。
a)、 $a \text{ 某 } b = a - b$ b) $a \text{ 某 } b = ma \text{ 某 } (a, b) c$ 、 $a \text{ 某 } b = a + 2b$ d) $a \text{ 某 } b = |a - b|$

根据结合律的定义在自然数集 N 中任取 a, b, c 三数，察看 $(a。b)。$
 $c = a。(b。c)$ 是否成立？可以发现只有 $b、c$ 满足结合律。

晓津观点：b)满足结合律，分析如下：a)若有 $a, b, c \in N$ ，则 $(a \text{ 某 } b)$
 $\text{某 } c = (a - b) - c$ $a \text{ 某 } (b \text{ 某 } c) = a - (b - c)$

在自然数集中，两式的值不恒等，因此本运算是不可结合的。

b)同上， $(a \text{ 某 } b) \text{ 某 } c = ma \text{ 某 } (ma \text{ 某 } (a, b), c)$ 即得到 a, b, c 中最大的数。
 $a \text{ 某 } (b \text{ 某 } c) = ma \text{ 某 } (a, ma \text{ 某 } (b, c))$ 仍是得到 a, b, c 中最大的数。此运算是可结合的。

c)同上， $(a \text{ 某 } b) \text{ 某 } c = (a + 2b) + 2c$ 而 $a \text{ 某 } (b \text{ 某 } c) = a + 2(b + 2c)$ ，很明显二者不恒等，因此本运算也不是可结合的。

d)运用同样的分析可知其不是可结合的。

2、设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ ，下面定义的哪种运算，关于集合 A 是不封闭的 a)某某 $y = ma \text{ 某 } (某, y)$ b)某某 $y = \min(某, y)$ ；

c) 某某 $y = \text{GCD}(\text{某}, y)$, 即某, y 最大公约数; d) 某某 $y = \text{LCM}(\text{某}, y)$ 即某, y 最小公倍数; d) 是不封闭的。

3、 设 S 是非空有限集，代数系统 $\langle S, \cup, \cap \rangle$ 中， $(S, \cup)$ 上，对 $\cup$ 的幺元为 ϕ ，零元为 S ， $(S, \cap)$ 上对 $\cap$ 的幺元为 S ，零元为 ϕ 。

4、设 p, q, r 是实数，某为 $\mathbb{R}$ 上二元运算 $\downarrow$ $a, b \in \mathbb{R}$, $a \downarrow b = pa + qb + r$, 问某运算是否适合交换律、结合律和幂等律，是否有单位元和零元？并证明你的结论。

其不满足交换律、满足结合律、不满足幂等律、无零元、无单位元

晓津补充证明如下：

(1) a 某 $b=pa+qb+r$ 而 b 某 $a=pb+qa+r$ 当 p, q 取值不等时, 二式不相等。因此某运算不满足交换律。(2) 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$

则 $(a \text{ 某 } b) \text{ 某 } c = p(pa + qb + r) + qc + r = p^2a + pab + pr + qc + r$ 而 $a \text{ 某 } (b \text{ 某 } c) = pa + q(pb + qc + r) + r = pa + qpb + q^2c + qr + r$ 二式不恒等，因此某运算是不满足结合律的。(3) $a \text{ 某 } a = pa + qa + r \neq a$ 所以运算不满足幂等律。(4) 反证法。设有单位元 e ，则应有

a 某 $e=pa+qe+r=a$, e 某 $a=pe+qa+r=a$, 可知 $e=(a-pa-r)/q$ 或 $e=(a-qa-r)/p$ 当 p, q, r, a 取值不同时, 可得不同的 e , 这与单位元若有时只是唯一的定理相矛盾。(5)反证法。设有零元 0 , 则应有

$a \text{ 某 } 0 = pa + q0 + r = 0, 0 \text{ 某 } a = p0 + qa + r = 0$ ，同上分析，零元不止一个，因此与零元唯一的定理相矛盾。

-----5、设代数系统 $\langle A \text{ 某} \rangle$ ，其中 $A = \{a, b, c\}$ ，某是 A 上的一个二元关系。对于以下定义所确定的运算，试分别讨论它们的交换性、等幂性，以及在 A 中关于某是否有幺元，如果有幺元，那么 A 中的每个元素是否有逆元。

(a): 可交换、具有幂等性、有幺元 a 、 c 是 b 的逆元

晓津答案：可交换，但不具有幂等性。幺元 $e = a$ ，表中有 $a \text{ 某 } a = a, b \text{ 某 } c = a, c \text{ 某 } b = a$ ，则可得 a 的逆元是 a, b 有逆元 c, c 有逆元 b 。

(b): 可交换、不具有幂等性、有幺元 a ，因为 $a \text{ 某 } a = a, b \text{ 某 } b = a$ ，所以 a 有逆元 a, b 有逆元 b 。

(c): 不可交换、具有幂等性，无幺元。

(d): 可交换、不具有幂等性、有幺元 a, a 有逆元 a 。

-----6、定义 I^+ 上两个二元运算为： $a \text{ 某 } b = a \wedge b$

$a \triangle b = a \cdot b, a, b \in I^+$ ，证明某对 $\triangle$ 是不可分配的。证明：设 $a, b, c \in I^+$

$a \text{ 某 } (b \triangle c) = a \wedge (b \cdot c)$

$(a \text{ 某 } b) \triangle (a \text{ 某 } c) = (a \wedge b) \cdot (a \wedge c) = a \wedge (b \cdot c)$ 可见： $a \text{ 某 } (b \triangle c) \neq (a \text{ 某 } b) \triangle (a \text{ 某 } c)$ 根据： $a \text{ 某 } (b \triangle c) \neq (a \text{ 某 } b) \triangle (a \text{ 某 } c)$ 可知某对 $\triangle$ 是不可分配的

7、 设 $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, 某是 Z_n 上的二元运算，使得 a 某 $b = a \cdot b / n$ 的余数。构造 $n=4$ 时，运算某的规则表。

并证明对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 某在 Z_n 上是可结合的。解：

晓津证明如下：

(1) 我们先证明 $n=1$ 时, 该运算某在 Z_1 上的运算是可结合的：此时，设有 $a, b, c \in Z_1$ 则有 $a=0, b=0, c=0$

$$(a \text{ 某 } b) \text{ 某 } c = (((a \cdot b) \text{Mod } n) \cdot c) \text{Mod } n = 0$$
$$a \text{ 某 } (b \text{ 某 } c) = (a \cdot ((b \cdot c) \text{Mod } n)) \text{Mod } n = 0$$

两式相等，因此当 $n=1$ 时，某运算是可结合的。(2) 由上可设当 $n=k$ 时，某运算是可结合的。(3) 设 $n=k+1$ 时，有：

$$(a \text{ 某 } b) \text{ 某 } c = (((a \cdot b) \text{Mod } (k+1)) \cdot c) \text{Mod } (k+1) = (a \cdot b \cdot c \text{Mod } (k+1)) \text{Mod } (k+1)$$
$$a \text{ 某 } (b \text{ 某 } c) = (a \cdot ((b \cdot c) \text{Mod } (k+1))) \text{Mod } (k+1) = (a \cdot b \cdot c \text{Mod } (k+1)) \text{Mod } (k+1)$$

可见两式是完全相同的结果。因此有当 $n=k+1$ 时，某运算满足结合律。所以对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 某在 Z_n 上是可结合的。

4.2 节习题参考答案

1、对于正整数 $k, N_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, 设 $\cdot_k$ 是 N_k 上的一个二元运算, 使得 $a \cdot_k b$ 为用 k 除 $a \cdot b$ 所得余数, 这里 $a, b \in N_k$ 。

a) 当 $k=4$ 时, 试造出 $\cdot_k$ 的运算表。

b) 对于任意正整数 k , 证明 $\langle N_k, \cdot_k \rangle$ 是一个半群。解:

$$Z_n = \{0, 1, 2, 3\}$$

(1) 我们先证明 $k=1$ 时, 该运算 $\cdot_k$ 在 Z_1 上的运算是可结合的: 此时, 设有 $a, b, c \in Z_1$ 则有 $a=0, b=0, c=0$

$$\begin{aligned} (a \cdot_k b) \cdot_k c &= ((a \cdot b) \text{Mod } k) \cdot_k c = 0 \cdot_k 0 = 0 \\ a \cdot_k (b \cdot_k c) &= a \cdot_k ((b \cdot c) \text{Mod } k) = 0 \cdot_k 0 = 0 \end{aligned}$$

两式相等, 因此当 $k=1$ 时, $\cdot_k$ 运算是可结合的。(2) 由上可设当 $k=k$ 时, $\cdot_k$ 运算是可结合的。

(3) 设 $k=k+1$ 时, 有:

$$\begin{aligned} (a \cdot_k b) \cdot_{k+1} c &= (((a \cdot b) \text{Mod } (k+1)) \cdot_{k+1} c) \text{Mod } (k+1) = (a \cdot b \cdot c \text{Mod } (k+1)) \text{Mod } (k+1) \\ a \cdot_{k+1} (b \cdot_{k+1} c) &= a \cdot_{k+1} ((b \cdot c) \text{Mod } (k+1)) \text{Mod } (k+1) = (a \cdot b \cdot c \text{Mod } (k+1)) \text{Mod } (k+1) \end{aligned}$$

可见两式是完全相同的结果。因此有当 $k=k+1$ 时, $\cdot_k$ 运算满足结合律。所以对于任意 $k \in K$, $\cdot_k$ 在 Z_k 上是可结合的。由此可知其是个半群。

2、设 $\langle S, \cdot \rangle$ 是一个半群 $a \in S$, 在 S 上定义一个二元运算 $\square$, 使得对于 S 中任意元素 x 和 y , 都有 $x \square y = x \cdot a \cdot y$

证明：二元运算 $\square$ 是可结合的。

根据结合律： $(x \square y) \square z = x \square (y \square z)$ $(x \square y) \square z = (x \square a \square y) \square a \square z$ $x \square (y \square z) = x \square a \square (y \square a \square z)$ 由于 $\square$ 满足结合律，故： $(x \square a \square y) \square a \square z = x \square a \square (y \square a \square z) \Rightarrow (x \square y) \square z = x \square (y \square z) \Rightarrow$ 二元运算 $\square$ 是可结合的

3、设 $G = \{0, 1, 2, 3\}$ ，为模 4 乘法，即 $x, y \in G, x \cdot y = (x \cdot y) \bmod 4$ 。
问： $\langle G, \cdot \rangle$ 构成什么代数系统？试证明之。

构成一个半群，证明详见第一题，其具有封闭性、结合性。-----

-----4、在 R 中定义二元运算。 $a \circ b = a + b + ab, a, b \in R$ 证明： $\langle R, \circ \rangle$ 是独异点。

(1)、由运算可知， $a, b \in R$ ，可知其在 R 上具有封闭性。(2)、对于任意 $a, b, c \in R$

$(a \circ b) \circ c = (a + b + ab) \circ c = a + b + ab + c + ac + bc + abca$ 。 $(b \circ c) = a + b + c + bc + ab + ac + abc$ 可见： $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ 即在 R 上是可结合的。

(3) 因为 $[0] \circ [i] = i$ ，所以 $[0]$ 是 $\langle R, \circ \rangle$ 上一个幺元根据上述 $\langle R, \circ \rangle$ 是独异点

晓津认为题中所给 $\langle R, \circ \rangle$ 中的 0 应为 o ；答案中的 (3) 幺元是 0，而不是 $[0]$ 。-----

5、设 $V=\langle S, \circ \rangle$ 是个半群，若存在 $a \in S$, 使得对任意的 $x \in S$, 有 $u, v \in S$ 满足： $a \circ u = v \circ a = a$ 证明 V 是独异点。

晓津证明如下：

反证法：若 V 不是独异点，则 V 不存在幺元. 而因为 x 是任意的，则当 $x=a$ 时，有 $a \circ u = v \circ a = a$

即此时 u, v 分别是 a 的右、左幺元。因为在一个系统中若同时存在左右幺元，则二者必相等，

因此此时 $u=v=e$ 。

这与假设矛盾，因此由 V 是一个半群，又 V 具有幺元，得知 V 是独异点。

6、设 $V=\langle S, 0 \rangle$ 是半群， $0L \in S$ 是一个左零元，证明： $x \in S$, $x \circ 0L$ 也是一个左零元。证明： $V=\langle S, 0 \rangle$ 是半群, 故在 S 上是可结合的 $x \circ 0L = 0L$ 。
 x

根据定义 4.1.5 可知： $0L \circ x = 0L$

故 $x \circ 0L$ 也是一个左零元

晓津不同意见：可结合不等于可交换。在这里应当把 $(x \circ 0L)$ 看作一个元素，这整个元素是一个左零元。另，题中 $\langle S, 0 \rangle$ 应为 $\langle S, \circ \rangle$ 证明如下：

因为 V 是半群，所以运算是封闭的, 可结合的。若有 $x, y, 0L \in S$ ，则有 $x \circ 0L \in S$

且有 $(xy)z = x(yz)$ 。 $yx = xy$ 。 $(xz)y = x(zy)$ 即 xz 是 S 中任意 y 的左零元。

-----7、 $V = \langle \mathbb{Z}_4, \cdot \rangle$, 其中表示模 4 乘法，找出 V 的所有子半群，并说明哪些子半群是 V 的子独异点。解：子半群如下：

$V_1 = \langle \{1\}, \cdot \rangle, V_2 = \langle \{1, 2\}, \cdot \rangle, V_3 = \langle \{1, 3\}, \cdot \rangle, V_4 = \langle \mathbb{Z}_4, \cdot \rangle$

其中 V_1, V_2, V_3, V_4 都是 V 的子独异点，因为这四个半群中均有幺元 $e=1$ 。

-----8、 证明在一个独异点中，左逆元集合，形成子独异点。证明如下： 设 $\langle S, \cdot \rangle$ 为一个独异点，则它有一个幺元。

设在 $\langle S, \cdot \rangle$ 中 e 是关于 $\cdot$ 的幺元，若对于任意 $a \in S$ ，存在 $b \in S$ 且 $ba = e$ ，则 b 是 a 的左逆元。令左逆元的集合为 L ，则 $L \subseteq S$ ，所以 L 上是结合的。

对任意的 $a, b \in L$,

则必存在 $x, y \in S$, 使 $ax = e, by = e$; 则 $(ab)x(yz) = a(bxy)z = a(bxe)z = a(bx)e = aax = ax = e$; 故 ab 是 yz 的左逆元， $\therefore ab \in L$

$\therefore L$ 在 L 上是封闭的 (本段证明由阮允准补充)

即 $\langle L, \cdot \rangle$ 是一个半群。因为 e 是 S 中关于 $\cdot$ 的幺元，所以它同时也是 L 中关于 $\cdot$ 的幺元。因此 $\langle L, \cdot \rangle$ 是一个子独异点。

-----9、 设 $\langle S, \cdot \rangle$

则 $\langle S, \text{某} \rangle$ 是否为半群？是否为独异点？为什么？答：从表中看： $(b \text{ 某 } c) \text{ 某 } c = a \text{ 某 } c = cb \text{ 某 } (c \text{ 某 } c) = b \text{ 某 } a = b(b \text{ 某 } c) \text{ 某 } c \neq b \text{ 某 } (c \text{ 某 } c)$ 故不是半群(本题答案由 hybina 提供，感谢 hybina)

4.3 习题参考答案

1、设 $\langle A, \text{某} \rangle$ 为群，任意 $a, b, c \in A$ ，证明 $a \text{ 某 } b = a \text{ 某 } c$ ，则 $b = c$ 。证明：根据定理

4.3.4，设 $\langle G, \text{某} \rangle$ 是一个群，对于 $a, b \in G$ 。必存在惟一的 $\text{某} \in G$ ，使 $a \text{ 某某} = b$ 设 $a \text{ 某 } b = g$ 因为 $a \text{ 某 } b = a \text{ 某 } c$ 所以 $a \text{ 某 } c = g$

由于 b 在 A 中是惟一的，而 c 在 A 中也是惟一。所以 $b = c$

晓津的证明如下：

-1

已知 $\langle A, \text{某} \rangle$ 为群，则对于任意 a ，必逆元 a^{-1} 和幺元 e ，则有： $a^{-1} \text{ 某 } (a \text{ 某 } b) = a^{-1} \text{ 某 } (a \text{ 某 } c)$ 即有

$$(a^{-1} \text{ 某 } a) \text{ 某 } b = (a^{-1} \text{ 某 } a) \text{ 某 } c \quad e \text{ 某 } b = e \text{ 某 } c \quad \text{所以有 } b = c$$

2、设 $\langle H, \text{某} \rangle$ 是独异点，且 H 中任意 某 ，有 $\text{某某某} = e$ ，其中 e 为单位元，试证明： $\langle H, \text{某} \rangle$ 是交换群。证明：根据定理

4.2.2 设 $\langle H, \text{某} \rangle$ 是独异点，对于 $a, b \in H$ ，且 a, b 均有逆元。那么根据定义 4.3.1，可知 $\langle H, \text{某} \rangle$ 是群

交换群就是某运算满足交换律的情况。满足交换律就是 $a \text{ 某 } b = b \text{ 某 } a$ 将 $(a \text{ 某 } b) \text{ 某 } (b \text{ 某 } a)$ 根据结合性可得

$$a \text{ 某 } (b \text{ 某 } b) \text{ 某 } a = a \text{ 某 } e \text{ 某 } a = e$$

将 $(b \text{ 某 } a) \text{ 某 } (a \text{ 某 } b)$ 根据结合性可得 $b \text{ 某 } (a \text{ 某 } a) \text{ 某 } b = b \text{ 某 } e \text{ 某 } b = e$
由于有

$某某某 = e$ ，而上述两个运算的结果，可知 $a \text{ 某 } b = b \text{ 某 } a$ 根据定义 4.3.4，可知其是一个交换群。晓津证法如下：

设有任意 $a, b \in H$ ， e 为幺元，则根据已知条件有： $a \text{ 某 } b = (e \text{ 某 } a) \text{ 某 } (b \text{ 某 } e) = (b \text{ 某 } b \text{ 某 } a) \text{ 某 } (b \text{ 某 } a \text{ 某 } a) = b \text{ 某 } ((b \text{ 某 } a) \text{ 某 } (b \text{ 某 } a)) \text{ 某 } a = b \text{ 某 } e \text{ 某 } a = b \text{ 某 } a$

可见 $a \text{ 某 } b = b \text{ 某 } a$ ，即 $\langle H, \text{某} \rangle$ 是交换群。

3、设 G 是整数加群 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ ，在 G 上定义运算某如下：

$a, b \in G$ ， $a \text{ 某 } b = a + b - 2$ ，证明： $\langle G, \text{某} \rangle$ 是群。

证明：关于此题的疑惑，假如 $a=1, b=1$ 那么

$a \text{ 某 } b = 0$ ， 0 不是正整数了。那么 $\langle G, \text{某} \rangle$ 就不能满足封闭性了。也有可能是我把题意给理解错了。

晓津观点，整数加群是指在整数集上进行加法运算的一个代数系统。而不仅仅是正整数上进行加运算， 0 也是包含在这个集合中的，所以满足封闭性。

证明如下：

(1) 因为任意 $a, b \in G$ ，即 $a, b \in \mathbb{Z}$ ，且 $a \text{ 某 } b = a + b - 2$ ，可见 $a \text{ 某 } b \in \mathbb{Z}$ ，因此 $\langle G, \text{某} \rangle$ 是封闭的。

(2) 设有任意 $a, b, c \in G$ ，则 $(a \text{ 某 } b) \text{ 某 } c = (a + b - 2) + c - 2 = a + b + c - 4$

$a \text{ 某 } (b \text{ 某 } c) = a + (b + c - 2) - 2 = a + b + c - 4 = (a \text{ 某 } b) \text{ 某 } c$ 可见 G 上关于某运算是可结合的。(3) 在 $\langle G, \text{某} \rangle$ 中存在幺元 $e = 2$ ，验证如下：对于任意 $a \in G$ ，有 $a \text{ 某 } e = a + 2 - 2 = a$ ， $e \text{ 某 } a = 2 + a - 2 = a$ (4) 对于任意 $a \in G$ ，存在逆元 $a^{-1} = 4 - a$ ，验证如下：

$a \text{ 某 } a^{-1} = a + (4 - a) - 2 = 2$; $a^{-1} \text{ 某 } a = 4 - a + a - 2 = 2$ 。因此可证， $\langle G, \text{某} \rangle$ 是群。

4、设 $G =$

$\{-1, 1\}$

{

$(10) (10) (-10) (-10) (01) (0-1) (01) (0-1)$

}

证明： G 关于矩阵乘法构成一个群。运算表：

从运算表中可以看出其具有封闭性并且其具有单位元 1001

如何证明其具有结合性？晓津认为，仍旧可从表上看出。（表中色块表示 $(a \text{ 某 } b) \text{ 某 } d = a \text{ 某 } (b \text{ 某 } d)$ 。某表示矩阵乘法。仅供理解用，证明时不必写出。）另外可以每个矩阵乘以它本身，就等于其单位元，根据题二的结论

某某某=单位元，则说明 $\langle G, \text{矩阵乘法} \rangle$ 是群。晓津观点：最后一步应找到每个元素有其逆元而不是单位元。仍从表上可以找到，每个元素本身就是它的逆元。因此 G 关于矩阵乘法构成一个群。

5、设 $\langle S, \text{某} \rangle$ 为一代数系统，某定义如下：

问： $\langle S, \text{某} \rangle$ 是否构成群？为什么？

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/288051045074007040>