

2025 届江苏省南京市附中高三 3 月份模拟考试数学试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 且 $(\vec{a}+\lambda\vec{b}) \perp (2\vec{a}-\vec{b})$, 则实数 λ 的值为 ()

- A. -7 B. -3 C. 2 D. 3

2. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 作直线与抛物线在第一象限交于点 A , 与准线在第三象限交于点 B , 过点 A 作

准线的垂线, 垂足为 H . 若 $\tan \angle AFH = 2$, 则 $\frac{|AF|}{|BF|} = (\quad)$

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

3. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $y = f(x-1)$ 的图象关于 $x=1$ 对称, 若实数 a 满足

$f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) < f(-2)$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ B. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ C. $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ D. $(4, +\infty)$

4. 2019 年某校迎国庆 70 周年歌咏比赛中, 甲乙两个合唱队每场比赛得分的茎叶图如图所示 (以十位数字为茎, 个位数字为叶). 若甲队得分的中位数是 86, 乙队得分的平均数是 88, 则 $x+y = (\quad)$

甲				乙		
8	8		7	8		
8	2	x	8	2	y	9
7	6		9	1	3	7

- A. 170 B. 10 C. 172 D. 12

5. 已知数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列, 且 $a_1 > 0$, 若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则 a_1 的取值范围为 ()

- A. (1, 2) B. (0, 3) C. (0, 2) D. (0, 1)

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 1 \\ f(x-2), & x > 1 \end{cases}$, 若方程 $f(x) - mx - 1 = 0$ 恰有两个不同实根, 则正数 m 的取值范围为 ()

A. $\left(\frac{e-1}{2}, 1\right) \cup (1, e-1)$ B. $\left(\frac{e-1}{2}, 1\right) \cup (1, e-1]$

C. $\left(\frac{e-1}{3}, 1\right) \cup (1, e-1)$ D. $\left(\frac{e-1}{3}, 1\right) \cup (1, e-1]$

7. 复数 $z = \frac{i}{1+2i}$ 的共轭复数在复平面内所对应的点位于 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

8. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, |\vec{c}| = 1, |\vec{a} - \vec{c}| = |\vec{b} - \vec{c}| = 5$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}|$ 的最小值为 ()

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

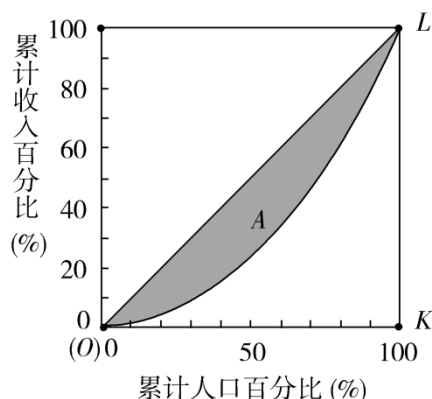
9. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点作直线交抛物线于 A, B 两点, 若线段 AB 中点的横坐标为 3, 且 $|AB| = 8$, 则抛物线的方程是 ()

A. $y^2 = 2x$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = 8x$ D. $y^2 = 10x$

10. 若 $z = 1 - i + \frac{2}{i}$, 则 z 的虚部是

A. 3 B. -3 C. 3i D. -3i

11. 为了研究国民收入在国民之间的分配, 避免贫富过分悬殊, 美国统计学家劳伦茨提出了著名的劳伦茨曲线, 如图所示. 劳伦茨曲线为直线 OL 时, 表示收入完全平等. 劳伦茨曲线为折线 OKL 时, 表示收入完全不平等. 记区域 A 为不平等区域, a 表示其面积, S 为 $\triangle OKL$ 的面积, 将 $Gini = \frac{a}{S}$ 称为基尼系数.



对于下列说法:

① Gini 越小, 则国民分配越公平;

② 设劳伦茨曲线对应的函数为 $y = f(x)$, 则对 $\forall x \in (0, 1)$, 均有 $\frac{f(x)}{x} > 1$;

③若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^2 (x \in [0, 1])$ ，则 $Gini = \frac{1}{4}$ ；

④若某国家某年的劳伦茨曲线近似为 $y = x^3 (x \in [0, 1])$ ，则 $Gini = \frac{1}{2}$ 。

其中正确的是：

A. ①④

B. ②③

C. ①③④

D. ①②④

12. 我国著名数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界瞩目的成就，哥德巴赫猜想内容是“每个大于2的偶数可以表示为两个素数的和”（注：如果一个大于1的整数除了1和自身外无其他正因数，则称这个整数为素数），在不超过15的素数中，随机选取2个不同的素数 a 、 b ，则 $|a - b| < 3$ 的概率是（ ）

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{4}{15}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{5}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. (5分) 已知 x 为实数，向量 $a = (2, -1)$ ， $b = (1, x)$ ，且 $a \perp b$ ，则 $|2a + b| =$ _____。

14. 将含有甲、乙、丙的6人平均分成两组参加“文明交通”志愿者活动，其中一组指挥交通，一组分发宣传资料，则甲、乙至少一人参加指挥交通且甲、丙不在同一个组的概率为_____。

15. 已知一组数据 1.6, 1.8, 2, 2.2, 2.4，则该组数据的方差是_____。

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{ex}{e^x}, & x \leq 2 \\ \frac{4x-8}{5x}, & x > 2 \end{cases}$ ，(其中 e 为自然对数的底数)，若关于 x 的方程 $f^2(x) - 3a|f(x)| + 2a^2 = 0$ 恰

有5个相异的实根，则实数 a 的取值范围为_____。

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，右焦点为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) O 为坐标原点，过 O 作两条射线，分别交椭圆于 M 、 N 两点，若 OM 、 ON 斜率之积为 $-\frac{4}{5}$ ，求证 $\triangle MON$ 的面积为定值。

18. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - x^2 - kx$ (其中 e 为自然对数的底， k 为常数) 有一个极大值点和一个极小值点。

(1) 求实数 k 的取值范围；

(2) 证明： $f(x)$ 的极大值不小于1。

19. (12分) 已知集合 $A = \left\{ x \mid y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} - 1 \right\}$ ，集合 $B = \{x \mid -1, x + a, 2\}$ 。

(1) 求集合 A ；

(2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x+1|$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 4 - |2x-3|$ 的解集;

(2) 若正数 m, n 满足 $m+2n=mn$, 求证: $f(m) + f(-2n) \geq 8$.

21. (12 分) 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 定点 $A(1,0)$, P 为平面内一动点, 以线段 AP 为直径的圆内切于圆 O , 设动点 P 的轨迹为曲线 C

(1) 求曲线 C 的方程

(2) 过点 $Q(2, \sqrt{3})$ 的直线 l 与 C 交于 E, F 两点, 已知点 $D(2,0)$, 直线 $x = x_0$ 分别与直线 DE, DF 交于 S, T 两点, 线段 ST 的中点 M 是否在定直线上, 若存在, 求出该直线方程; 若不是, 说明理由.

22. (10 分) 已知点 $P(1,2)$ 到抛物线 $C: y^2 = 1px (p > 0)$ 准线的距离为 1.

(I) 求 C 的方程及焦点 F 的坐标;

(II) 设点 P 关于原点 O 的对称点为点 Q , 过点 Q 作不经过点 O 的直线与 C 交于两点 A, B , 直线 PA, PB , 分别交 x 轴于 M, N 两点, 求 $|MF| \cdot |NF|$ 的值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

由已知可得 $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0$, 结合向量数量积的运算律, 建立 λ 方程, 求解即可.

【详解】

依题意得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 \times \cos \frac{2\pi}{3} = -1$

由 $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0$, 得 $2\vec{a}^2 - \lambda \vec{b}^2 + (2\lambda - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

即 $-3\lambda + 9 = 0$, 解得 $\lambda = 3$.

故选: D.

【点睛】

本题考查向量的数量积运算, 向量垂直的应用, 考查计算求解能力, 属于基础题.

2、C

【解析】

需结合抛物线第一定义和图形, 得 $\triangle AFH$ 为等腰三角形, 设准线与 x 轴的交点为 M , 过点 F 作 $FC \perp AH$, 再由三角

函数定义和几何关系分别表示转化出 $|BF| = \frac{p}{\cos(\pi - 2\alpha)}$,

$|AF| = \frac{p \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)}$, 结合比值与正切二倍角公式化简即可

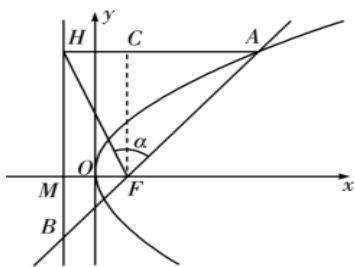
【详解】

如图, 设准线与 x 轴的交点为 M , 过点 F 作 $FC \perp AH$. 由抛物线定义知 $|AF| = |AH|$,

所以 $\angle AHF = \angle AFH = \alpha$, $\angle FAH = \pi - 2\alpha = \angle OFB$, $|BF| = \frac{|MF|}{\cos(\pi - 2\alpha)} = \frac{p}{\cos(\pi - 2\alpha)}$,

$|AF| = \frac{|CF|}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{|CH| \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{p \tan \alpha}{\sin(\pi - 2\alpha)}$,

所以 $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{\tan \alpha}{\tan(\pi - 2\alpha)} = \frac{\tan \alpha}{-\tan 2\alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2} = \frac{3}{2}$.



故选: C

【点睛】

本题考查抛物线的几何性质, 三角函数的性质, 数形结合思想, 转化与化归思想, 属于中档题

3、C

【解析】

根据题意, 由函数的图象变换分析可得函数 $y = f(x)$ 为偶函数, 又由函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$

上单调递增, 分析可得 $f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) < f(-2) \Rightarrow f(|\log_2 a|) < f(2) \Rightarrow |\log_2 a| < 2$, 解可得 a 的取值范围, 即可得答案.

【详解】

将函数 $y = f(x-1)$ 的图象向左平移1个单位长度可得函数 $y = f(x)$ 的图象,

由于函数 $y = f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则函数 $y = f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,

即函数 $y = f(x)$ 为偶函数, 由 $f\left(\log_{\frac{1}{2}} a\right) < f(-2)$, 得 $f(|\log_2 a|) < f(2)$,

Q 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $|\log_2 a| < 2$, 得 $-2 < \log_2 a < 2$, 解得 $\frac{1}{4} < a < 4$.

因此, 实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$.

故选: C.

【点睛】

本题考查利用函数的单调性与奇偶性解不等式, 注意分析函数 $y = f(x)$ 的奇偶性, 属于中等题.

4、D

【解析】

中位数指一串数据按从小(大)到大(小)排列后, 处在最中间的那个数, 平均数指一串数据的算术平均数.

【详解】

由茎叶图知, 甲的中位数为 $80 + x = 86$, 故 $x = 6$;

乙的平均数为 $\frac{78+82+80+y+89+91+93+97}{7} = 88$,

解得 $y = 6$, 所以 $x + y = 12$.

故选: D.

【点睛】

本题考查茎叶图的应用, 涉及到中位数、平均数的知识, 是一道容易题.

5、D

【解析】

先根据已知条件求解出 $\{a_n\}$ 的通项公式, 然后根据 $\{a_n\}$ 的单调性以及 $a_1 > 0$ 得到 a_1 满足的不等关系, 由此求解出 a_1 的取值范围.

【详解】

由已知得 $\frac{1}{a_n} - 1 = \left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, 则 $a_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1}$.

因为 $a_1 > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列,

所以 $a_{n+1} > a_n > 0$, 则 $\frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1} > \frac{1}{\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1}$,

化简得 $0 < \left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \frac{1}{3} < \frac{1}{a_1} - 1$, 所以 $0 < a_1 < 1$.

故选: D.

【点睛】

本题考查数列通项公式求解以及根据数列单调性求解参数范围, 难度一般. 已知数列单调性, 可根据 a_n, a_{n+1} 之间的大小关系分析问题.

6、D

【解析】

当 $x > 1$ 时, 函数周期为 2, 画出函数图像, 如图所示, 方程两个不同实根, 即函数 $f(x)$ 和 $y = mx + 1$ 有图像两个交点, 计算 $k_{AC} = \frac{e-1}{3}$, $k_{BC} = e-1$, 根据图像得到答案.

【详解】

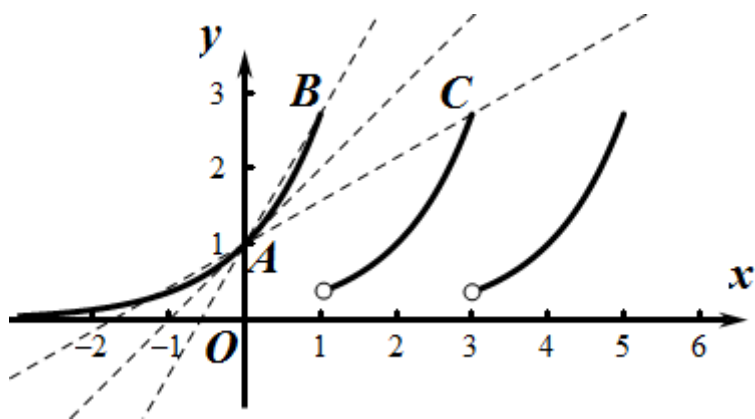
当 $x > 1$ 时, $f(x) = f(x-2)$, 故函数周期为 2, 画出函数图像, 如图所示:

方程 $f(x) - mx - 1 = 0$, 即 $f(x) = mx + 1$, 即函数 $f(x)$ 和 $y = mx + 1$ 有两个交点.

$f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, 故 $f'(0) = 1$, $B(1, e)$, $C(3, e)$, $k_{AC} = \frac{e-1}{3}$, $k_{BC} = e-1$.

根据图像知: $m \in \left(\frac{e-1}{3}, 1\right) \cup (1, e-1]$.

故选: D.



【点睛】

本题考查了函数的零点问题，确定函数周期画出函数图像是解题的关键.

7、D

【解析】

由复数除法运算求出 z ，再写出其共轭复数，得共轭复数对应点的坐标. 得结论.

【详解】

$$z = \frac{i}{1+2i} = \frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{i+2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i, \quad \bar{z} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i, \quad \text{对应点为 } \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right), \text{ 在第四象限.}$$

故选：D.

【点睛】

本题考查复数的除法运算，考查共轭复数的概念，考查复数的几何意义. 掌握复数的运算法则是解题关键.

8、B

【解析】

建立平面直角坐标系，将已知条件转化为所设未知量的关系式，再将 $\left| \vec{a} - \vec{b} \right|$ 的最小值转化为用该关系式表达的算式，利用基本不等式求得最小值.

【详解】

建立平面直角坐标系如下图所示，设 $\vec{c} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ， $\vec{OA} = \vec{a}$ ， $\vec{OB} = \vec{b}$ ，且 $A(m, 0)$ ， $B(0, n)$ ，由于

$$\left| \vec{a} - \vec{c} \right| = \left| \vec{b} - \vec{c} \right| = 5, \quad \text{所以 } m, n \in [4, 6].$$

$$\vec{a} - \vec{c} = (m - \cos \theta, -\sin \theta), \quad \vec{b} - \vec{c} = (-\cos \theta, n - \sin \theta). \text{ 所以}$$

$$\begin{cases} m^2 - 2m \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 25 \\ n^2 - 2n \sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 25 \end{cases}, \quad \text{即 } m^2 + n^2 = 48 + 2m \cos \theta + 2n \sin \theta.$$

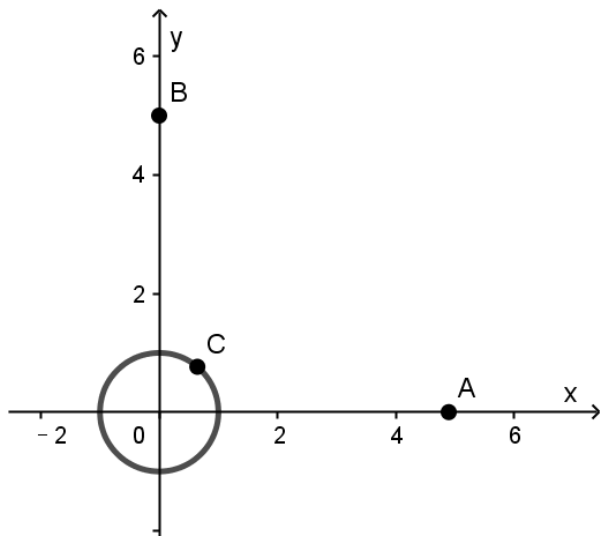
$$\left| \vec{a} - \vec{b} \right| = \left| (\vec{a} - \vec{c}) - (\vec{b} - \vec{c}) \right| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{c})^2 - 2(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{b} - \vec{c})^2} = \sqrt{48 + 2m \cos \theta + 2n \sin \theta}$$

$=\sqrt{m^2+n^2}\geq\sqrt{2mn}$.当且仅当 $m=n$ 时取得最小值,此时由 $m^2+n^2=48+2m\cos\theta+2n\sin\theta$ 得

$2m^2=48+2m(\sin\theta+\cos\theta)=48+2\sqrt{2}m\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$, 当 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 时, $2m^2$ 有最小值为 $48-2\sqrt{2}m$, 即

$2m^2=48-2\sqrt{2}m$, $m^2+\sqrt{2}m-24=0$, 解得 $m=3\sqrt{2}$.所以当且仅当 $m=n=3\sqrt{2}$, $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 时 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 有最小值为 $\sqrt{2\times\left(3\sqrt{2}\right)^2}=6$.

故选: B



【点睛】

本小题主要考查向量的位置关系、向量的模,考查基本不等式的运用,考查数形结合的数学思想方法,属于难题.

9、 B

【解析】

利用抛物线的定义可得, $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}$,把线段 AB 中点的横坐标为 3, $|AB|=8$ 代入可得 p 值,然后可得出抛物线的方程.

【详解】

设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F ,设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

由抛物线的定义可知 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=(x_1+x_2)+p$,

线段 AB 中点的横坐标为 3, 又 $|AB|=8$, $\therefore 8=6+p$, 可得 $p=2$,

所以抛物线方程为 $y^2=4x$.

故选: B.

【点睛】

本题考查抛物线的定义、标准方程,以及简单性质的应用,利用抛物线的定义是解题的关键.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/288065134103007036>