人教版数学教材八年级下

第16章　二次根式

16.2 最简二次根式

复　习

二次根式的性质

(1) $(\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0);$

(2) $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a(a \geq 0), \\ -a(a < 0); \end{cases}$

(3) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}(a \geq 0; b \geq 0);$

(4) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a \geq 0; b > 0).$

观察下列二次根式及其化简所得结果，比较**被开方数**发生了什么变化？

$\sqrt{18} \longrightarrow 3\sqrt{2}$

被开方数不含开得尽方的因数

$\sqrt{\frac{a}{3}} \longrightarrow \frac{\sqrt{3a}}{3}$

$\sqrt{\frac{b^2}{9a}}(b>0) \longrightarrow \frac{b\sqrt{a}}{3a}(b>0)$

被开方数不含分母

问题苑

最简二次根式

（1）被开方数各因式的指数都为1.

（2）被开方数不含分母.

被开方数满足上述两个条件的二次根式，叫做最简二次根式.

如：$\frac{1}{4}\sqrt{x^2+y}$ √　　$\frac{1}{4}\sqrt{x^2 y}=\frac{|x|}{4}\sqrt{y}$

$\sqrt{6m(a^2+b^2)}$ √　　$\sqrt{6ma^2b^2}=|ab|\sqrt{6m}$

$\sqrt{24x^3}=\sqrt{2^3\cdot 3\cdot x^3}=2x\sqrt{6x}(x\geq 0)$

概念库

例1．判断下列二次根式是不是最简二次根式

$(1)\sqrt{\frac{5a}{3}}$ $(2)\sqrt{42a}$ $(3)\sqrt{3(a^2+2a+1)}$ $(4)\sqrt{25m^3+50m^2}$

解(1)因为被开方数 $\frac{5a}{3}$ 含分母3，

所以$\sqrt{\frac{5a}{3}}$不是最简二次根式.

(2)因为被开方数分解: $42a=2\cdot3\cdot7\cdot a$

所以$\sqrt{42a}$是最简二次根式.

注:被开方数比较复杂时，应先进行因式分解再观察

例题讲解

例2.将下列二次根式化成最简二次根式.

(1) $\sqrt{4x^3y^2}\,(y>0)$ (2) $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}\quad(a\geq b\geq 0)$

解:由 $4x^3y^2\geq 0$ 和 $y>0$

得$x\geq 0$

原式$=\sqrt{2^2\cdot x^2\cdot x\cdot y^2}$

$=2xy\sqrt{x}$

解原式

$=\sqrt{(a-b)(a+b)(a+b)}$

$=\sqrt{(a-b)(a+b)^2}$

$=(a+b)\sqrt{a-b}\,(a\geq b\geq 0)$

&将被开方数中

用它的正平方根代替后移到根号外面.

&把被开方数(或式)化成积的形式，即分解因式

$$(3)\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}(m>n>0)$$

解原式= $\sqrt{\frac{(m+n)\cdot(m-n)}{(m-n)\cdot(m-n)}} = \sqrt{\frac{m^2-n^2}{(m-n)^2}}$

$$=\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{\sqrt{(m-n)^2}} = \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m-n}(m>n>0)$$

&将被开方数中的分母化去

化简二次根式的步骤:

1.把被开方数分解因式(或因数)；

2.将被开方数中开得尽方的因数(式)用它的正平方根代替后移到根号外面.

3.将被开方数中的分母化去

4.被开方数是带分数或小数时要化成假分数.

$$\sqrt{4\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\sqrt{\frac{9\times2}{2\times2}}=\frac{\sqrt{9\times2}}{\sqrt{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

课外拓展

被开方数是多项式的要先分解因式再进行观察判断.

判断下列各式是否为最简二次根式?

（1）$\sqrt{12}$ （ × ）； （2）$\sqrt{45a^2b}$ （ × ）；

（3）$\sqrt{30x}$ （ √ ）； （4）$x\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$ （ × ）；

（5）$4\sqrt{1\dfrac{1}{2}}$ （ × ）； （6）$5m\sqrt{m^2+9}$ （ √ ）；

（7）$\sqrt{25m^4+225m^2}$ （ × ）； $\sqrt{25m^2(m^2+9)}$

练习1.将下列二次根式化成最简二次根式.

$$(1)\ m\sqrt{\frac{5n}{24m}}\ (m>0) \qquad (2)\ \sqrt{7+14x+7x^2}\ (x<-1)$$

$$(3)\ \frac{x-y}{y}\sqrt{\frac{x^4y^3+x^3y^4}{x^2-2xy+y^2}}\ (0<x<y) \qquad (4)\ -a\sqrt{-\frac{1}{a}}$$

练习2、 把下列各式化成最简二次根式:

（1） $4\sqrt{1\frac{1}{2}}$ ； （2） $x\sqrt{\frac{y}{x^3}}$ $(x>0, y\geq 0)$

解（1） $4\sqrt{1\frac{1}{2}}=4\sqrt{\frac{3}{2}}=4\sqrt{\frac{3\times 2}{2\times 2}}=\frac{4\sqrt{6}}{2}=2\sqrt{6}$

（2） $x\sqrt{\frac{y}{x^3}}=x\sqrt{\frac{y\cdot x}{x^3\cdot x}}=\frac{x}{x^2}\sqrt{xy}=\frac{\sqrt{xy}}{x}$

练习3

把下列各式化成最简二次根式：

（1）$\sqrt{0.8}$　　（2）$\sqrt{4\frac{1}{2}}$

（3）$\sqrt{\frac{20a^2b}{c}}\left(a<0,b\geq0,c>0\right)$　　（4）$x^2\sqrt{\frac{1}{8x^3}}\left(x>0\right)$

$$\sqrt{0.8}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{4\times 5}{5\times 5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sqrt{4\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\sqrt{\frac{9\times 2}{2\times 2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{20a^2b}{c}}=\sqrt{\frac{4a^2\cdot 5b\cdot c}{c\cdot c}}=\frac{2\left|a\right|\sqrt{5bc}}{c}=-\frac{2a\sqrt{5bc}}{c}$$

$$x^2\sqrt{\frac{1}{8x^3}}=x^2\sqrt{\frac{1\times 2x}{8x^3\times 2x}}=\frac{x^2}{4x^2}\sqrt{2x}=\frac{\sqrt{2x}}{4}$$

这节你学到了什么？

1.最简二次根式的概念.

满足下列条件的二次根式，叫做最简二次根式。

（1）被开方数中不含能开得尽方的因数或因式；

（2）被开方数不含分母。

2.如何化二次根式为最简二次根式 .

（1）把被开方数分解因式(或因数)；

（2）将被开方数中开得尽方的因数(式)用它的正平方根代替后移到根号外面 .

（3）将被开方数中的分母化去

及时反馈

1、化简下列各式：

$$(1)\sqrt{250a^3b}\,(b<0);\qquad (1)-5a\sqrt{10ab}$$

$$(2)\sqrt{1-6x+9x^2}\,(x\geq\frac{1}{3})\qquad (2)3x-1$$

$$(3)\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(1-x)^2}\,(1<x<3)\quad (3)2$$

2、如果$\sqrt{a^3+a^2}=-a\sqrt{a+1}$，那么$a$的取值范围是（ D ）

A. $a \geq 0$

B. $a \geq -1$

C. $a < 1$

D. $-1 \leq a \leq 0$

3.化简$\frac{1}{x}\sqrt{-x^3}$

错解：原式$=\frac{1}{x}\sqrt{-x\cdot x^2}$

$=\frac{1}{x}\cdot x\cdot\sqrt{-x}$

$=\sqrt{-x}$

正解： 由$-x^3\geqslant 0$，得$x\leqslant 0$，

又x为分母不为0，

$\therefore x<0$

原式$=\frac{1}{x}\sqrt{-x\cdot x^2}$

$=\frac{1}{x}\cdot\sqrt{-x}\cdot\sqrt{x^2}$

$=\frac{|x|}{x}\sqrt{-x}$

$=\frac{1}{x}\cdot\sqrt{-x}\cdot(-x)$

$=-\sqrt{-x}$

分析：本题重点考察$\sqrt{x^2}=|x|$的应用，这里关键是确定x的符号，而$\sqrt{-x^3}$中隐含了$-x^3\geqslant 0$，即$x\leqslant 0$，此时$\sqrt{x^2}=-x$。

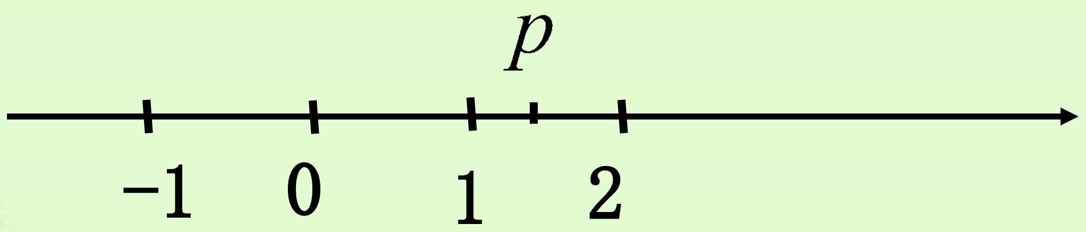
及时反馈

4、若$a<b$，则化简$\sqrt{(a-b)^2}$的结果为（**D**）

A. $a+b$　　B. $a-b$　　C. $-a-b$　　D. $-a+b$

5、实数p在数轴上的位置如图所示,化简:

$$\sqrt{(p-1)^2}+\sqrt{(p-2)^2}=\underline{\quad 1 \quad}.$$



及时反馈

6、已知三角形的三边长分别是 a、b、c，且 $a>c$，那么 $|c-a|-\sqrt{(a+c-b)^2}$ 等于（ D ）

A、$2a-b$　　B、$2c-b$

C、$b-2a$　　D、$b-2c$

7..当$a=\frac{1}{2}$时，求$\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a}}+\frac{1}{a}$的值

错解：原式$\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2}+\frac{1}{a}=a-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=a=\frac{1}{2}$

分析：上述做法中，没有注意到当$a=\frac{1}{2}$时，

$$a-\frac{1}{a}\text{ p }0,\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2}=\left|a-\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{a}-a$$

正解：

原式$=\sqrt{(a-\frac{1}{a})^2}+\frac{1}{a}=\left|a-\frac{1}{a}\right|+\frac{1}{a}\text{Q }a=\frac{1}{2},\therefore a-\frac{1}{a}\text{ p }0$

即$\left|a-\frac{1}{a}\right|+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}-a+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}-a$，当$a=\frac{1}{2}$时，原式$=4-\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$

$-ab\sqrt{a}$

8.若 $ab<0$,则化简 $\sqrt{a^3b^2}$ =______________.

9.若代数式 $\sqrt{(2-a)^2}+\sqrt{(a-4)^2}$ 的值是常数2,则a的取值范围是(C)

A. $a\geq 2$

B. $a\leq 2$

C. $2\leq a\leq 4$

D. $a=2$或$a=4$

二次根式化简

1. 被开方数是非完全平方数的二次根式化简

例 1　化简$\sqrt{48}$.

分析：因为，$48=16\times3=4^2\times3$，所以，根据公式$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $(a\geqslant0，b\geqslant0)$，就可以把积的是完全平方数或平方式的部分从二次根号下开出来，从而实现化简的目的.

解：$\sqrt{48}=\sqrt{16\times3}=\sqrt{16}\times\sqrt{3}=\sqrt{4^2}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

2. 被开方数是分数的二次根式化简

例 2　化简$\sqrt{\dfrac{1}{125}}$.

分析：因为，$125=5\times5\times5=5^2\times5$，所以，只需分子、分母同乘以 5 就可以了.

解法一：$\sqrt{\dfrac{1}{125}}=\sqrt{\dfrac{1\times5}{5^3\times5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{25}$.

3．被开方数是小数的二次根式化简

例 3　化简$\sqrt{1.5}$.

分析：被开方数是小数时，常把小数化成相应的分数，然后进行求解.

解：$\sqrt{1.5}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{3\times2}{2\times2}}=\sqrt{\frac{6}{2^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.