

湖北省浠水县实验高级中学 2022-2023 学年高三 4 月质量调研（二模）数学试题试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} 3x - 4y + 10 \geq 0 \\ x + 6y - 4 \geq 0 \\ 2x + y - 8 \leq 0 \end{cases}$$
，则 $z = x + 2y$ 的最大值是（ ）

- A. 4 B. 6 C. 8 D. 10

2. 设 $U = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $A = \{x \mid x^2 < 1, x \in U\}$ ，则 $C_U A =$ （ ）

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{-1, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

3. 已知集合 $A = \{x \mid x > 0\}$ ， $B = \{x \mid x^2 - x + b = 0\}$ ，若 $A \cap B = \{3\}$ ，则 $b =$ （ ）

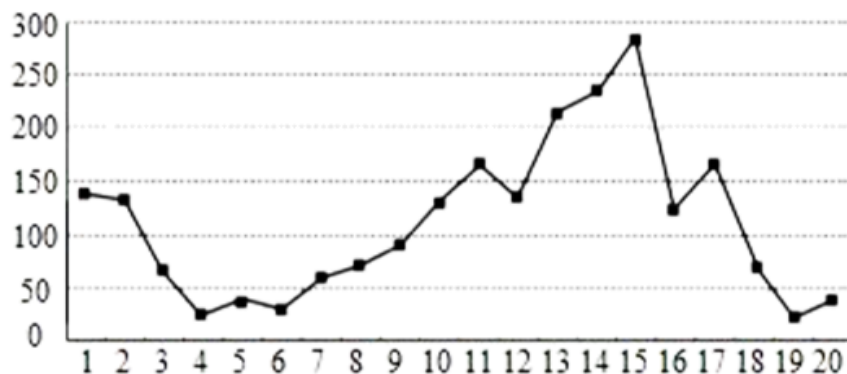
- A. -6 B. 6 C. 5 D. -5

4. 已知 i 为虚数单位，若复数 $z = \frac{1+2i}{2-i} + 1$ ，则 $\bar{z} =$

- A. $\frac{9}{5} + i$ B. $1 - i$
C. $1 + i$ D. $-i$

5. 空气质量指数 AQI 是反映空气状况的指数， AQI 指数值趋小，表明空气质量越好，下图是某市 10 月 1 日-20 日

AQI 指数变化趋势，下列叙述错误的是（ ）



A. 这 20 天中 AQI 指数值的中位数略高于 100

B. 这 20 天中的中度污染及以上 (AQI 指数 >150) 的天数占 $\frac{1}{4}$

C. 该市 10 月的前半个月的空气质量越来越好

D. 总体来说, 该市 10 月上旬的空气质量比中旬的空气质量好

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(a) > f(b)$, 则下列不等关系正确的是 ()

A. $\frac{1}{a^2+1} < \frac{1}{b^2+1}$

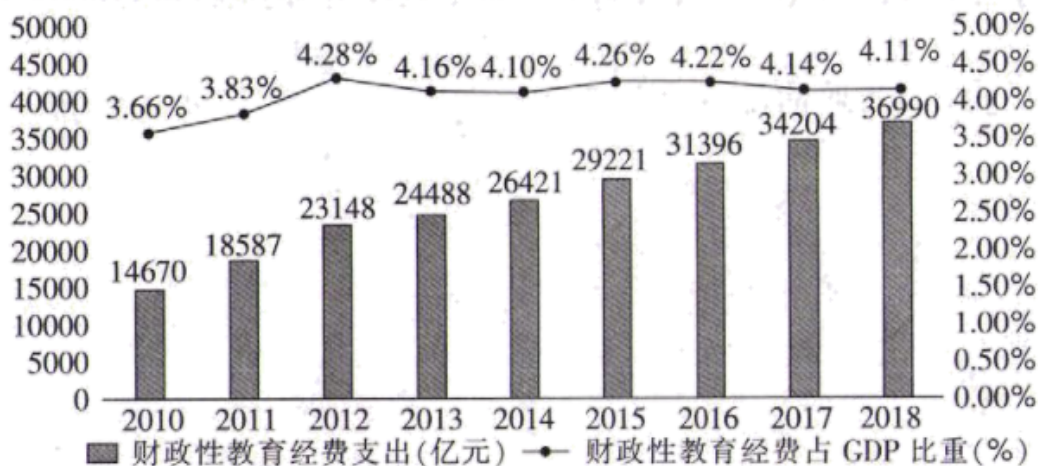
B. $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$

C. $a^2 < ab$

D. $\ln(a^2+1) > \ln(b^2+1)$

7. 国务院发布《关于进一步调整优化结构、提高教育经费使用效益的意见》中提出, 要优先落实教育投入. 某研究机构统计了 2010 年至 2018 年国家财政性教育经费投入情况及其在 GDP 中的占比数据, 并将其绘制成下表, 由下表可知下列叙述错误的是 ()

2010-2018 年国家财政性教育经费投入情况及其在 GDP 中的占比情况 (单位: 亿元, %)



A. 随着文化教育重视程度的不断提高, 国在财政性教育经费的支出持续增长

B. 2012 年以来, 国家财政性教育经费的支出占 GDP 比例持续 7 年保持在 4% 以上

C. 从 2010 年至 2018 年, 中国 GDP 的总值最少增加 60 万亿

D. 从 2010 年到 2018 年, 国家财政性教育经费的支出增长最多的年份是 2012 年

8. 已知集合 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{2, 3, 4, 5\}$, 则 $(A \cap B) \cup C =$ ()

A. $\{1, 2, 3, 5\}$

B. $\{1, 2, 3, 4\}$

C. $\{2, 3, 4, 5\}$

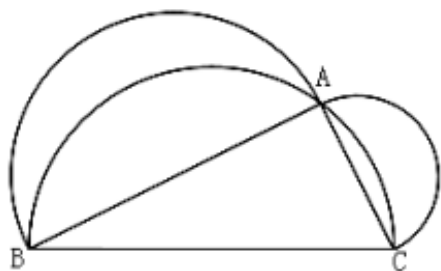
D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

9. 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点 F 的直线过 C 的上顶点 B , 且与椭圆 C 相交于另一点 A , 点 A 在 y

轴上的射影为 A' ，若 $\frac{|FO|}{|AA'|} = \frac{3}{4}$ ， O 是坐标原点，则椭圆 C 的离心率为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 下图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC 、直角边 AB 、 AC ，已知以直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$ ，记 $\angle ABC = \alpha$ ，则 $\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha =$ （ ）

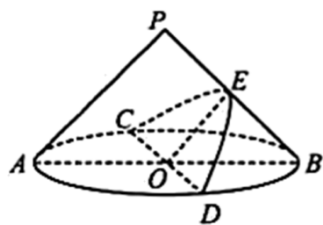


- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. 1 D. $\frac{8}{5}$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ， P 为双曲线 C 上一点， Q 为双曲线 C 渐近线上一点， P, Q 均位于第一象限，且 $2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PF_2}$ ， $\overrightarrow{QF_1} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$ ，则双曲线 C 的离心率为（ ）

- A. $\sqrt{3} - 1$ B. $\sqrt{3} + 1$ C. $\sqrt{13} + 2$ D. $\sqrt{13} - 2$

12. 如图，圆锥底面半径为 $\sqrt{2}$ ，体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ ， AB, CD 是底面圆 O 的两条互相垂直的直径， E 是母线 PB 的中点，已知过 CD 与 E 的平面与圆锥侧面的交线是以 E 为顶点的抛物线的一部分，则该抛物线的焦点到圆锥顶点 P 的距离等于（ ）



- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 实数 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq 2x-1 \\ x+y \leq m \end{cases}$, 如果目标函数 $z = x - y$ 的最小值为 -2 , 则 $\frac{y}{x}$ 的最小值为_____.

14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 椭圆的焦距为 $2c$, 过 C 外一点 $P(c, 2c)$ 作线段

PF_1, PF_2 分别交椭圆 C 于点 A, B , 若 $|PA| = |AF_1|$, 则 $\frac{|PF_2|}{|BF_2|} =$ _____.

15. 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = 0$, 则 $\cos(2\alpha + \frac{\pi}{2}) =$ _____.

16. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两个焦点为 $F_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0), F_2(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, 点 P 是第一象限内双曲线上的点, 且 $\tan \angle PF_1F_2 = \frac{1}{2}, \tan \angle PF_2F_1 = -2$, 则双曲线的离心率为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 某健身馆为响应十九届四中全会提出的“聚焦增强人民体质, 健全促进全民健身制度性举措”, 提高广大市民对全民健身运动的参与程度, 推出了健身促销活动, 收费标准如下: 健身时间不超过 1 小时免费, 超过 1 小时的部分每小时收费标准为 20 元 (不足 1 小时的部分按 1 小时计算). 现有甲、乙两人各自独立地来该健身馆健身, 设甲、乙健身时间不超过 1 小时的概率分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$, 健身时间 1 小时以上且不超过 2 小时的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, 且两人健身时间都不会超过 3 小时.

(1) 设甲、乙两人所付的健身费用之和为随机变量 ξ (单位: 元), 求 ξ 的分布列与数学期望 $E(\xi)$;

(2) 此促销活动推出后, 健身馆预计每天约有 300 人来参与健身活动, 以这两人健身费用之和的数学期望为依据, 预测此次促销活动后健身馆每天的营业额.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln(ax) - a, (a > 0)$.

(1) 若函数 $h(x) = e^x f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的值;

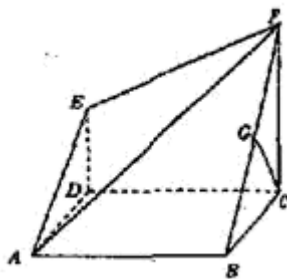
(2) 定义: 若直线 $l: y = kx + b$ 与曲线 $C_1: f_1(x, y) = 0, C_2: f_2(x, y) = 0$ 都相切, 我们称直线 l 为曲线 C_1, C_2 的公切线, 证明: 曲线 $f(x) = \ln(ax) - a, (a > 0)$ 与 $g(x) = ae^x, (a > 0)$ 总存在公切线.

19. (12 分) 已知集合 $A = \{x | \log_2(x+3) \leq 3\}, B = \{x | 2m-1 < x \leq m+3\}$.

(1) 若 $m = 3$, 则 $A \cup B$;

(2) 若 $A \cap B = B$, 求实数 m 的取值范围.

20. (12 分) 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 是正方形, $CF \perp$ 平面 $ABCD$, $CF \parallel PDE$, $AB = CF = 2DE = 2$, G 为 BF 的中点.



(1) 求证: $CG \perp AF$;

(2) 求平面 BCF 与平面 AEF 所成角的正弦值.

21. (12 分) 在直角坐标系 l 中, 已知直线 l 的直角坐标方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$ (θ 为

参数), 以直角坐标系原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$.

(1) 求曲线 C_1 和直线 l 的极坐标方程;

(2) 已知直线 l 与曲线 C_1 、 C_2 相交于异于极点的点 A, B , 若 A, B 的极径分别为 ρ_1, ρ_2 , 求 $|\rho_1 - \rho_2|$ 的值.

22. (10 分) 已知函数 $f(x) = x^2 - a|x-1| - 1$, $a \in R$.

(1) 当 $a = 4$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) $\exists x_0 \in [0, 2]$, $f(x_0) \geq a|x_0 + 1|$, 求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

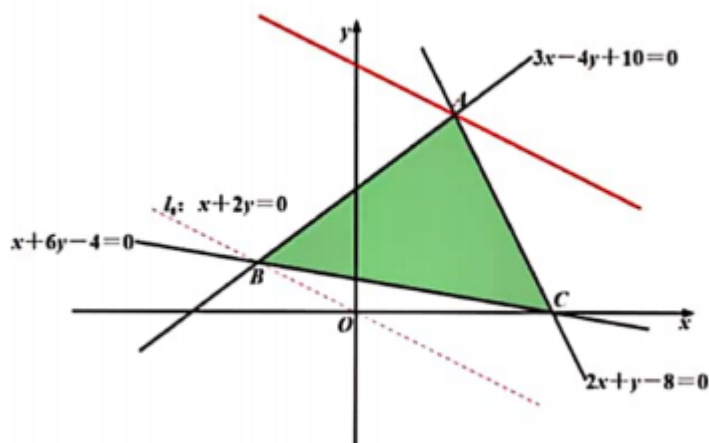
1. D

【解析】

作出不等式对应的平面区域, 由目标函数的几何意义, 通过平移即可求 z 的最大值.

【详解】

作出不等式组的可行域, 如图阴影部分, 作直线 $l_0: x + 2y = 0$ 在可行域内平移当过点 A 时, $z = x + 2y$ 取得最大值.



由 $\begin{cases} 3x - 4y + 10 \geq 0 \\ 2x + y - 8 \leq 0 \end{cases}$ 得: $A(2, 4)$, $\therefore z_{\max} = 10$

故选: D

【点睛】

本题主要考查线性规划的应用, 利用数形结合是解决线性规划题目的常用方法, 属于基础题.

2. B

【解析】

先化简集合 A, 再求 $C_U A$.

【详解】

由 $x^2 < 1$ 得: $-1 < x < 1$, 所以 $A = \{0\}$, 因此 $\complement_U A = \{-1, 1, 2\}$, 故答案为 B

【点睛】

本题主要考查集合的化简和运算, 意在考查学生对这些知识的掌握水平和计算推理能力.

3. A

【解析】

由 $A \cap B = \{3\}$, 得 $3 \in B$, 代入集合 B 即可得 b.

【详解】

$Q A \cap B = \{3\}$, $\therefore 3 \in B$, $\therefore 9 - 3 + b = 0$, 即: $b = -6$,

故选: A

【点睛】

本题考查了集合交集的含义, 也考查了元素与集合的关系, 属于基础题.

4. B

【解析】

因为 $z = \frac{1+2i}{2-i} + 1 = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} + 1 = \frac{2+i+4i+2i^2}{5} + 1 = 1+i$ ，所以 $\bar{z} = 1-i$ ，故选 B.

5. C

【解析】

结合题意，根据题目中的 20 天的 AQI 指数值，判断选项中的命题是否正确.

【详解】

对于 A，由图可知 20 天的 AQI 指数值中有 10 个低于 100，10 个高于 100，其中第 10 个接近 100，第 11 个高于 100，所以中位数略高于 100，故 A 正确.

对于 B，由图可知 20 天的 AQI 指数值中高于 150 的天数为 5，即占总天数的 $\frac{1}{4}$ ，故 B 正确.

对于 C，由图可知该市 10 月的前 4 天的空气质量越来越好，从第 5 天到第 15 天空气质量越来越差，故 C 错误.

对于 D，由图可知该市 10 月上旬大部分指数在 100 以下，中旬大部分指数在 100 以上，所以该市 10 月上旬的空气质量比中旬的空气质量好，故 D 正确.

故选：C

【点睛】

本题考查了对折线图数据的分析，读懂题意是解题关键，并能运用所学知识对命题进行判断，本题较为基础.

6. B

【解析】

利用函数的单调性得到 a, b 的大小关系，再利用不等式的性质，即可得答案.

【详解】

$\because f(x)$ 在 R 上单调递增，且 $f(a) > f(b)$ ， $\therefore a > b$.

$\because a, b$ 的符号无法判断，故 a^2 与 b^2 ， a^2 与 ab 的大小不确定，

对 A，当 $a=1, b=-1$ 时， $\frac{1}{a^2+1} = \frac{1}{b^2+1}$ ，故 A 错误；

对 C，当 $a=1, b=-1$ 时， $a^2=1, ab=-1$ ，故 C 错误；

对 D，当 $a=1, b=-1$ 时， $\ln(a^2+1) = \ln(b^2+1)$ ，故 D 错误；

对 B，对 $a > b$ ，则 $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$ ，故 B 正确.

故选：B.

【点睛】

本题考查分段函数的单调性、不等式性质的运用，考查函数与方程思想、转化与化归思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，属于基础题.

7. C

【解析】

观察图表，判断四个选项是否正确.

【详解】

由表易知 A 、 B 、 D 项均正确，2010 年中国 GDP 为 $\frac{1.4670}{3.55\%} \approx 41$ 万亿元，2018 年中国 GDP 为 $\frac{3.6990}{4.11\%} = 90$ 万亿

元，则从 2010 年至 2018 年，中国 GDP 的总值大约增加 49 万亿，故 C 项错误.

【点睛】

本题考查统计图表，正确认识图表是解题基础.

8. D

【解析】

根据集合的基本运算即可求解.

【详解】

解：Q $A = \{1, 3, 5\}$ ， $B = \{1, 2, 3\}$ ， $C = \{2, 3, 4, 5\}$ ，

则 $(A \cap B) \cup C = \{1, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

故选：D.

【点睛】

本题主要考查集合的基本运算，属于基础题.

9. D

【解析】

求得点 B 的坐标，由 $\frac{|FO|}{|AA'|} = \frac{3}{4}$ ，得出 $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{FA}$ ，利用向量的坐标运算得出点 A 的坐标，代入椭圆 C 的方程，可得

出关于 a 、 b 、 c 的齐次等式，进而可求得椭圆 C 的离心率.

【详解】

由题意可得 $B(0, b)$ 、 $F(-c, 0)$.

由 $\frac{|FO|}{|AA'|} = \frac{3}{4}$ ，得 $\frac{|BF|}{|BA|} = \frac{3}{4}$ ，则 $\frac{|BF|}{|FA|} = \frac{3}{1}$ ，即 $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{FA}$.

而 $\overrightarrow{BF}=(-c,-b)$ ，所以 $\overrightarrow{FA}=\left(-\frac{c}{3},-\frac{b}{3}\right)$ ，所以点 $A\left(-\frac{4}{3}c,-\frac{b}{3}\right)$.

因为点 $A\left(-\frac{4}{3}c, -\frac{b}{3}\right)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上, 则 $\frac{\left(-\frac{4}{3}c\right)^2}{a^2} + \frac{\left(-\frac{b}{3}\right)^2}{b^2} = 1$,

整理可得 $\frac{16}{9} \cdot \frac{c^2}{a^2} = \frac{8}{9}$, 所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, 所以 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

即椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

故选: D.

【点睛】

本题考查椭圆离心率的求解, 解答的关键就是要得出 a 、 b 、 c 的齐次等式, 充分利用点 A 在椭圆上这一条件, 围绕求点 A 的坐标来求解, 考查计算能力, 属于中等题.

10. D

【解析】

根据以直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比求得 $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$, 即 $\tan \alpha$ 的值, 由此求得 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值, 进而求得所求表达式的值.

【详解】

由于直角边 AC 、 AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$, 所以 $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$, 即 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

所以 $\cos^2 \alpha + \sin 2\alpha = \frac{4}{5} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}$.

故选: D

【点睛】

本小题主要考查同角三角函数的基本关系式, 考查二倍角公式, 属于基础题.

11. D

【解析】

由双曲线的方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , P 为双曲线 C 上的一点, Q 为双曲线 C 的渐近线上的一点,

且 P, Q 都位于第一象限, 且 $2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PF_2}, \overrightarrow{QF_1} \cdot \overrightarrow{QF_2} = 0$,

可知 P 为 QF_2 的三等分点, 且 $\overrightarrow{QF_1} \perp \overrightarrow{QF_2}$,

点 Q 在直线 $bx - ay = 0$ 上, 并且 $|\overrightarrow{OQ}| = c$, 则 $Q(a, b)$, $F_2(c, 0)$,

设 $P(x_1, y_1)$ ，则 $2(x_1 - a, y_1 - b) = (c - x_1, -y_1)$ ，

解得 $x_1 = \frac{2a+c}{3}$, $y_1 = \frac{2b}{3}$ ，即 $P(\frac{2a+c}{3}, \frac{2b}{3})$ ，

代入双曲线的方程可得 $\frac{(2a+c)^2}{4a^2} - \frac{1}{4} = 1$ ，解得 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{13} - 2$ ，故选 D.

点睛：本题考查了双曲线的几何性质，离心率的求法，考查了转化思想以及运算能力，双曲线的离心率是双曲线最重要的几何性质，求双曲线的离心率(或离心率的取值范围)，常见有两种方法：①求出 a, c ，代入公式 $e = \frac{c}{a}$ ；②只需要根据一个条件得到关于 a, b, c 的齐次式，转化为 a, c 的齐次式，然后转化为关于 e 的方程(不等式)，解方程(不等式)，即可得 e (e 的取值范围)。

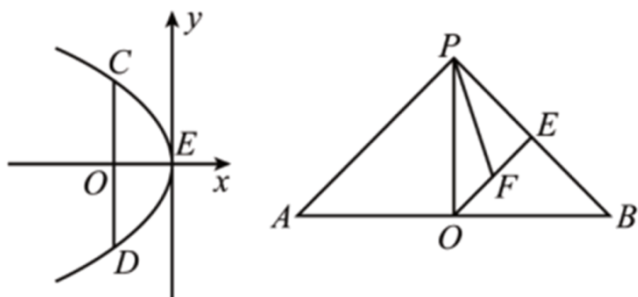
12. D

【解析】

建立平面直角坐标系，求得抛物线的轨迹方程，解直角三角形求得抛物线的焦点到圆锥顶点 P 的距离。

【详解】

将抛物线放入坐标系，如图所示，



$$\because PO = \sqrt{2}, OE = 1, OC = OD = \sqrt{2},$$

$$\therefore C(-1, \sqrt{2}), \text{ 设抛物线 } y^2 = 2px, \text{ 代入 } C \text{ 点,}$$

$$\text{可得 } y^2 = -2x$$

$$\therefore \text{焦点为 } \left(-\frac{1}{2}, 0\right),$$

即焦点为 OE 中点，设焦点为 F ，

$$EF = \frac{1}{2}, PE = 1, \therefore PF = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故选：D

【点睛】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/288122130051006137>