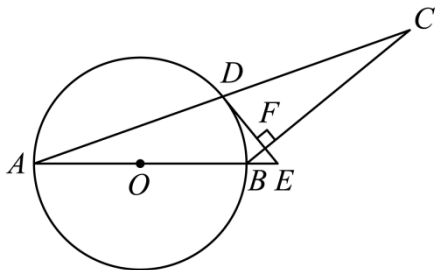


06 圆综合

1. (2023·江苏宿迁·统考二模) 如图, D 是以 AB 为直径的 $\odot O$ 上一点, 过点 D 的切线 DE 交 AB 的延长线于点 E 过点 B 作 $BC \perp DE$ 交 AD 的延长线于点 C , 垂足为点 F .



(1) 求证: $AB = BC$;

(2) 若 $\odot O$ 的直径 AB 为 9, $\sin A = \frac{1}{3}$, 求线段 BE 的长.

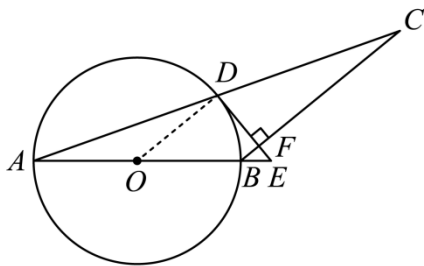
【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{9}{7}$

【分析】(1) 连接 OD , 根据切线的性质得出 $OD \perp DE$, 再由平行线判定得出 $OD \parallel BC$, 利用其性质及等角对等边即可证明;

(2) 连接 BD , 根据圆周角定理得出 $\angle ADB = 90^\circ$, 再由正弦函数得出 $BD = 3$, 利用等边对等角及等量代换得出 $\angle A = \angle FDB$, 再由相似三角形的判定和性质求解即可.

【详解】(1) 证明: 连接 OD , 如图,



$\because DE$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OD \perp DE$.

$\because BC \perp DE$,

$\therefore OD \parallel BC$.

$\therefore \angle ODA = \angle C$. $\because OA = OD$,

$\therefore \angle ODA = \angle A$.

$\therefore \angle A = \angle C$.

$\therefore AB = BC$.

(2) 连接 BD , 则 $\angle ADB = 90^\circ$, 如图,

$$(2) OE = \frac{25}{3}$$

【分析】(1) 根据垂径定理的推论可得 $OD \perp BC$ ，即 $\angle OFB = 90^\circ$ ，根据三角形内角和定理即可得出 $\angle EAO = \angle BFO = 90^\circ$ ，进而证明 AE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 连接 AC ．根据 AB 是 $\odot O$ 的直径，得出 $\angle ACB = 90^\circ$ ，进而根据中位线的性质得出 $OF = \frac{1}{2}AC = 3$ ，勾股定理得出 $BO = \sqrt{OF^2 + BF^2} = 5$ ，根据 (1) 的结论证明 $\triangle OBF \sim \triangle OEA$ ，根据相似三角形的性质，即可求解．

【详解】(1) 证明： $\because$ 点 D 是弧 BC 的中点，

$$\therefore OD \perp BC,$$

$$\therefore \angle OFB = 90^\circ,$$

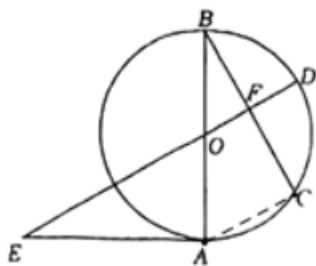
$$\because \angle E = \angle B, \angle BOF = \angle EOA,$$

$$\therefore \angle EAO = \angle BFO = 90^\circ,$$

$$\therefore OA \perp AE,$$

即 AE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 如图所示，连接 AC ．



$$\because AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径}, \therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because BF \perp OD,$$

$$\therefore BF = CF = 4,$$

$$\because AO = BO,$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2}AC = 3,$$

$$\therefore BO = \sqrt{OF^2 + BF^2} = 5, \text{ 则 } AO = BO = 5,$$

$$\because \angle OFB = \angle OAE, \angle OBF = \angle E,$$

$$\therefore \triangle OBF \sim \triangle OEA,$$

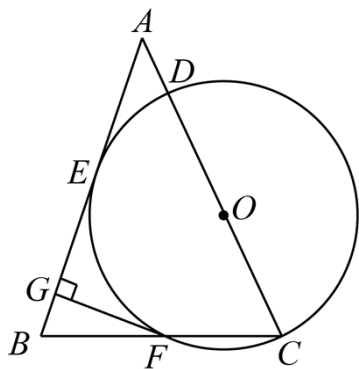
$$\therefore \frac{OA}{OF} = \frac{OE}{OB},$$

$$\therefore \frac{5}{3} = \frac{OE}{5},$$

解得： $OE = \frac{25}{3}$.

【点睛】 本题考查了垂径定理的推论，切线的性质与判定，相似三角形的性质与判定，熟练掌握以上知识是解题的关键.

3. (2023·江苏常州·统考一模) 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 AC 上一点，以 CD 为直径的 $\odot O$ 与 AB 相切于点 E ，交 BC 于点 F ， $FG \perp AB$ ，垂足为 G .



(1) 求证: FG 是 $\odot O$ 的切线;

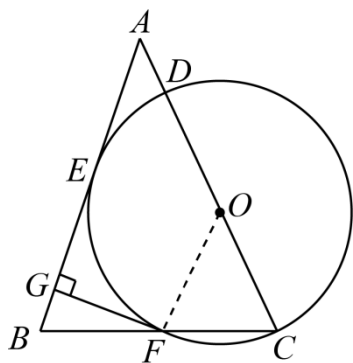
(2) 若 $BG = 1$ ， $BF = 3$ ，求 CF 的长.

【答案】 (1) 见解析

(2) $CF = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

【分析】 (1) 由等腰三角形的性质可证 $\angle B = \angle C = \angle OFC$ ，可证 $OF \parallel AB$ ，可得结论;

(2) 由切线的性质可证四边形 $GFOE$ 是矩形，可得 $OE = GF = 2\sqrt{2}$ ，由锐角三角函数可求解. 【详解】 (1) 证明：如图，连接 OF ，



$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\because OF = OC,$$

$$\therefore \angle C = \angle OFC,$$

$$\therefore \angle OFC = \angle B,$$

$$\therefore OF \parallel AB,$$

$$\because FG \perp AB,$$

$\therefore GF$ 是 $\odot O$ 的切线;

$$\therefore CF = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

4. (2023·江苏苏州·统考一模) 已知: BD 为 $\odot O$ 的直径, O 为圆心, 点 A 为圆上一点, 过点 B 作的 $\odot O$ 切线交 DA 的延长线于点 F , 点 C 为 $\odot O$ 上一点, 且 $AB = AC$, 连接 BC 交 AD 于点 E .

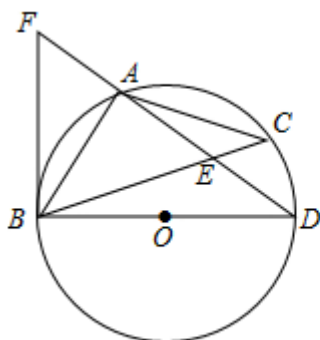


图1

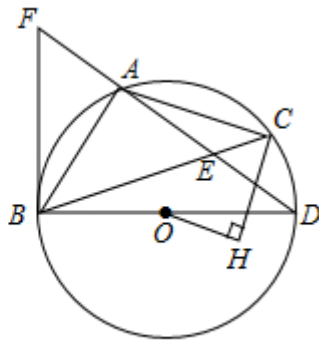


图2

(1)如图 1，求证： $\angle ABF = \angle ABC$ ；

(2)如图 2，点 H 为 $\odot O$ 内部一点，连接 OH ， CH ．若 $\angle OHC = \angle HCA = 90^\circ$ ， $\odot O$ 的半径为 10， $OH = 6$ ，求 DA 的长．

【答案】(1)见解析

(2) $AD = 16$

【分析】(1) 由 BD 为 $\odot O$ 的直径，得出 $\angle D + \angle ABD = 90^\circ$ ，由 FB 是 $\odot O$ 的切线，得出 $\angle FBA + \angle ABD = 90^\circ$ ，则 $\angle FBA = \angle D$ ，根据 $AB = AC$ ，得出 $\angle C = \angle ABC$ ，根据等弧所对的圆周角得出 $\angle C = \angle D$ ，等量代换即可求解；

(2) 连接 OC ，证明 $\triangle ABD \sim \triangle HOC$ ， $\triangle ABD \sim \triangle HOC$ ，根据相似三角形的性质得出 $AB = 2OH = 12$ ， $BD = 20$ ，进而根据勾股定理即可求解．

【详解】(1) 解： $\because BD$ 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D + \angle ABD = 90^\circ,$$

$\because FB$ 是 $\odot O$ 的切线，

$$\therefore \angle FBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBA + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBA = \angle D,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle C = \angle ABC,$$

$$\because \angle C = \angle D,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle ABC;$$

(2) 如图 2，连接 OC ，

$$\because \angle OHC = \angle HCA = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \parallel OH,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle COH,$$

(2) $BE = 3.6$

(2) 连接 DE ，证明 $\triangle BDE \sim \triangle BCA$ ，根据相似三角形的性质列出比例式，代入数据即可求解。

Diagram for Question 1: A circle with center O . A triangle ABC is inscribed in the circle. A line segment DE is drawn parallel to BC , with D on AB and E on AC . A line segment DF is drawn parallel to AC , with F on the circle. The arc DC is marked with a double red tick, indicating $\widehat{DC} = \widehat{DC}$.

$$\therefore AC = DF,$$

又 $\because \angle B = \angle B$,

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{BA},$$

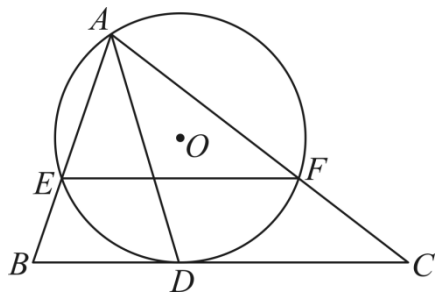
$$\because AC = BC = 10, AB = 12, CF = 3,$$

$$\therefore BD = CF = 3,$$

$$\therefore \frac{3}{10} = \frac{BE}{12},$$

解得： $BE = 3.6$

【点睛】本题考查了同弧所对的圆周角相等，圆内接四边形对角互补，相似三角形的性质与判定，平行四边形的性质与判定，熟练掌握以上知识是解题的关键. 6. (2023·江苏扬州·模拟预测) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $CA = CB$ ， E 为 AB 上一点，作 $EF \parallel BC$ ，与 AC 交于点 F ，经过点 A 、 E 、 F 的 $\odot O$ 与 BC 相切于点 D ，连接 AD 。



(1) 求证： AD 平分 $\angle BAC$ ；

(2) 若 $AE = 10$ ， $BE = 8$ ，求 AC 的长。

【答案】(1) 证明见解析

(2) $AC = 36$

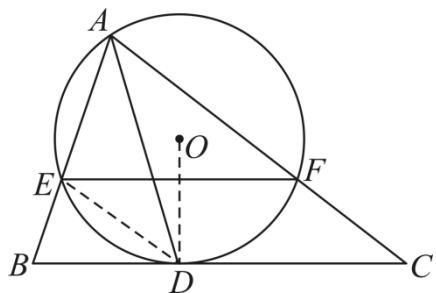
【分析】(1) 连接 OD ， $\odot O$ 与 BC 相切于点 D ，推出 $OD \perp BC$ ，已知 $EF \parallel BC$ ，得到 $OD \perp EF$ ，推出 $\widehat{DE} = \widehat{DF}$ ，进而得到 $\angle BAD = \angle CAD$ ，得证 AD 平分 $\angle BAC$ ；

(2) 连接 DE ，已知 $EF \parallel BC$ ，得到 $\angle BDE = \angle DEF$ ，结合 $\angle BAD = \angle CAD = \angle DEF$ ，得到 $\angle BDE = \angle BAD$ ，已知 $\angle DBE = \angle ABD$ ，得到 $\triangle BDE \sim \triangle BAD$ ，可求得 $BD = 12$ ，

得到 $\frac{DE}{AD} = \frac{BE}{BD} = \frac{2}{3}$ ，进一步证明 $\triangle ADE \sim \triangle ACD$ ，得到 $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CD}$ ，即

$CD = \frac{DE}{AD} \cdot AC = \frac{2}{3} AC$ ，已知 $AC = CB$ ，即可求得 CD 的长，进而可得 AC 的长。

【详解】(1) 证明：连接 OD ，



$\because \odot O$ 与 BC 相切于点 D ,

$\therefore OD \perp BC$,

$\because EF \parallel BC$,

$\therefore OD \perp EF$,

$\therefore \widehat{DE} = \widehat{DF}$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$,

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$; (2) 解: 连接 DE ,

$\because EF \parallel BC$,

$\therefore \angle BDE = \angle DEF$,

又 $\because \angle BAD = \angle CAD = \angle DEF$,

$\therefore \angle BDE = \angle BAD$,

又 $\because \angle DBE = \angle ABD$,

$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BAD$,

$$\therefore \frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BD},$$

$$\therefore BD^2 = BE \cdot BA = BE \cdot (BE + AE) = 8 \times (8 + 10) = 144,$$

$$\therefore BD = 12,$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{BE}{BD} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3},$$

$\because EF \parallel BC$,

$\therefore \angle AFE = \angle C$,

又 $\because \angle AFE = \angle ADE$,

$\therefore \angle ADE = \angle C$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACD$,

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CD},$$

$$\therefore CD = \frac{DE}{AD} \cdot AC = \frac{2}{3} AC,$$

$\because AC = CB$,

$$\therefore CD = \frac{2}{3} (BD + CD) = \frac{2}{3} \times (12 + CD),$$

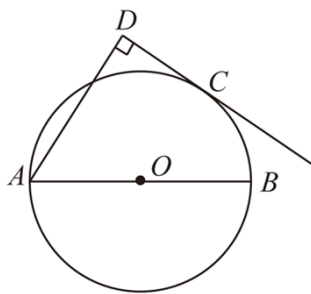
$$\therefore CD = 24,$$

$$\therefore AC = \frac{3}{2} \times CD = 36.$$

【点睛】本题主要考查平行线的性质，圆周角定理，相似三角形的判定及性质，熟练掌握相关知识点是解题的关键。

7. (2023·江苏扬州·统考一模) 如图, AB 是 $\odot O$ 直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, AD 垂直于过点

C 的切线, 垂足为 D , 且 $\angle BAD = 60^\circ$,



(1) 求 $\angle DAC$ 的度数;

(2) 若 DC 长为 $\sqrt{3}$, 求 $\odot O$ 的半径长,

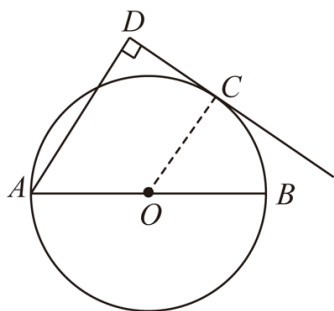
【答案】 (1) 30°

(2) 2

【分析】 (1) 如图所示, 连接 OC , 可证 $AD \parallel OC$, $\angle COB = \angle BAD = 60^\circ$, 且 $OA = OC$, 根据等腰三角形, 三角形的外角和性质即可求解;

(2) 如图所示, 连接 OC, BC , 根据题意, 构成 $\text{Rt}\triangle ACB$, 根据含特殊角的直角三角形中边的关系即可求解.

【详解】 (1) 解: 如图所示, 连接 OC ,



$$\therefore OC \perp DC,$$

$$\because AD \perp DC,$$

$$\therefore AD \parallel OC,$$

$$\therefore \angle COB = \angle BAD = 60^\circ,$$

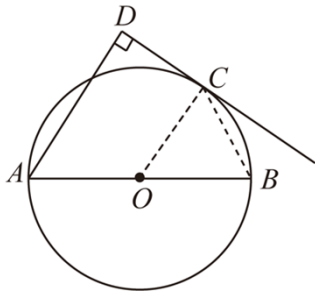
$\because \angle COB$ 是 $\triangle AOC$ 的外角, 且 $OA = OC$, 即 $\triangle AOC$ 是等腰三角形,

$$\therefore \angle CAO = \angle ACO, \text{ 且 } \angle CAO + \angle ACO = \angle COB,$$

$$\therefore \angle CAO = \frac{1}{2} \angle COB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAD - \angle CAO = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$\therefore \angle DAC$ 的度数为 30° . (2) 解: 如图所示, 连接 OC, BC ,



$\because AB$ 是 $\odot O$ 直径, DC 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

由 (1) 可知, $\angle DAC = \angle CAB = 30^\circ$, 且 $AD \perp DC$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $AC = 2DC = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

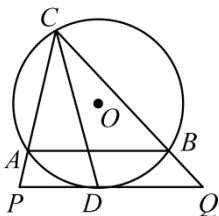
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = 2BC$, 设 $BC = x$, 则 $AB = 2x$,

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$, 即 $\sqrt{(2x)^2 - x^2} = 2\sqrt{3}$, 解得, $x = 2$ (负值舍去), 即 $BC = 2$,

$\therefore AB = 4$, 则 $\odot O$ 的半径长为 $OA = OB = 2$.

【点睛】本题主要考查圆与三角形的综合, 掌握切线的性质, 平行线的性质, 等腰三角形的性质, 三角形的外角和性质等知识是解题的关键.

8. (2023·江苏镇江·镇江市外国语学校校考一模) 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, CD 平分 $\angle ACB$ 交 $\odot O$ 于 D , 过点 D 作 $PQ \parallel AB$ 分别交 CA 、 CB 延长线于 P 、 Q , 连接 BD .



(1) 求证: PQ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 求证: $BD^2 = AC \cdot BQ$;

(3) 若 AC 、 BQ 的长是关于 x 的方程 $x^2 - mx + 4 = 0$ 的两实根, 且 $\tan \angle PCD = \frac{1}{3}$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

(3) $\sqrt{10}$ 【分析】(1) 欲证明 PQ 是 $\odot O$ 切线, 只要证明 $OD \perp PQ$ 即可;

(2) 连接 AD , 根据等腰三角形的判定得到 $AD = BD$, 根据相似三角形的性质即可得到结论;

(3) 根据题意得到 $AC \cdot BQ = 16$, 得到 $BD = 4$, 由 (1) 知 PQ 是 $\odot O$ 的切线, 由切线的

性质得到 $OD \perp PQ$ ，根据平行线的性质得到 $OD \perp AB$ ，根据三角函数的定义得到

$BE = 3DE$ ，根据勾股定理得到 $BE = \frac{3\sqrt{10}}{5}$ ，设 $OB = OD = R$ ，根据勾股定理即可得到结

论。

【详解】（1）解：证明： $\because PQ \parallel AB$ ，

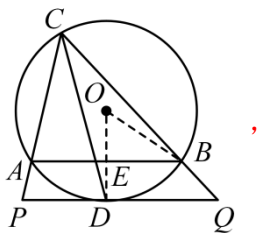
$$\therefore \angle ABD = \angle BDQ,$$

$$\because \angle ACD = \angle ABD$$

$$\because \angle BCD = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BDQ,$$

如图，连接 OB ， OD ，交 AB 于 E ，



则 $\angle O = 2\angle DCB = 2\angle BDQ$ ， $\angle OBD = \angle ODB$ ，

在 $\triangle OBD$ 中， $\angle OBD + \angle ODB + \angle O = 180^\circ$ ，

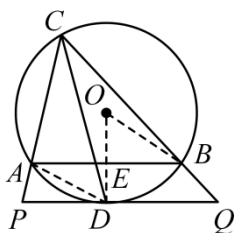
$$\therefore 2\angle ODB + 2\angle BDQ = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ODB + \angle O = 90^\circ,$$

$\because OD$ 是半径，

$\therefore PQ$ 是 $\odot O$ 的切线；

（2）如图，连接 AD ，



由（1）知 PQ 是 $\odot O$ 的切线， $OD \perp PQ$ ， $\therefore \angle BDQ = \angle DCB = \angle ACD = \angle BCD = \angle BAD$ ，

$$\therefore AD = BD,$$

$\because$ 四边形 $ADBC$ 内接于 $\odot O$ ，

$$\therefore \angle DBQ = \angle CAD,$$

$$\because \angle BDQ = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle BDQ \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{AD}{BQ} = \frac{AC}{BD}, \text{ 即 } \frac{BD}{BQ} = \frac{AC}{BD},$$

$$\therefore BD^2 = AC \cdot BQ;$$

(3) $\because AC$ 、 BQ 的长是关于 x 的方程 $x^2 - mx + 4 = 0$ 的两实根,

$$\therefore AC \cdot BQ = 4,$$

由 (2) 得 $BD^2 = AC \cdot BQ$,

$$\therefore BD^2 = 4,$$

$$\therefore BD = 2,$$

由 (1) 知 PQ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore OD \perp PQ,$$

$$\because PQ \parallel AB,$$

$$\therefore OD \perp AB,$$

由 (1) 得 $\angle PCD = \angle ABD$,

$$\because \tan \angle PCD = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \tan \angle ABD = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BE = 3DE,$$

$$\therefore DE^2 + (3DE)^2 = BD^2 = 4,$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore BE = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

设 $OB = OD = R$,

$$\therefore OE = R - \frac{\sqrt{10}}{5},$$

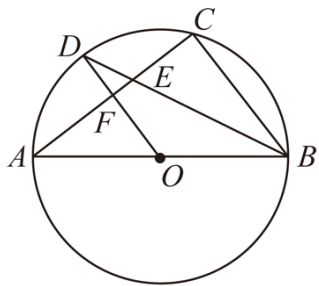
$$\because OB^2 = OE^2 + BE^2, \therefore R^2 = \left(R - \frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2,$$

解得: $R = \sqrt{10}$,

$\therefore \odot O$ 的半径 $R = \sqrt{10}$.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，一元二次方程根与系数的关系，圆周角定理，平行线的判定和性质，勾股定理，角平分线的定义，正确的作出辅助线是解题的关键，属于中考压轴题.

9. 2023·江苏无锡·统考一模)如图,以 AB 为直径的 $\odot O$ 经过 $\triangle ABC$ 的顶点 C , D 是 $\widehat{AC}$ 的中点,连接 BD 、 OD 分别交 AC 于点 E 、 F .



(1) 求证: $\triangle DEF \sim \triangle BEC$;

(2) 若 $DE = 2$, $BE = 6$, 求 $\odot O$ 的面积.

【答案】(1) 见解析

(2) 20π

【分析】(1) 根据圆周角定理求出 $\angle DBC = \angle DBA$, 根据等腰三角形性质求出 $\angle ODB = \angle DBA$, 得出 $\angle DBC = \angle ODB$, 根据 $\angle DEF = \angle BEC$, 即可得出结论;

(2) 证明 $\triangle ADE \sim \triangle BDA$, 得出 $\frac{DE}{AD} = \frac{AD}{BD}$, 求出 $AD = 4$, 根据勾股定理求出 $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 4\sqrt{5}$, 根据圆的面积公式求出结果即可.

【详解】(1) 证明: $\because D$ 是 $\widehat{AC}$ 的中点,

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DBA,$$

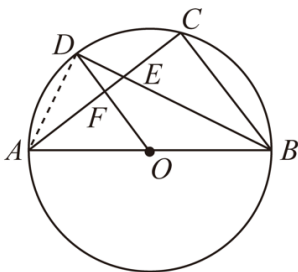
$$\text{又} \because OB = OD,$$

$$\therefore \angle ODB = \angle DBA, \therefore \angle DBC = \angle ODB,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle BEC.$$

(2) 解: 连接 AD , 如图所示:



$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{CD},$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DBA, \text{又} \angle ADE = \angle BDA,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BDA,$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{AD}{BD},$$

$$\because DE = 2, BE = 6,$$

$$\therefore BD = 8,$$

$$\therefore \frac{2}{AD} = \frac{AD}{8},$$

解得： $AD = 4$ ，负值舍去，

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\odot O} = \pi (2\sqrt{5})^2 = 20\pi.$$

【点睛】 本题主要考查了圆周角定理，三角形相似的判定和性质，等腰三角形的性质，勾股定理，圆的面积公式，解题的关键是作出相应辅助线，熟练掌握三角形相似的判定方法.

10. (2023·江苏苏州·统考一模) 已知 BD 为 $\odot O$ 的直径， O 为圆心，点 A 为圆上一点，过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 DA 的延长线于点 F ，点 C 为 $\odot O$ 上一点，且 $AB = AC$ ，连接 BC

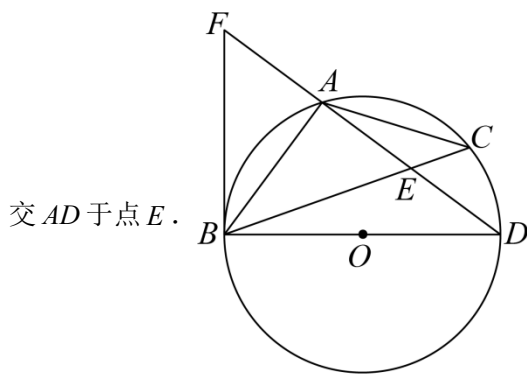


图1

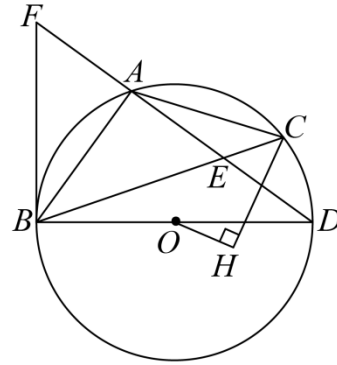


图2

(1) 如图 1，求证： $\angle ABF = \angle ABC$ ；

(2) 如图 2，点 H 为 $\odot O$ 内部一点，连接 OH ， CH ．若 $\angle OHC = \angle HCA = 90^\circ$ ， $\odot O$ 的半径为 10， $OH = 6$ ，求 DA 的长．

【答案】 (1) 见解析；

(2) $DA = 16$ ．

【分析】 (1) 由 BD 为 $\odot O$ 的直径，得出 $\angle D + \angle ABD = 90^\circ$ ，由 FB 是 $\odot O$ 的切线，得出 $\angle FBA + \angle ABD = 90^\circ$ ，则 $\angle FBA = \angle D$ ，根据 $AB = AC$ ，得出 $\angle C = \angle ABC$ ，根据等弧所对的圆周角得出 $\angle C = \angle D$ ，等量代换即可求解；

(2) 连接 OC ，证明 $\triangle ABD \sim \triangle HOC$ ， $\triangle ABD \sim \triangle HOC$ ，根据相似三角形的性质得出 $AB = 2OH = 12$ ， $BD = 20$ ，进而根据勾股定理即可求解．

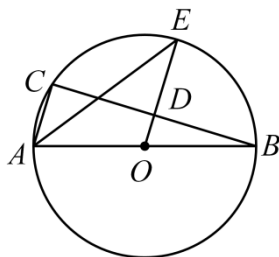
【详解】 (1) 解： $\because BD$ 为 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D + \angle ABD = 90^\circ,$$

【点睛】本题考查了切线的性质，直径所对的圆周角是直角，同弧所对的圆周角相等，相似三角形的判定和性质的运用，熟练掌握以上知识是解题的关键，解题的难点是添加辅助线找相似三角形。

11. 2023·江苏徐州·统考一模)如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 为 $\odot O$ 上一点, 连接 AC , BC , 过点 O 作 $OD \perp BC$ 于点 D , 延长 OD 交 $\odot O$ 于点 E , 连接 AE .



(1) 求证: $OE \parallel AC$;

(2) 若 $AC=1$, $AB=4$, 求 AE 的长度.

【答案】(1) 见解

(2) $\sqrt{10}$

【分析】(1) 首先根据直径的性质得到 $AC \perp BC$, 然后结合 $OD \perp BC$ 即可证明出 $OE \parallel AC$;

(2) 连接 BE , 首先根据勾股定理求出 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$, 然后根据垂径定理得到 $CD = BD = \frac{\sqrt{15}}{2}$, 利用三角形中位线的性质得到 $OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$, 最后利用勾股定理求解即可.

【详解】(1) 证明: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\therefore AC \perp BC.$$

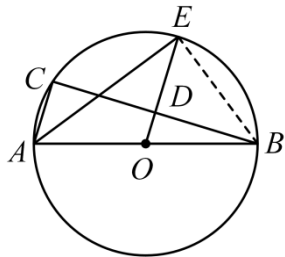
$$\because OD \perp BC.$$

$$\therefore OE \parallel AC;$$

(2) 解: 如图, 连接 BE ,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, \angle AEB = 90^\circ.$$



$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}.$$

$\because OD \perp BC$, OE 是 $\odot O$ 的半径,

$$\therefore CD = BD = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

∴ OD 为 $\triangle ABC$ 的中位线.

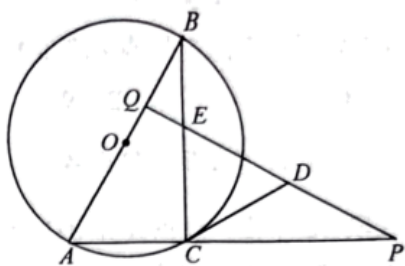
$$\therefore OD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore DE = OE - OD = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \quad \therefore BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{6}.$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10};$$

【点睛】此题考查了垂径定理的运用，勾股定理，平行线的判定等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

12. (2023·江苏扬州·统考一模) 如图，已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，点 P 在 AC 的延长线上， $PQ \perp AB$ 于点 Q ，交 BC 于点 E ， CD 是 $\odot O$ 的切线，交 PQ 于点 D .



(1) 判断 $\triangle DCE$ 的形状，并说明理由；

(2) 若 $CD = AC = 2$ ，求 OQ 的长度.

【答案】(1) 等边三角形，见解析

(2) $\sqrt{3} - 1$

【分析】(1) 如图：连接 OC ，先说明 AB 是 $\odot O$ 的直径，则 $OB = OC$ ，即

$\angle OCB = \angle ABC = 30^\circ$ ；根据 CD 是 $\odot O$ 的切线可得 $\angle OCD = 90^\circ$ ，即

$\angle ECD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ；再根据 $PQ \perp AB$ 结合直角三角形的性质和对顶角的性质可得

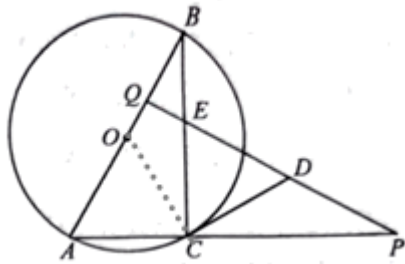
$\angle CED = 60^\circ$ ，进而得到 $\angle CED = \angle DCE = 60^\circ$ 即可；

(2) 根据直角三角形的性质可得 $AB = 2AC = 4$ ，再根据勾股定理求得 $BC = 2\sqrt{3}$ ，根据

$\triangle DCE$ 是等边三角形和 $CD = 2$ 可得 $BE = 2\sqrt{3} - 2$ ，然后解直角三角形可得 $BQ = 3 - \sqrt{3}$ ，

最后根据 $OQ = OB - BQ$ 即可解答.

【详解】(1) 解： $\triangle DCE$ 是等边三角形，理由如下：



如图：连接 OC ，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore OB = OC$ ，

$\therefore \angle OCB = \angle ABC = 30^\circ$ ，

$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle OCD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ECD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ，

$\because PQ \perp AB$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BEQ = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle CED = \angle BEQ = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle CED = \angle DCE = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle DCE$ 是等边三角形；

(2) 解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 2$ ，

$\therefore AB = 2AC = 4$ ，

$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\because \triangle DCE$ 是等边三角形， $CD = 2$ ，

$\therefore CE = CD = 2$ ，

$\therefore BE = 2\sqrt{3} - 2$ ，

$\because PQ \perp AB$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，

$\therefore BQ = \cos \angle ABC \cdot BE = \frac{\sqrt{3}}{2}(2\sqrt{3} - 2) = 3 - \sqrt{3}$ ，

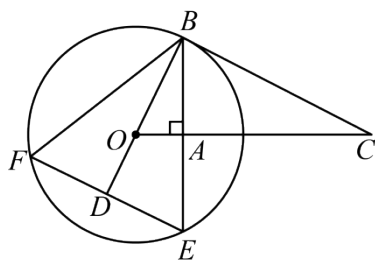
$\therefore OQ = OB - BQ = 2 - (3 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$ 。

【点睛】本题主要考查了圆的内接三角形、圆周角定理、切线的性质、等腰三角形的判定、解直角三角形等知识点，灵活运用相关性质、定理是解答本题的关键。

13. (2023·江苏常州·校考二模) 如图，在 $\triangle OAB$ 中， $\angle OAB = 90^\circ$ ， $OA = 2$ ，

$AB = 4$ 。延长 OA 至点 C ，使 $AC = 8$ ，连接 BC ，以 O 为圆心， OB 长为半径作 $\odot O$ ，

延长 BA ，与 $\odot O$ 交于点 E ，作弦 $BF = BE$ ，连接 EF ，与 BO 的延长线交于点 D 。



(1)求证: BC 是 $\odot O$ 的切线;

(2)求 EF 的长.

【答案】(1)见解析

(2) $\frac{16\sqrt{5}}{5}$

【分析】(1) 根据题意可得 $\frac{OA}{AB} = \frac{AB}{AC}$, $\angle OAB = \angle BAC = 90^\circ$, 以此推出 $\triangle OAB \sim \triangle BAC$,

根据相似三角形的性质可得 $\angle BOA = \angle CBA$, 以此得到 $\angle OBA + \angle ABC = 90^\circ$, 即可证明;

(2) 过点 O 作 $OG \perp BF$ 于点 G , 根据题意可证明 $\text{Rt}\triangle BOG \cong \text{Rt}\triangle BOA$ (HL), 以此得到 BD

平分 $\angle FBE$, 则 $BD \perp EF$, $DF = DE$, 再根据 $\sin \angle OBA = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 以此即可求

解.

【详解】(1) 证明: $\because OA = 2$, $AB = 4$, $AC = 8$,

$$\therefore \frac{OA}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

$$\because \angle OAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OAB \sim \triangle BAC,;$$

$$\therefore \angle BOA = \angle CBA,$$

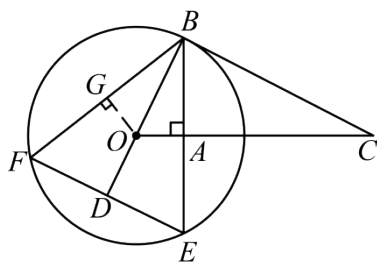
$$\because \angle OBA + \angle BOA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBA + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\because OB \text{ 为 } \odot O \text{ 半径},$$

$$\therefore BC \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}; (2) \text{ 解: 如图, 过点 } O \text{ 作 } OG \perp BF \text{ 于点 } G, \text{ 如图所示},$$



$$\because OG \perp BF, \angle OAB = 90^\circ, \text{ 弦 } BF = BE,$$

$$\therefore BG = AB,$$

$$\therefore OB = OB,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BOG \cong \text{Rt}\triangle BOA (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle GBO = \angle ABO,$$

$$\therefore BF = BE, \text{ 即 } \triangle BFE \text{ 为等腰三角形},$$

$$\therefore BD \perp EF, \quad DF = DE,$$

$$\therefore OA = 2, \quad AB = 4,$$

$$\therefore OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABO \text{ 中}, \sin \angle OBA = \frac{OA}{OB} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

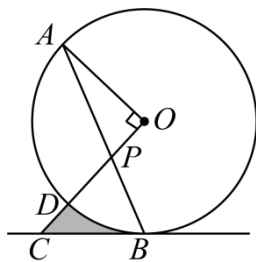
$$\text{在 Rt}\triangle BDE \text{ 中}, \sin \angle DBE = \frac{DE}{BE} = \frac{DE}{8} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore DE = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore EF = \frac{16\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】本题主要考查切线的判定与性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、垂径定理，熟练运用相关知识答题时解题关键。

14. (2023·江苏徐州·校考一模) 如图， AB 是 $\odot O$ 的弦， C 是 $\odot O$ 外一点， $OC \perp OA$ ， OC 交 AB 于点 P ，交 $\odot O$ 于点 D ，且 $CP = CB$ 。



(1) 判断直线 BC 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；(2) 若 $\angle A = 30^\circ$ ， $OP = 4$ ，求图中阴影部分的面积。

【答案】(1) 直线 BC 与 $\odot O$ 的位置关系是相切，理由见解析

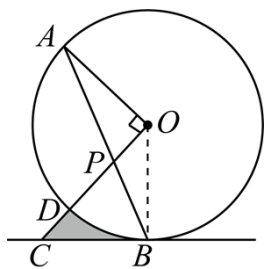
$$(2) 8\sqrt{3} - 4\pi$$

【分析】(1) 连接 OB ，根据等腰三角形的性质得出 $\angle A = \angle OBA$ ， $\angle CPB = \angle CBP$ ，求出 $\angle AOC = \angle OBC = 90^\circ$ ，再根据切线的判定得出即可；

(2) 根据含 30° 角的直角三角形的性质求出 AP ，求出 AO ，求出 $\angle COB = 30^\circ$ ，根据含 30° 角的直角三角形的性质求出 $OC = 2BC$ ，求出 BC ，再求出答案即可。

【详解】(1) 直线 BC 与 $\odot O$ 的位置关系是相切，

理由是：连接 OB ，



$$\because CP = CB, OA = OB,$$

$$\therefore \angle A = \angle OBA, \angle CPB = \angle CBP,$$

$$\because \angle APO = \angle CPB,$$

$$\therefore \angle APO = \angle CBP,$$

$$\therefore \angle A + \angle APO = \angle CBP + \angle OBA,$$

$$\because OC \perp OA,$$

$$\therefore \angle AOP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBP + \angle OBA = \angle A + \angle APO = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\therefore OB \perp BC,$$

$$\because OB \text{ 过点 } O,$$

$\therefore$ 直线 BC 与 $\odot O$ 的位置关系是相切；

$$(2) \because \angle AOP = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, OP = 4,$$

$$\therefore AP = 2OP = 8, AO = \sqrt{AP^2 - OP^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore OB = 4\sqrt{3}, \because \angle A = \angle OBA = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - \angle A - \angle OBA = 120^\circ,$$

$$\because \angle AOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle COB = \angle AOB - \angle AOC = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore OC = 2BC,$$

$$\text{由勾股定理得： } OC^2 = CB^2 + OB^2,$$

$$\text{即 } (2BC)^2 = BC^2 + (4\sqrt{3})^2,$$

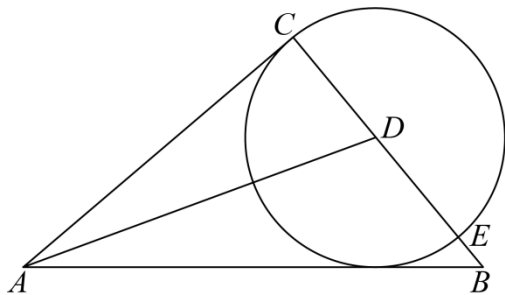
$$\text{解得： } BC = 4,$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积 } S = S_{\triangle OBC} - S_{\text{扇形} OBD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} - \frac{30\pi \times (4\sqrt{3})^2}{360} = 8\sqrt{3} - 4\pi.$$

【点睛】本题考查了圆周角定理，等腰三角形的性质，含 30° 角的直角三角形的性质，

勾股定理，切线的判定，扇形的面积计算和三角形的面积等知识点，能综合运用知识点进行推理和计算是解此题的关键.

15. (2023·江苏宿迁·统考二模) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， AD 是角平分线，以 D 为圆心， DC 为半径作 $\odot D$ ，交 BD 于点 E .



(1) 直线 AB 与 $\odot D$ 相切吗？为什么？

(2) 若 $DC = 6$ ， $BE = 2$ ，求 AC 的长.

【答案】 (1) 直线 AB 与 $\odot D$ 相切，理由见解析

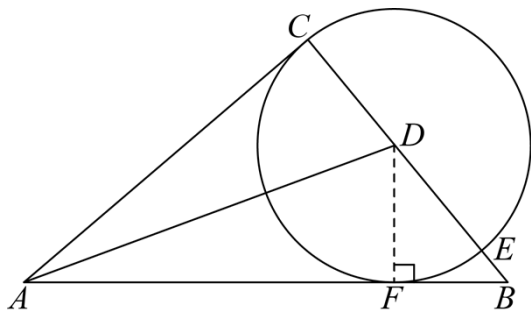
(2) $AC = 6\sqrt{7}$

【分析】 (1) 过点 D 作 $DF \perp AB$ ，垂足为 F ，根据角平分线性质求出 $DF = DC$ ，根据切线的判定得出即可；

(2) 由 $DC = 6$ ， $BE = 2$ ，可得 $DF = DC = DE = 6$ ， $DB = 8$ ， $BC = 14$ ，由勾股定理可得 $BF = 2\sqrt{7}$ ，可得 $\tan B = \frac{DF}{BF} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ ，由 $\angle ACB = 90^\circ$ ，可得 $\tan B = \frac{3\sqrt{7}}{7} = \frac{AC}{BC}$ ，进而求得 $AC = 6\sqrt{7}$.

【详解】 (1) 解：直线 AB 与 $\odot D$ 相切，理由如下：

过点 D 作 $DF \perp AB$ ，垂足为 F ，



$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $DF \perp AB$ ，

$\therefore DF = DC$ ，

又 $\because DC$ 为半径，

$\therefore$ 点 F 在 $\odot D$ 上，

又 $\because DF \perp AB$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/288134007056006074>