

## 青海省西宁市海湖中学 2024 年高考仿真卷数学试卷

请考生注意：

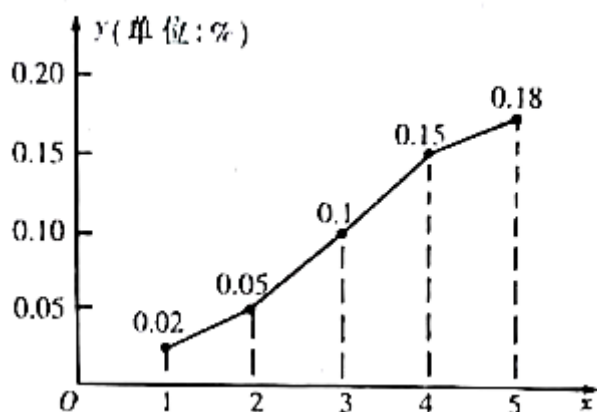
1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数  $z = a + i, a \in R$ ，若  $|z| = 2$ ，则  $a$  的值为（ ）

- A. 1                      B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\pm 1$                       D.  $\pm\sqrt{3}$

2. 5G 网络是一种先进的高频传输技术，我国的 5G 技术发展迅速，已位居世界前列.华为公司 2019 年 8 月初推出了一款 5G 手机，现调查得到该款 5G 手机上市时间  $x$  和市场占有率  $y$ （单位：%）的几组相关对应数据.如图所示的折线图中，横轴 1 代表 2019 年 8 月，2 代表 2019 年 9 月……，5 代表 2019 年 12 月，根据数据得出  $y$  关于  $x$  的线性回归方程为  $\hat{y} = 0.042x + \hat{a}$ .若用此方程分析并预测该款手机市场占有率的变化趋势，则最早何时该款 5G 手机市场占有率能超过 0.5%（精确到月）（ ）



- A. 2020 年 6 月                      B. 2020 年 7 月                      C. 2020 年 8 月                      D. 2020 年 9 月

3. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且满足  $2S_n = 2^{n+1} + \lambda$ ，则  $\lambda$  的值是（ ）

- A. 4                      B. 2                      C. -2                      D. -4

4. 已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $\frac{2\pi}{3}$ ，且  $(\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp (2\vec{a} - \vec{b})$ ，则实数  $\lambda$  的值为（ ）

- A. -7                      B. -3                      C. 2                      D. 3

5.  $P$  是正四面体  $ABCD$  的面  $ABC$  内一动点， $E$  为棱  $AD$  中点，记  $DP$  与平面  $BCE$  成角为定值  $\theta$ ，若点  $P$  的轨迹为一段抛物线，则  $\tan \theta =$ （ ）

- A.  $\sqrt{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$                       D.  $2\sqrt{2}$

6. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x-y \leq 0, \\ x+y \leq 2, \\ x+1 \geq 0, \end{cases}$  则  $z = \frac{x+3}{y+2}$  的取值范围为 ( )

- A.  $[\frac{2}{5}, \frac{4}{3}]$       B.  $[\frac{2}{5}, 3]$       C.  $[\frac{4}{3}, 2]$       D.  $[\frac{2}{5}, 2]$

7. 函数  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \ln(x+1)$  的定义域为 ( )

- A.  $(2, +\infty)$       B.  $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$       C.  $(-1, 2)$       D.  $(-1, 2]$

8. 已知函数  $f(x) = me^{mx} - \ln x$ , 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$  恒成立, 则  $m$  的取值范围为 ( )

- A.  $(\frac{1}{e}, +\infty)$       B.  $(\frac{1}{e}, e)$       C.  $[1, +\infty)$       D.  $(-\infty, e)$

9. 若复数  $z = \frac{5}{2-i}$  ( $i$  为虚数单位), 则  $\bar{z} =$  ( )

- A.  $2+i$       B.  $2-i$       C.  $1+2i$       D.  $1-2i$

10. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_8 = 16$ ,  $a_6 = 1$ , 则数列  $\{a_n\}$  的公差为 ( )

- A.  $\frac{3}{2}$       B.  $-\frac{3}{2}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $-\frac{2}{3}$

11. 已知角  $\theta$  的顶点与原点重合, 始边与  $x$  轴的正半轴重合, 终边经过点  $P(1, 2)$ , 则  $\cos 2\theta =$  ( )

- A.  $-\frac{3}{5}$       B.  $-\frac{4}{5}$       C.  $\frac{3}{5}$       D.  $\frac{4}{5}$

12. 数列  $\{a_n\}$ , 满足对任意的  $n \in \mathbb{N}_+$ , 均有  $a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$  为定值. 若  $a_7 = 2$ ,  $a_9 = 3$ ,  $a_{98} = 4$ , 则数列  $\{a_n\}$  的前 100 项的和  $S_{100} =$  ( )

- A. 132      B. 299      C. 68      D. 99

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设  $(\sqrt{2} + x)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ , 则  $a_2 =$  \_\_\_\_\_,

$(a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{10})^2 - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_9)^2$  的值为\_\_\_\_\_.

14. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两条渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ , 若顶点到渐近线的距离为 1, 则双曲线方程为\_\_\_\_\_.

15. 若  $x > 0, y > 0$ , 且  $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ , 则  $x + 2y$  的最小值是\_\_\_\_\_.

16. 在 $\triangle ABC$  中， $a=3$ ， $b=2\sqrt{6}$ ， $B=2A$ ，则  $\cos A=$ \_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 某商场为改进服务质量，在进场购物的顾客中随机抽取了 200 人进行问卷调查. 调查后，就顾客“购物体验”的满意度统计如下：

|   | 满意 | 不满意 |
|---|----|-----|
| 男 | 40 | 40  |
| 女 | 80 | 40  |

- (1) 是否有 97.5% 的把握认为顾客购物体验的满意度与性别有关？
- (2) 若在购物体验满意的问卷顾客中按照性别分层抽取了 6 人发放价值 100 元的购物券. 若在获得了 100 元购物券的 6 人中随机抽取 2 人赠其纪念品，求获得纪念品的 2 人中仅有 1 人是女顾客的概率.

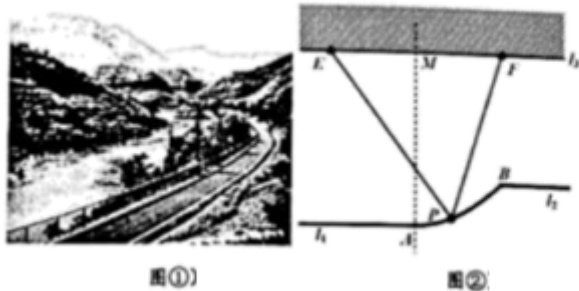
附表及公式：
$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.15  | 0.10  | 0.05  | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001  |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $k_0$             | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

18. (12 分) 已知各项均不相等的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和为 $S_4=14$ ，且 $a_1, a_3, a_7$ 成等比数列.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 求数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前  $n$  项和 $T_n$ .

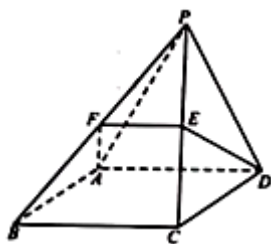
19. (12 分) 某地为改善旅游环境进行景点改造. 如图，将两条平行观光道 $l_1$ 和 $l_2$ 通过一段抛物线形状的栈道 $AB$ 连通（道路不计宽度）， $l_1$ 和 $l_2$ 所在直线的距离为 0.5（百米），对岸堤岸线 $l_3$ 平行于观光道且与 $l_2$ 相距 1.5（百米）（其中 $A$ 为抛物线的顶点，抛物线的对称轴垂直于 $l_3$ ，且交 $l_3$ 于 $M$ ），在堤岸线 $l_3$ 上的 $E, F$ 两处建造建筑物，其中 $E, F$ 到 $M$ 的距离为 1（百米），且 $F$ 恰在 $B$ 的正对岸（即 $BF \perp l_3$ ）.



(1) 在图②中建立适当的平面直角坐标系，并求栈道  $AB$  的方程；

(2) 游客（视为点  $P$ ）在栈道  $AB$  的何处时，观测  $EF$  的视角 ( $\angle EPF$ ) 最大？请在 (1) 的坐标系中，写出观测点  $P$  的坐标。

20. (12 分) 如图，四棱锥  $P-ABCD$  中，四边形  $ABCD$  是矩形， $AB = \frac{\sqrt{3}}{2} AD$ ， $\triangle PAD$  为正三角形，且平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ ， $E$ 、 $F$  分别为  $PC$ 、 $PB$  的中点。



(1) 证明：平面  $ADEF \perp$  平面  $PBC$ ；

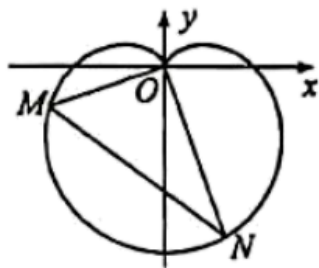
(2) 求二面角  $B-DE-C$  的余弦值。

21. (12 分) 在①  $\sqrt{3}(b \cos C - a) = c \sin B$ ；②  $2a + c = 2b \cos C$ ；③  $b \sin A = \sqrt{3}a \sin \frac{A+C}{2}$  这三个条件中任选一个，补充在下面问题中的横线上，并解答相应的问题。

在  $\triangle ABC$  中，内角  $A$ ， $B$ ， $C$  的对边分别为  $a$ ， $b$ ， $c$ ，且满足\_\_\_\_\_， $b = 2\sqrt{3}$ ， $a + c = 4$ ，求  $\triangle ABC$  的面积。

22. (10 分) 在新中国成立 70 周年国庆阅兵庆典中，众多群众在脸上贴着一颗红心，以此表达对祖国的热爱之情，在数学中，有多种方程都可以表示心型曲线，其中有著名的笛卡尔心型曲线，如图，在直角坐标系中，以原点  $O$  为极点， $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系。图中的曲线就是笛卡尔心型曲线，其极坐标方程为  $\rho = 1 - \sin \theta$

( $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $\rho > 0$ )， $M$  为该曲线上的任意一点。



(1) 当  $|OM| = \frac{3}{2}$  时, 求  $M$  点的极坐标;

(2) 将射线  $OM$  绕原点  $O$  逆时针旋转  $\frac{\pi}{2}$  与该曲线相交于点  $N$ , 求  $|MN|$  的最大值.

## 参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

由复数模的定义可得:  $|z| = \sqrt{a^2 + 1} = 2$ , 求解关于实数  $a$  的方程可得:  $a = \pm\sqrt{3}$ .

本题选择 D 选项.

2、C

【解析】

根据图形, 计算出  $\bar{x}, \bar{y}$ , 然后解不等式即可.

【详解】

解:  $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{5} \times (0.02 + 0.05 + 0.1 + 0.15 + 0.18) = 0.1$

点  $(3, 0.1)$  在直线  $\hat{y} = 0.042x + \hat{a}$  上

$0.1 = 0.042 \times 3 + \hat{a}$ ,  $\hat{a} = -0.026$

$\hat{y} = 0.042x - 0.026$

令  $\hat{y} = 0.042x - 0.026 > 0.5$

$x \geq 13$

因为横轴 1 代表 2019 年 8 月，所以横轴 13 代表 2020 年 8 月，

故选：C

【点睛】

考查如何确定线性回归直线中的系数以及线性回归方程的实际应用，基础题.

3、C

【解析】

利用  $S_n$  先求出  $a_n$ ，然后计算出结果.

【详解】

根据题意，当  $n=1$  时， $2S_1 = 2a_1 = 4 + \lambda$ ， $\therefore a_1 = \frac{4+\lambda}{2}$ ，

故当  $n \geq 2$  时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n-1}$ ，

Q 数列  $\{a_n\}$  是等比数列，

则  $a_1 = 1$ ，故  $\frac{4+\lambda}{2} = 1$ ，

解得  $\lambda = -2$ ，

故选 C.

【点睛】

本题主要考查了等比数列前  $n$  项和  $S_n$  的表达形式，只要求出数列中的项即可得到结果，较为基础.

4、D

【解析】

由已知可得  $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，结合向量数量积的运算律，建立  $\lambda$  方程，求解即可.

【详解】

依题意得  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 \times \cos \frac{2\pi}{3} = -1$

由  $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，得  $2\vec{a}^2 - \lambda \vec{b}^2 + (2\lambda - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

即  $-3\lambda + 9 = 0$ ，解得  $\lambda = 3$ .

故选：D.

【点睛】

本题考查向量的数量积运算，向量垂直的应用，考查计算求解能力，属于基础题.

5、B

【解析】

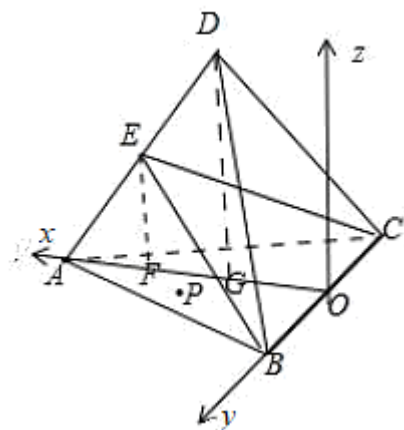
设正四面体的棱长为2，建立空间直角坐标系，求出各点的坐标，求出面  $BCE$  的法向量，设  $P$  的坐标，求出向量

$\vec{DP}$ ，求出线面所成角的正弦值，再由角  $\theta$  的范围  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，结合  $\theta$  为定值，得出  $\sin \theta$  为定值，且  $P$  的轨迹为一段抛物线，所以求出坐标的关系，进而求出正切值。

【详解】

由题意设四面体  $ABCD$  的棱长为2，设  $O$  为  $BC$  的中点，

以  $O$  为坐标原点，以  $OA$  为  $x$  轴，以  $OB$  为  $y$  轴，过  $O$  垂直于面  $ABC$  的直线为  $z$  轴，建立如图所示的空间直角坐标系  $O-xyz$ ，



则可得  $OB = OC = 1$ ， $OA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$ ，取  $OA$  的三等分点  $G$ 、 $F$  如图，

则  $OG = \frac{1}{3}OA = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $AG = OF = \frac{2}{3}OA = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， $DG = \sqrt{AD^2 - AG^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ， $EF = \frac{1}{2}DG = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

所以  $B(0,1,0)$ 、 $C(0,-1,0)$ 、 $A(\sqrt{3},0,0)$ 、 $D\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ 、 $E\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ ，

由题意设  $P(x,y,0)$ ， $\vec{DP} = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}, y, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ ，

Q  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACD$  都是等边三角形， $E$  为  $AD$  的中点， $\therefore BE \perp AD$ ， $CE \perp AD$ ，

Q  $BE \cap CE = E$ ， $\therefore AD \perp$  平面  $BCE$ ， $\therefore \vec{AD} = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$  为平面  $BCE$  的一个法向量，

因为  $DP$  与平面  $BCE$  所成角为定值  $\theta$ ，则  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，

由题意可得

$$\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DP}|}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{DP}|} = \frac{\left| -\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \left( x - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \left( \frac{2\sqrt{6}}{3} \right)^2 \right|}{2 \times \sqrt{\left( x - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 + y^2 + \left( -\frac{2\sqrt{6}}{3} \right)^2}}$$

$$= \frac{|x + \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3}x - 1)^2 + 3y^2 + 8}} = \sqrt{\frac{(x + \sqrt{3})^2}{3x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}x + 9}} = \sqrt{\frac{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3}{3x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}x + 9}},$$

因为  $P$  的轨迹为一段抛物线且  $\tan \theta$  为定值，则  $\sin \theta$  也为定值，

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}x}{3y^2 - 2\sqrt{3}x} = \frac{x^2}{3x^2} = \frac{3}{9}, \text{ 可得 } 3y^2 = 8\sqrt{3}x, \text{ 此时 } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 则 } \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：B.

【点睛】

考查线面所成的角的求法，及正切值为定值时的情况，属于中等问题.

6、D

【解析】

由题意作出可行域，转化目标函数  $z = \frac{x+3}{y+2}$  为连接点  $D(-3, -2)$  和可行域内的点  $(x, y)$  的直线斜率的倒数，数形结合

即可得解.

【详解】

由题意作出可行域，如图，

目标函数  $z = \frac{x+3}{y+2}$  可表示连接点  $D(-3, -2)$  和可行域内的点  $(x, y)$  的直线斜率的倒数，

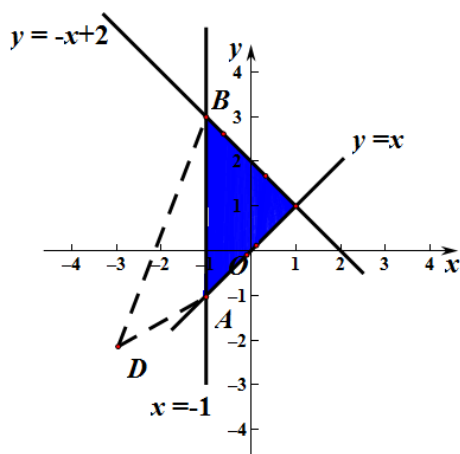
由图可知，直线  $DA$  的斜率最小，直线  $DB$  的斜率最大，

由  $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$  可得  $A(-1, -1)$ ，由  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$  可得  $B(-1, 3)$ ，

所以  $k_{DA} = \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2}$ ， $k_{DB} = \frac{3+2}{-1+3} = \frac{5}{2}$ ，所以  $\frac{2}{5} \leq z \leq 2$ 。

故选：D.





【点睛】

本题考查了非线性规划的应用，属于基础题.

7、C

【解析】

函数的定义域应满足  $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$ ,  $\therefore -1 < x < 2$ .

故选 C.

8、A

【解析】

分析可得  $m > 0$ , 显然  $me^{mx} - \ln x > 0$  在  $(0, 1]$  上恒成立, 只需讨论  $x > 1$  时的情况即

可,  $f(x) > 0 \Leftrightarrow me^{mx} > \ln x \Leftrightarrow mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$ , 然后构造函数  $g(x) = xe^x (x > 0)$ , 结合  $g(x)$  的单调性, 不等式等价于  $mx > \ln x$ , 进而求得  $m$  的取值范围即可.

【详解】

由题意, 若  $m \leq 0$ , 显然  $f(x)$  不是恒大于零, 故  $m > 0$ .

$m > 0$ , 则  $me^{mx} - \ln x > 0$  在  $(0, 1]$  上恒成立;

当  $x > 1$  时,  $f(x) > 0$  等价于  $me^{mx} > \ln x$ ,

因为  $x > 1$ , 所以  $mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$ .

设  $g(x) = xe^x (x > 0)$ , 由  $g'(x) = e^x(1+x)$ , 显然  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

因为  $mx > 0, \ln x > 0$ , 所以  $mxe^{mx} > e^{\ln x} \ln x$  等价于  $g(mx) > g(\ln x)$ , 即  $mx > \ln x$ , 则  $m > \frac{\ln x}{x}$ .

设  $h(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$ , 则  $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} (x > 0)$ .

令  $h'(x) = 0$ , 解得  $x = e$ , 易得  $h(x)$  在  $(0, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减,

从而  $h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e}$ , 故  $m > \frac{1}{e}$ .

故选:A.

【点睛】

本题考查了不等式恒成立问题,利用函数单调性是解决本题的关键,考查了学生的推理能力,属于基础题.

9、B

【解析】

根据复数的除法法则计算  $z$ , 由共轭复数的概念写出  $\bar{z}$ .

【详解】

$$Q \ z = \frac{5}{2-i} = \frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10+5i}{5} = 2+i,$$

$$\therefore \bar{z} = 2-i,$$

故选: B

【点睛】

本题主要考查了复数的除法计算, 共轭复数的概念, 属于容易题.

10、D

【解析】

根据等差数列公式直接计算得到答案.

【详解】

$$\text{依题意, } S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = \frac{8(a_3 + a_6)}{2} = 16, \text{ 故 } a_3 + a_6 = 4, \text{ 故 } a_3 = 3, \text{ 故 } d = \frac{a_6 - a_3}{3} = -\frac{2}{3}, \text{ 故选: D.}$$

【点睛】

本题考查了等差数列的计算, 意在考查学生的计算能力.

11、A

【解析】

由已知可得  $\sin \theta$ , 根据二倍角公式即可求解.

【详解】

角  $\theta$  的顶点与原点重合, 始边与  $x$  轴的正半轴重合,

$$\text{终边经过点 } P(1, 2), \text{ 则 } |OP| = \sqrt{5}, \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = -\frac{3}{5}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/295111203122011222>