

2023-2024 学年广东省五校协作体高三年级 2 月份月考数学试题

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $\sin(\pi + \alpha) = \frac{4}{5}$ ，且 $\sin 2\alpha < 0$ ，则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值为（ ）

- A. 7 B. -7 C. $\frac{1}{7}$ D. $-\frac{1}{7}$

2. 已知函数 $f(x) = (k-1)xe^x$ ，若对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x) < 1$ 成立，则实数 k 的取值范围是（ ）

- A. $(-\infty, 1-e)$ B. $(1-e, +\infty)$ C. $(-e, 0]$ D. $(1-e, 1]$

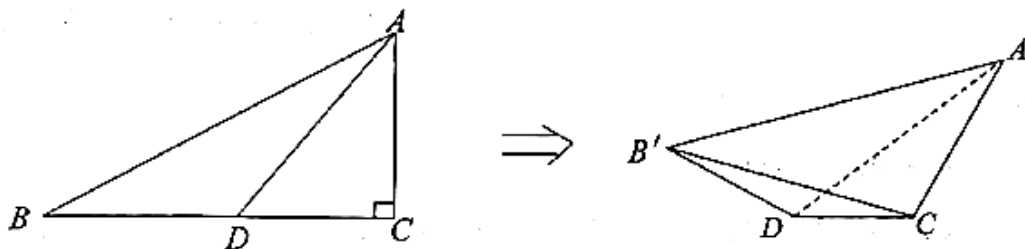
3. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，则 $f(x)$ 的最小值为（ ）

- A. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $1 - \frac{\sqrt{2}}{4}$

4. 小王因上班繁忙，来不及做午饭，所以叫了外卖。假设小王和外卖小哥都在 12:00~12:10 之间随机到达小王所居住的楼下，则小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{4}$

5. 如图， $\triangle ABC$ 中 $\angle A = 2\angle B = 60^\circ$ ，点 D 在 BC 上， $\angle BAD = 30^\circ$ ，将 $\triangle ABD$ 沿 AD 旋转得到三棱锥 $B'-ADC$ ，分别记 $B'A$ ， $B'D$ 与平面 ADC 所成角为 α ， β ，则 α ， β 的大小关系是（ ）



- A. $\alpha < \beta \leq 2\alpha$ B. $2\alpha \leq \beta \leq 3\alpha$

C. $\beta \leq 2\alpha$, $2\alpha < \beta \leq 3\alpha$ 两种情况都存在 D. 存在某一位置使得 $\beta > 3\alpha$

6. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a = \sqrt{3}, b = 1, B = 30^\circ$, 则 A 为()

A. 60° B. 120° C. 60° 或 150° D. 60° 或 120°

7. 已知 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} 2x + y - 2 \leq 0 \\ x - 2y - 1 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则点 $P(x, y)$ 所在区域的面积是()

A. 1 B. 2 C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

8. 2019 年 10 月 1 日, 为了庆祝中华人民共和国成立 70 周年, 小明、小红、小金三人以国庆为主题各自独立完成一幅十字绣赠送给当地的村委会, 这三幅十字绣分别命名为“鸿福齐天”、“国富民强”、“兴国之路”, 为了弄清“国富民强”这一作品是谁制作的, 村支书对三人进行了问话, 得到回复如下:

小明说: “鸿福齐天”是我制作的;

小红说: “国富民强”不是小明制作的, 就是我制作的;

小金说: “兴国之路”不是我制作的,

若三人的说法有且仅有一人是正确的, 则“鸿福齐天”的制作者是()

A. 小明 B. 小红 C. 小金 D. 小金或小明

9. 已知定义在 $[1, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(3x) = 3f(x)$, 且当 $1 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = 1 - |x - 2|$, 则方程

$f(x) = f(2019)$ 的最小实根的值是()

A. 168 B. 249 C. 411 D. 561

10. 《九章算术》有如下问题: “今有金簪, 长五尺, 斩本一尺, 重四斤; 斩末一尺, 重二斤, 问次一尺各重几何?”意思是: “现在有一根金簪, 长五尺在粗的一端截下一尺, 重 4 斤; 在细的一端截下一尺, 重 2 斤, 问各尺依次重多少?”按这一问题的题设, 假设金簪由粗到细各尺重量依次成等差数列, 则从粗端开始的第二尺的重量是()

A. $\frac{7}{3}$ 斤 B. $\frac{7}{2}$ 斤 C. $\frac{5}{2}$ 斤 D. 3 斤

11. 阿波罗尼斯 (约公元前 262~190 年) 证明过这样的命题: 平面内到两定点距离之比为常数 $k (k > 0, k \neq 1)$ 的点的

轨迹是圆. 后人将这个圆称为阿氏圆. 若平面内两定点 A, B 间的距离为 2, 动点 P 与 A, B 的距离之比为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 当 $P,$

A, B 不共线时, $\triangle PAB$ 的面积的最大值是()

A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

12. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 0 \leq 2x + y \leq 6 \\ 3 \leq x - y \leq 6 \end{cases}$ 则 $z = x + 2y$ 的最大值为 ()

- A. 10 B. 8 C. 5 D. 3

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{(2-x^2)^5}{x^3}$ 的展开式中 x 的系数为_____.

14. 已知集合 $A = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x - a|, & 0 < x \leq 4 \\ f(8-x), & 4 < x < 8 \end{cases}$, 若存在实数 m , 使得关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有 4 个不相等的实根, 且这

4 个根的平方和存在最小值, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 将一个半径适当的小球放入如图所示的容器最上方的入口处, 小球将自由下落. 小球在下落的过程中, 将 3 次遇到黑色障碍物, 最后落入 A 袋或 B 袋中. 已知小球每次遇到黑色障碍物时, 向左、右两边下落的概率都是 $\frac{1}{2}$, 则小球落入 A 袋中的概率为_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且经过点 $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $(\sqrt{3}, 0)$ 作直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 A, B , 试问在 x 轴上是否存在定点 Q 使得直线 QA 与直线 QB 恰关于 x 轴对称? 若存在, 求出点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由.

18. (12 分) 在锐角三角形 ABC 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $\tan A, \tan B, \tan C$ 成等差数列,

$\cos A, \sqrt{\cos C}, \cos B$ 成等比数列.

(1) 求 A 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 1, 求 c 的值.

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 若对于任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 且 $m \neq n$, 都有

$$\frac{2S_{m+n}}{m+n} = a_m + a_n + \frac{a_m - a_n}{m-n}.$$

(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列

(2) 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = a_{n+1}a_{n+2} - a_n^2 (n \in \mathbb{N}^*)$, 且等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{1}{3}$, 存在正整数 p, q , 使得 $a_p + c_q$, 求 $|a_q|$ 的最小值.

20. (12 分) 已知椭圆 C 的焦点在 x 轴上, 且顺次连接四个顶点恰好构成了一个边长 $\sqrt{3}$ 为且面积为 $2\sqrt{2}$ 的菱形.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 $M(-3, 0)$, 过椭圆 C 右焦点 F 的直线 l 交于 A, B 两点, 若对满足条件的任意直线 l , 不等式

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leq \lambda (\lambda \in \mathbb{R})$ 恒成立, 求 λ 的最小值.

21. (12 分) 在平面直角坐标系中, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, 且 $\triangle ABC$ 满足 $\tan A \tan B = \frac{1}{2}$

(1) 求点 C 的轨迹 E 的方程;

(2) 过 $F(-\sqrt{2}, 0)$ 作直线 MN 交轨迹 E 于 M, N 两点, 若 $\triangle MAB$ 的面积是 $\triangle NAB$ 面积的 2 倍, 求直线 MN 的方程.

22. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $b \cos A - \sqrt{3} a \sin B = 1$.

(1) 求 A ;

(2) 已知 $a = 2\sqrt{3}$, $B = \frac{\pi}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

由 $\sin(\pi + \alpha) = \frac{4}{5}$ 及 $\sin 2\alpha < 0$ 得到 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$, 进一步得到 $\tan \alpha$, 再利用两角差的正切公式计算即可.

【详解】

因为 $\sin(\pi + \alpha) = \frac{4}{5}$ ，所以 $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ，又 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha < 0$ ，所以 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ，

$$\tan \alpha = -\frac{4}{3}，\text{所以 } \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{-1 - \frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = 7.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查三角函数诱导公式、二倍角公式以及两角差的正切公式的应用，考查学生的基本计算能力，是一道基础题.

2、D

【解析】

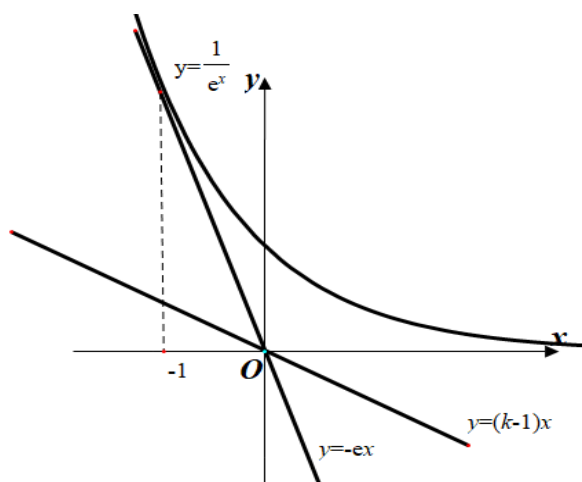
先将所求问题转化为 $(k-1)x < \frac{1}{e^x}$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立，即 $y = \frac{1}{e^x}$ 得图象恒在函数

$y = (k-1)x$ 图象的上方，再利用数形结合即可解决.

【详解】

由 $f(x) < 1$ 得 $(k-1)x < \frac{1}{e^x}$ ，由题意函数 $y = \frac{1}{e^x}$ 得图象恒在函数 $y = (k-1)x$ 图象的上方，

作出函数的图象如图所示



过原点作函数 $y = \frac{1}{e^x}$ 的切线，设切点为 (a, b) ，则 $-e^{-a} = \frac{b}{a} = \frac{1}{ae^a}$ ，解得 $a = -1$ ，所以切

线斜率为 $-e$ ，所以 $-e < k-1 \leq 0$ ，解得 $1-e < k \leq 1$.

故选：D.

【点睛】

本题考查导数在不等式恒成立中的应用，考查了学生转化与化归思想以及数形结合的思想，是一道中档题.

3、C

【解析】

利用三角恒等变换化简三角函数为标准正弦型三角函数，即可容易求得最小值.

【详解】

$$\begin{aligned} \text{由于 } f(x) &= \cos^2 x + \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)}{2} \\ &= 1 + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

故其最小值为： $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查利用降幂扩角公式、辅助角公式化简三角函数，以及求三角函数的最值，属综合基础题.

4、C

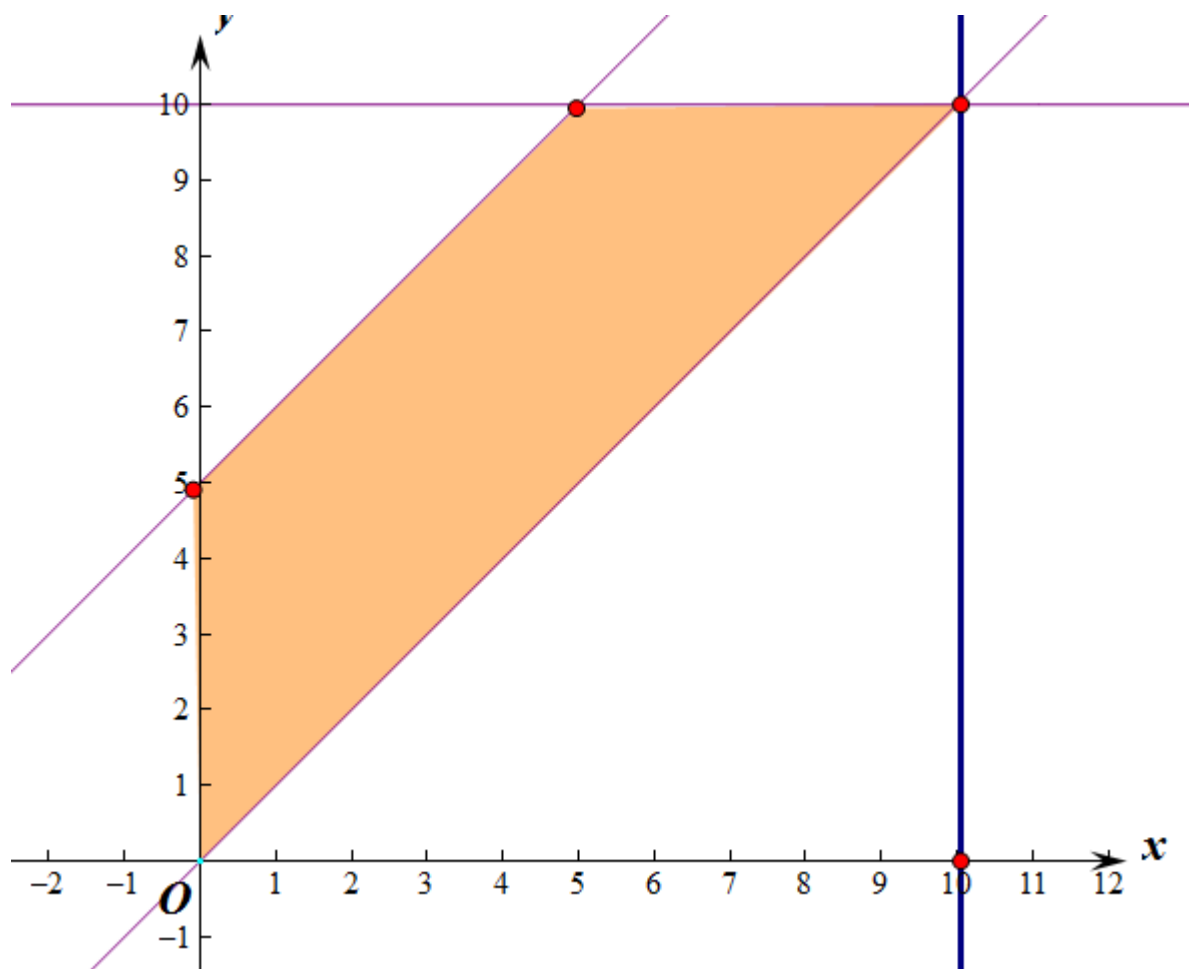
【解析】

设出两人到达小王的时间，根据题意列出不等式组，利用几何概型计算公式进行求解即可.

【详解】

设小王和外卖小哥到达小王所居住的楼下的时间分别为 x, y ，以 12:00 点为开始算起，则有 $\begin{cases} x \leq y \\ y - x \leq 5 \end{cases}$ ，在平面直角

坐标系内，如图所示：图中阴影部分表示该不等式组的所表示的平面区域，



所以小王在楼下等候外卖小哥的时间不超过 5 分钟的概率为：

$$P = \frac{10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 - \frac{1}{2} \times 5 \times 5}{10 \times 10} = \frac{3}{8}.$$

故选：C

【点睛】

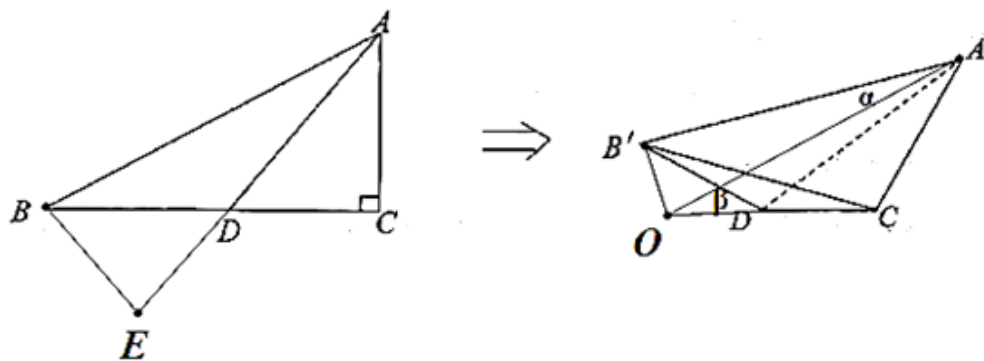
本题考查了几何概型中的面积型公式，考查了不等式组表示的平面区域，考查了数学运算能力.

5、A

【解析】

根据题意作出垂线段，表示出所求得 α 、 β 角，分别表示出其正弦值进行比较大小，从而判断出角的大小，即可得答案.

【详解】



由题可得过点 B 作 $BE \perp AD$ 交 AD 于点 E ，过 B' 作 CD 的垂线，垂足为 O ，则易得 $\alpha = \angle B'AO$ ， $\beta = \angle B'DO$ 。

设 $CD=1$ ，则有 $BD=AD=2$ ， $DE=1$ ， $BE=\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 可得 $AB'=AB=2\sqrt{3}$ ， $B'D=BD=2$ 。

$$\text{Q } \sin \alpha = \frac{OB'}{AB'}, \sin \beta = \frac{OB'}{DB'},$$

$$\therefore \sin \beta = \sqrt{3} \sin \alpha > \sin \alpha, \therefore \beta > \alpha;$$

$$\text{Q } OB' \in [0, \sqrt{3}], \therefore \sin \alpha \in [0, \frac{1}{2}];$$

$$\text{Q } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

$$2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \in [\sqrt{3}, 2], \therefore \sin 2\alpha \dots \sqrt{3} \sin \alpha = \sin \beta,$$

$$\therefore 2\alpha \dots \beta.$$

综上可得， $\alpha < \beta, 2\alpha$ 。

故选：A。

【点睛】

本题考查空间直线与平面所成的角的大小关系，考查三角函数的图象和性质，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平。

6、D

【解析】

由正弦定理可求得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，再由角 A 的范围可求得角 A 。

【详解】

由正弦定理可知 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ，所以 $\frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{1}{\sin 30^\circ}$ ，解得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，又 $0^\circ < A < 180^\circ$ ，且 $a > b$ ，所以 $A = 60^\circ$ 或

120° 。

故选：D.

【点睛】

本题主要考查正弦定理,注意角的范围,是否有两解的情况,属于基础题.

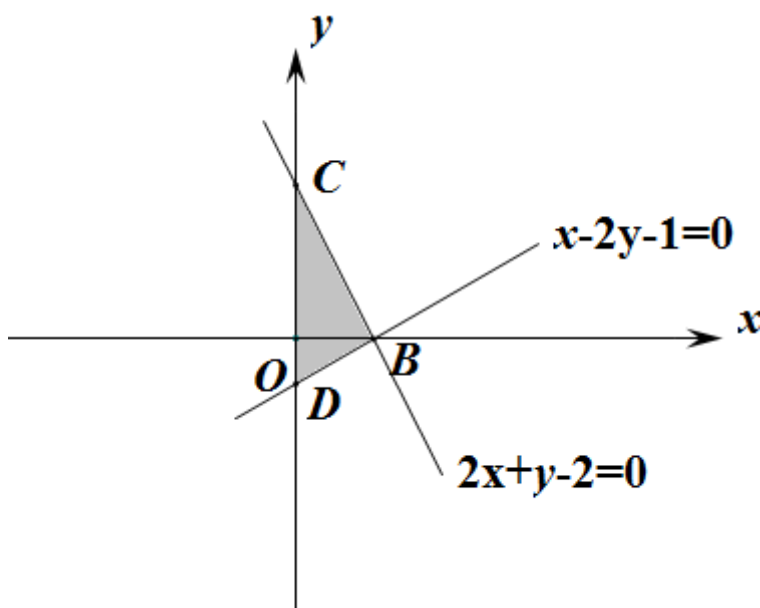
7、C

【解析】

画出不等式表示的平面区域,计算面积即可.

【详解】

不等式表示的平面区域如图:



直线 $2x + y - 2 = 0$ 的斜率为 -2 , 直线 $x - 2y - 1$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$, 所以两直线垂直, 故 $\triangle BCD$ 为直角三角形, 易得

$B(1, 0)$, $D(0, -\frac{1}{2})$, $C(0, 2)$, $|BD| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $|BC| = \sqrt{5}$ 所以阴影部分面积 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}|BD| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5} = \frac{5}{4}$.

故选：C.

【点睛】

本题考查不等式组表示的平面区域面积的求法, 考查数形结合思想和运算能力, 属于常考题.

8、B

【解析】

将三个人制作的所有情况列举出来, 再一一论证.

【详解】

依题意, 三个人制作的所有情况如下所示:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/295134200044011332>