

专题 07 比大小归类

题型盘点 · 直击高考

目录

题型一：基础函数：指数函数性质	1
题型二：基础函数：对数函数性质	4
题型三：幂指对函数性质	7
题型四：借助 0、1 分界	12
题型五：指数型同构法	14
题型六：借助常数分界	16
题型七：放缩型	18
题型八：构造型 1：对数幂型	19
题型九：构造型 2：指数幂型	22
题型十：构造型 3：指数线性构造	25
题型十一：构造型 4：对数线性构造	27
题型十二：构造型 5：三角函数线性构造	29
题型十三：构造型 6：综合构造	31
题型十四：三角函数型构造比大小	35
题型十五：幂指对与三角函数混合型	37
题型十六：泰勒展开	40
题型十七：麦克劳林展开	43

题型突围 · 精准提分

题型一：基础函数：指数函数性质

指 | 点 | 迷 | 津

指数函数比大小易错点：

1. 利用指数函数的单调性时要根据底数与 1 的大小区别对待.
2. 指数函数在第一象限图像，具有“底大图高”的性质
3. 指数函数图像性质：一点一线。恒过定点 $(0, 1)$ ， x 轴是它的水平渐近线
4. 进行指数幂的大小比较时，若底数不同，则首先考虑将其转化成同底数，然后再根据指数函数的单调性进行判断。对于不同底而同指数的指数幂的大小的比较，利用图象法求解，既快捷，又准确。

1. (23-24 高三·湖南衡阳·阶段练习) 设 $a = \left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$ ， $b = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ ， $c = \ln 1.6$ ，则 ()

- A. $c < a < b$ B. $b < a < c$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

画出 $f(x) = |3^x - 1|$ 的图象如下图所示,

由于 $a < b < c$, 且 $f(a) > f(c) > f(b)$,

由图可知: $a < 0$, $0 < c < \log_3 2$, b 的值可正可负也可为 0, 所以 AB 选项错误.

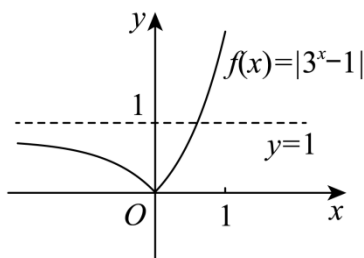
当 $a = -2, b = 0, c = \frac{1}{2}$ 时, $f(-2) = \left| \frac{1}{9} - 1 \right| = \frac{8}{9}, f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 1$,

满足 $f(a) > f(c) > f(b)$, $3^{-a} = 3^2 = 9 > 3^{\frac{1}{2}}$, 所以 C 选项错误.

$f(a) = |3^a - 1| = 1 - 3^a, f(c) = |3^c - 1| = 3^c - 1$,

$f(a) > f(c), 1 - 3^a > 3^c - 1$, 所以 $3^a + 3^c < 2$, D 选项正确.

故选: D



4. (2023·贵州毕节·模拟预测) 已知实数 x, y 满足 $3^x + 4^x = 5^y$, 且 $x = \log_2 3 + \log_7 4$, 则 ()

- A. $|x - y| > |x - 2|$ B. $|x - y| > |y - 3|$ C. $|x - 2| < |2 - y|$ D. $|x - 3| < |3 - y|$

【答案】 D

【分析】 利用对数函数、指数函数的单调性比较大小可得 $2 < y < x < 3$, 再结合选项逐项判断可得答案.

【详解】 因为 $\log_7 4 > \log_8 4$, 则 $x = \log_2 3 + \log_7 4 > \log_2 3 + \log_8 4 = \log_2 3 + \log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 \sqrt[3]{108} > \log_2 \sqrt[3]{2^6} = 2$,

$x = \log_2 3 + \log_7 4 < \log_2 4 + \log_7 4 < 3$,

因为 $5^y = 3^x + 4^x > 3^2 + 4^2 = 5^2$, 所以 $y > 2$,

令 $f(x) = 3^x + 4^x - 5^x (x > 2)$, 则 $f(x) = 3^x + 4^x - 5^x = 3^2 \cdot 3^{x-2} + 4^2 \cdot 4^{x-2} - 5^2 \cdot 5^{x-2} < 3^2 \cdot 4^{x-2} + 4^2 \cdot 4^{x-2} - 5^2 \cdot 5^{x-2}$

$< 25(4^{x-2} - 5^{x-2}) < 0$, 所以 $3^x + 4^x < 5^x$, 又因为 $3^x + 4^x = 5^y$, 所以 $5^y < 5^x$, 可得 $y < x$,

所以 $2 < y < x < 3$,

对于 A, 因为 $2 < y < x < 3$, 所以 $x - y > 0, x - 2 > 0$, 由 $y > 2$ 得 $-y < -2$,

所以 $x - y < x - 2$, 可得 $|x - y| < |x - 2|$, 故 A 错误;

对于 B, 即证 $|x - y| > |3 - y|$, 因为 $2 < y < x < 3$, 所以 $x - y > 0, 3 - y > 0$, 由 $x < 3$ 得 $x - y < 3 - y$, 所以

$|x - y| < |3 - y|$, 故 B 错误;

对于 C, 即证 $|x - 2| < |y - 2|$, 因为 $2 < y < x < 3$, 所以 $x - 2 > 0, y - 2 > 0$, 由 $x > y$ 得 $x - 2 > y - 2$, 所以

$|x-2| > |y-2|$, 故 C 错误;

对于 D, $|3-x| < |3-y|$, 因为 $2 < y < x < 3$, 所以 $3-x > 0, y-3 > 0$, 由 $x > y$ 得 $-x < -y$, 所以 $3-x < 3-y$, 即 $|3-x| < |3-y|$, 故 D 正确.

故选: D.

【点睛】 关键点点睛: 本题的关键点是利用对数函数、指数函数的单调性得出 $2 < y < x < 3$, 考查了学生运算求解能力.

5. (22-23 高三·山东威海·模拟) 已知函数 $f(x) = 3^{|x|}$, 若 $a = f(\log_5 2)$, $b = f(\lg \frac{1}{4})$, $c = f(\log_{25} 10)$, 则

()

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $b < c < a$

D. $b < a < c$

【答案】 A

【分析】 根据对数函数的单调性和中间量比较出 $0 < \log_5 2 < \lg 4 < \log_{25} 10$, 再由函数 $f(x) = 3^{|x|}$ 的单调性得出结论.

【详解】 $0 = \log_5 1 < \log_5 2 = \log_5 \sqrt{4} < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, 由于 $|\lg \frac{1}{4}| = |-\lg 4| = \lg 4$, $\lg 4 = \lg \sqrt{16} > \lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, $\lg 4 = \lg \sqrt[3]{64} < \lg \sqrt[3]{100} = \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{1}{2} < \lg 4 < \frac{2}{3}$, $\log_{25} 10 = \log_{25} \sqrt[3]{1000} > \log_{25} \sqrt[3]{625} = \frac{2}{3}$, 所以 $0 < \log_5 2 < \lg 4 < \log_{25} 10$, 因为函数 $f(x) = 3^{|x|}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 则 $f(\log_5 2) < f(\lg 4) < \log_{25} 10$, 所以 $f(\log_5 2) < f(\lg \frac{1}{4}) < \log_{25} 10$.

故选: A

题型二: 基础函数: 对数函数性质

指 | 点 | 迷 | 津

对数函数比大小, 主要时通过对数计算公式转化为结果相同, 利用单调性比大小

对数运算公式

1. 对数的运算法则:

① $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

② $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

③ $\log_a M^n = n \log_a M$ ($n \in \mathbb{R}$);

④ $\log_{am} M^n = \frac{n}{m} \log_a M$.

2. 对数的性质: ① $a^{\log_a N} = \underline{N}$;

② $\log_a a^N = \underline{N}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

3. 对数的重要公式

1. (22-23 高三下·河南·阶段练习) 已知 $a = \lg 8$, $b = \log_3 2$, $c = \log_{12} 10$, $d = 3^{0.01}$, 则()

A. $c < b < a < d$ B. $d < a < c < b$ C. $a < b < c < d$ D. $b < a < c < d$

【答案】 D

【分析】 首先判断 a, b, c 范围均为 $(0, 1)$, $d > 1$, 则 d 最大; 用作商法可判断 a, b

大小；用作商法并结合基本不等式可判断 a, c 大小；从而可得四个数的大小关系。

【详解】 $a = \lg 8 \in (0, 1)$, $b = \log_3 2 \in (0, 1)$, $c = \log_{12} 10 \in (0, 1)$, $d = 3^{0.01} > 1$,

$$a = 3 \lg 2, b = \frac{\lg 2}{\lg 3}, c = \frac{1}{\lg 12},$$

$$\frac{a}{b} = 3 \lg 3 = \lg 27 > 1 \Rightarrow a > b,$$

$$\frac{a}{c} = \lg 8 \cdot \lg 12 < \left(\frac{\lg 8 + \lg 12}{2} \right)^2 = \left(\frac{\lg 96}{2} \right)^2 < \left(\frac{\lg 100}{2} \right)^2 = 1 \Rightarrow a < c,$$

$\therefore b < a < c < d$.

故选：D.

2. (23-24 高三·江苏泰州·模拟) 已知三个互不相等的正数 a, b, c 满足

$a = e^{\frac{2}{3}}, b = \log_2 3 + \log_9 6, c = \log_{\sqrt{5}}(2^a + 1)$, (其中 $e = 2.71828L$ 是一个无理数), 则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

【答案】B

【分析】由对数函数和指数函数的单调性和运算性质放缩，再加上基本不等式求解即可。

【详解】因为 $a = e^{\frac{2}{3}}$, 所以 $a^3 = e^2 = 2.7^2 < 2^3$

所以根据幂函数的性质可得 $e^{\frac{2}{3}} < 2$,

因为 a, b, c 都是正数,

$$b = \log_2 3 + \log_9 6 = \log_2 3 + \log_{3^2} 6 = \log_2 3 + \log_3 \sqrt{6} = 2\sqrt{\log_2 3 \times \log_3 \sqrt{6}} = 2\sqrt{\log_2 \sqrt{6}} > 2\sqrt{\log_2 2} = 2$$

$$c = \log_{\sqrt{5}}(2^a + 1) = 2 \log_5 \left(2^{\frac{2}{3}} + 1 \right) < 2 \log_5 (2^2 + 1) = 2 \log_5 5 = 2,$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\log_{\sqrt{5}}(2^a + 1)}{a} = \log_{(\sqrt{5})^a} (2^a + 1) = \frac{\ln(2^a + 1)}{\ln(\sqrt{5})^a},$$

因为 $f(x) = \ln x$ 是递增函数，又因为 $a \in (0, 2)$,

作出 $y = \ln(2^a + 1)$ 和 $y = \ln(\sqrt{5})^a$ 的图像，如图可得，当 $a = 2$ 时，两函数值相等； $a < 2$ 时， $y = \ln(2^a + 1)$ 图

像一直在 $y = \ln(\sqrt{5})^a$ 的上方，所以 $a < c$

故选：C.

【点睛】结论点睛：对数比大小常用结论： $\log_n(n-1) < \log_{n+1}n (n > 2)$.

4. (2024·辽宁·一模) 设 $a = e^{\frac{10}{33}}$, $b = \ln \frac{11}{10}$, $c = \frac{\ln 2.2}{10}$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < c < a$ D. $a < c < b$

【答案】B

【分析】由题意可得 $a > 1$, $b < 1$, $c < 1$, 即可得 $a > b$, $a > c$, 再比较 b 与 c 的大小关系, 借助对数运算转化为比较 $(1.1)^9$ 与 2 的大小关系, 结合放缩计算即可得.

【详解】 $a = e^{\frac{10}{33}} > e^0 = 1$, $b = \ln \frac{11}{10} < 1$, $c = \frac{\ln 2.2}{10} < 1$, 故 $a > b$, $a > c$,

要比较 $\ln \frac{11}{10}$ 与 $\frac{\ln 2.2}{10}$ 的大小, 即比较 $\ln \left(\frac{11}{10}\right)^{10}$ 与 $\ln 2.2$ 的大小,

等价于比较 $(1.1)^{10}$ 与 2.2 的大小, 等价于比较 $(1.1)^9$ 与 2 的大小,

又 $(1.1)^9 = 1.1 \times (1.1)^8 = 1.1 \times (1.21)^4 > 1.1 \times (1.2)^4 = 1.1 \times (1.44)^2 > 1.1 \times (1.4)^2 = 1.1 \times 1.96 > 2$, 故 $(1.1)^9 > 2$, 即

$\ln \frac{11}{10} > \frac{\ln 2.2}{10}$, 即 $b > c$, 故 $c < b < a$. 故选: B.

【点睛】关键点点睛: 本题关键在于比较 b 与 c 的大小关系, 可借助对数运算转化为比较 $(1.1)^9$ 与 2 的大小关系, 再借助放缩帮助运算即可得.

5. (23-24 高三·广东佛山·模拟) 已知 $2^a = 5, 3^b = 10, 4^c = 17$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $c < b < a$

【答案】D

【分析】根据指数式和对数式的转化, 将 a, b, c 表示为对数形式, 结合对数的运算性质以及对数函数的性质比较大小, 即可得答案.

【详解】由题意知 $2^a = 5, 3^b = 10, 4^c = 17$,

则 $a = \log_2 5 = \log_2 \left(4 \times \frac{5}{4}\right) = 2 + \log_2 \frac{5}{4}$, $b = \log_3 10 = \log_3 9 \times \frac{10}{9} = 2 + \log_3 \frac{10}{9}$,

$c = \log_4 17 = \log_4 16 \times \frac{17}{16} = 2 + \log_4 \frac{17}{16}$, 因为 $\frac{5}{4} > \frac{10}{9}$, 故 $\log_2 \frac{5}{4} > \log_2 \frac{10}{9}$,

又因为 $0 < \log_{\frac{10}{9}} 2 < \log_{\frac{10}{9}} 3$, 故 $\frac{1}{\log_{\frac{10}{9}} 2} > \frac{1}{\log_{\frac{10}{9}} 3}$, 即 $\log_2 \frac{10}{9} > \log_3 \frac{10}{9}$

故 $\log_2 \frac{5}{4} > \log_3 \frac{10}{9}$, 即得 $a > b$, 同理可得 $\frac{10}{9} > \frac{17}{16} > 1$, 故 $\log_3 \frac{10}{9} > \log_3 \frac{17}{16} > \log_4 \frac{17}{16}$, 即 $b > c$,

故 $c < b < a$, 故选: D

题型三：幂指对函数性质

指 | 点 | 迷 | 津

有关指数幂和对数值的比较大小问题，在解题的过程中，注意应用指数函数和对数函数的单调性，确定其对应值的范围.

比较指对幂形式的数的大小关系，常用方法：

- (1) 利用指数函数的单调性： $y = a^x$ ，当 $a > 1$ 时，函数递增；当 $0 < a < 1$ 时，函数递减；
- (2) 利用对数函数的单调性： $y = \log_a x$ ，当 $a > 1$ 时，函数递增；当 $0 < a < 1$ 时，函数递减；
- (3) 借助于中间值，例如：0 或 1 等.

1. (23-24 高三·辽宁朝阳·阶段练习) 已知 $a = 0.8^{0.5} + 0.8^{0.7} + 0.8^{0.9}$ ， $b = 0.6^{0.8} + 0.7^{0.8} + 0.8^{0.8}$ ， $c = e^{-\frac{8}{15}} + e^{-\frac{12}{35}} + e^{-\frac{1}{5}}$ ，则 ()

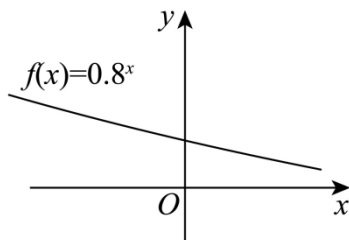
- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $b > c > a$

【答案】A

【分析】根据函数的上凸和下凸性质得到 $a = 0.8^{0.5} + 0.8^{0.7} + 0.8^{0.9} > 3 \times 0.8^{0.7}$ ，

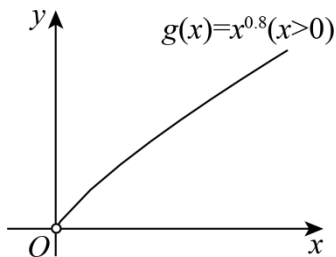
$b = 0.6^{0.8} + 0.7^{0.8} + 0.8^{0.8} < 3 \times 0.7^{0.8}$ ，结合 $0.8^{0.7} > 0.7^{0.7} > 0.7^{0.8}$ 得到 $a > b$ ，设 $h(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ ($0 < x < 1$)，求导得到 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，得到 $0.6^{0.8} > e^{-\frac{8}{15}}$ ，同理可得 $0.7^{0.8} > e^{-\frac{12}{35}}$ ， $0.8^{0.8} > e^{-\frac{1}{5}}$ ，相加后求出 $b > c$ ，得到答案.

【详解】设 $f(x) = 0.8^x$ ，画出 $f(x)$ 的图象，



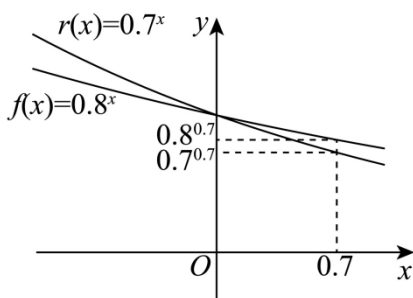
故 $f(x)$ 为下凸函数，当 $x_1 \neq x_2$ 时 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ ，

所以 $0.8^{0.5} + 0.8^{0.9} > 2 \times 0.8^{0.7}$ ， $a = 0.8^{0.5} + 0.8^{0.7} + 0.8^{0.9} > 3 \times 0.8^{0.7}$. 设 $g(x) = x^{0.8}$ ($x > 0$)，画出 $g(x)$ 图象，



故 $g(x)$ 为上凸函数，当 $x_1 \neq x_2$ 时 $\frac{g(x_1) + g(x_2)}{2} < g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ ，所以 $b = 0.6^{0.8} + 0.7^{0.8} + 0.8^{0.8} < 3 \times 0.7^{0.8}$ ，

同一坐标系内画出 $f(x) = 0.8^x$ 和 $r(x) = 0.7^x$ 的图象,



又 $y = 0.7^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, 故 $0.8^{0.7} > 0.7^{0.7} > 0.7^{0.8}$, 所以 $a > b$.

设 $h(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ ($0 < x < 1$), 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0$, $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

所以 $0 < x < 1$ 时 $h(x) > h(1) = 0$, 所以 $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$, $0.8 \ln 0.6 > \frac{4}{5} \left(1 - \frac{5}{3} \right) = -\frac{8}{15}$,

所以 $0.6^{0.8} > e^{-\frac{8}{15}}$, 同理可得 $0.7^{0.8} > e^{-\frac{12}{35}}$, $0.8^{0.8} > e^{-\frac{1}{5}}$, 相加得 $0.6^{0.8} + 0.7^{0.8} + 0.8^{0.8} > e^{-\frac{8}{15}} + e^{-\frac{12}{35}} + e^{-\frac{1}{5}}$, $b > c$,

所以 $a > b > c$. 故选: A

【点睛】 结合函数图象得到函数 $f(x)$ 的凹凸性, 进而可根据此性质得到以下结论,

若函数 $f(x)$ 为上凸函数, 则有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$,

若函数 $f(x)$ 为下凸函数, 则有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, 本题中可以此性质比较出 a, b 的大小.

2. (23-24 高三江苏泰州·模拟) 已知三个互不相等的正数 a, b, c 满足 $a = e^{\frac{2}{3}}, b = \log_2 3 + \log_9 6, c = \log_{\sqrt{5}}(2^a + 1)$,

(其中 $e = 2.718281$ 是一个无理数), 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$
- B. $a < c < b$
- C. $c < a < b$
- D. $c < b < a$

【答案】 B

【分析】 由对数函数和指幂函数的单调性和运算性质放缩, 再加上基本不等式求解即可.

【详解】 因为 $a = e^{\frac{2}{3}}$, 所以 $a^3 = e^2 = 2.7^2 < 2^3$ 所以根据幂函数的性质可得 $e^{\frac{2}{3}} < 2$,

因为 a, b, c 都是正数,

$$b = \log_2 3 + \log_9 6 = \log_2 3 + \log_3 6 = \log_2 3 + \log_3 \sqrt{6}^3 = 2\sqrt{\log_2 3 \times \log_3 \sqrt{6}} = 2\sqrt{\log_2 \sqrt{6}} > 2\sqrt{\log_2 2} = 2$$

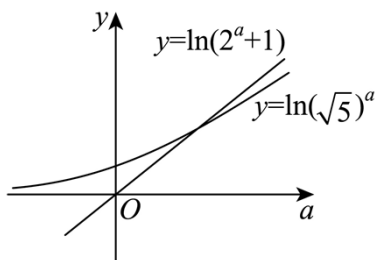
$$c = \log_{\sqrt{5}}(2^a + 1) = 2 \log_5 \left(2^{\frac{2}{3}} + 1 \right) < 2 \log_5 (2^2 + 1) = 2 \log_5 5 = 2,$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\log_{\sqrt{5}}(2^a + 1)}{a} = \log_{(\sqrt{5})^a} (2^a + 1) = \frac{\ln(2^a + 1)}{\ln(\sqrt{5})^a},$$

因为 $f(x) = \ln x$ 是递增函数, 又因为 $a \in (0, 2)$,

作出 $y = \ln(2^a + 1)$ 和 $y = \ln(\sqrt{5})^a$ 的图像, 如图可得, 当 $a = 2$ 时, 两函数值相等; $a < 2$ 时, $y = \ln(2^a + 1)$ 图

像一直在 $y = \ln(\sqrt{5})^a$ 的上方，所以 $a < c$



故 $a < c < b$ ，故选：B

【点睛】将 a 利用幂函数的单调性进行放缩；把 b 用指数函数的运算性质和基本不等式放缩；再把 c 用对数函数的性质放缩，最终得到结果.

3. (2023·河南·模拟预测) 已知 $a = \ln \pi, b = \log_3 \pi, c = \sqrt{\pi} \ln 2$ ，则 a, b, c 的大小关系是 ()

- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

【答案】A

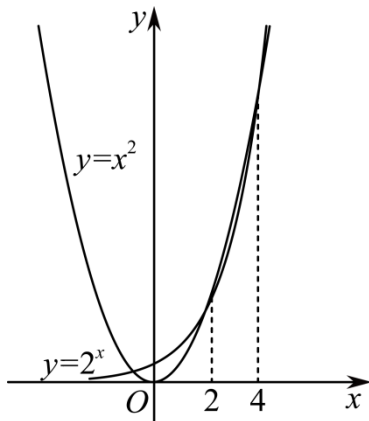
【分析】

利用对数函数和指数函数，幂函数的性质求解.

【详解】 $Q e < 3 < \pi, \therefore a = \log_e \pi > \log_3 \pi = b > \log_3 3 = 1$ ，即 $a > b > 1$ ，

$Q a = \ln \pi = \ln(\sqrt{\pi})^2, c = \sqrt{\pi} \ln 2 = \ln 2^{\sqrt{\pi}}$ ，下面比较 $(\sqrt{\pi})^2$ 与 $2^{\sqrt{\pi}}$ 的大小，构造函数 $y = x^2$ 与 $y = 2^x$ ，

由指数函数 $y = 2^x$ 与幂函数 $y = x^2$ 的图像与单调性可知，



当 $x \in (0, 2)$ 时， $x^2 < 2^x$ ；当 $x \in (2, 4)$ 时， $x^2 > 2^x$

由 $x = \sqrt{\pi} \in (0, 2)$ ，故 $(\sqrt{\pi})^2 < 2^{\sqrt{\pi}}$ ，故 $\ln \pi < \ln 2^{\sqrt{\pi}}$ ，即 $a < c$ ，所以 $b < a < c$ ，故选：A

4. (22-23 高三·河北唐山·阶段练习) 设 $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, b = \ln 1.5, c = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ ，则 a, b, c 的大小顺序是 ()

- A. $c < a < b$ B. $c < b < a$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

【答案】D

【分析】利用幂函数与对数函数的单调性即可得解.

【详解】因为 $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}} > 0, c = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{4}} > 0, \frac{9}{16} > \frac{8}{27} > \frac{1}{16} > 0$ ，

又因为 $y = x^{\frac{1}{4}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{4}} > \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{4}} > \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, 即 $a > c > \frac{1}{2}$,

因为 $\frac{9}{4} = 2.25 < e$, 所以 $\frac{3}{2} < e^{\frac{1}{2}}$, 又因为 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\ln \frac{3}{2} < \ln e^{\frac{1}{2}}$, 即 $b = \ln 1.5 < \frac{1}{2}$,

综上: $b < c < a$. 故选: D.

5. (2022·河南·一模) 已知 $a = e^{\pi}, b = \pi^e, c = (\sqrt{2})^{e\pi}$, 则这三个数的大小关系为 ()

- A. $c < b < a$ B. $b < c < a$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

【答案】A

【分析】构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}, (x > 0)$, 利用导数法研究单调性, 并利用单调性可比较 a, b , 在同一坐标系

中作出 $y = (\sqrt{2})^x$ 与 $y = x$ 的图象, 结合图象与幂函数的性质可比较 b, c , 即可求解

【详解】令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}, (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, (x > 0)$,

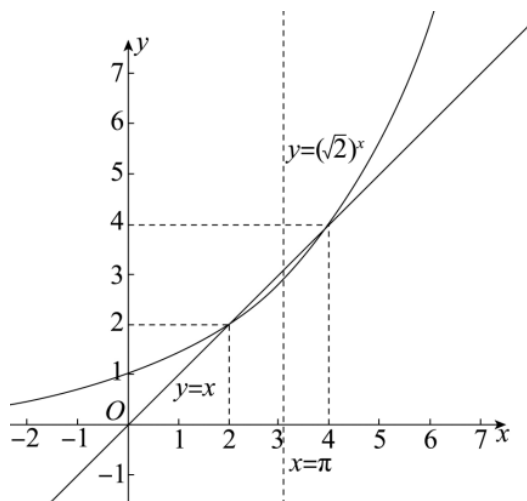
由 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < e$, 由 $f'(x) < 0$, 解得 $x > e$,

所以 $f(x) = \frac{\ln x}{x}, (x > 0)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减; 因为 $\pi > e$,

所以 $f(\pi) < f(e)$, 即 $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$, 所以 $e \ln \pi < \pi \ln e$, 所以 $\ln \pi^e < \ln e^{\pi}$, 又 $y = \ln x$ 递增,

所以 $\pi^e < e^{\pi}$, 即 $b < a$; $(\sqrt{2})^{e\pi} = \left[(\sqrt{2})^{\pi}\right]^e$,

在同一坐标系中作出 $y = (\sqrt{2})^x$ 与 $y = x$ 的图象, 如图:



由图象可知在 $(2, 4)$ 中恒有 $x > (\sqrt{2})^x$, 又 $2 < \pi < 4$, 所以 $\pi > (\sqrt{2})^{\pi}$,

又 $y = x^e$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $\pi > (\sqrt{2})^{\pi}$ 所以 $\pi^e > \left[(\sqrt{2})^{\pi}\right]^e = (\sqrt{2})^{e\pi}$, 即 $b > c$;

综上可知: $c < b < a$, 故选: A

6. (2024 年高考天津卷) 若 $a = 4.2^{-0.3}, b = 4.2^{0.3}, c = \log_{4.2} 0.2$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $b > c > a$

【答案】B

【解析】

【分析】利用指数函数和对数函数的单调性分析判断即可.

【详解】因为 $y = 4.2^x$ 在 \mathbb{R} 上递增, 且 $-0.3 < 0 < 0.3$,

所以 $0 < 4.2^{-0.3} < 4.2^0 < 4.2^{0.3}$, 所以 $0 < 4.2^{-0.3} < 1 < 4.2^{0.3}$, 即 $0 < a < 1 < b$,

因为 $y = \log_{4.2} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 且 $0 < 0.2 < 1$, 所以 $\log_{4.2} 0.2 < \log_{4.2} 1 = 0$, 即 $c < 0$,

所以 $b > a > c$, 故选: B

题型四: 借助 0、1 分界

指 | 点 | 迷 | 津

解答比较函数值大小问题, 常见的基础思路之一是判断各个数值所在的区间, 这样的区间划分, 最基础的是以正负划分, 正数则以 1 为区间端点划分.

指、对、幂大小比较的常用方法:

- (1) 底数相同, 指数不同时, 如 a^{x_1} 和 a^{x_2} , 利用指数函数 $y = a^x$ 的单调性;
- (2) 指数相同, 底数不同, 如 x_1^a 和 x_2^a 利用幂函数 $y = x^a$ 单调性比较大小;
- (3) 底数相同, 真数不同, 如 $\log_a x_1$ 和 $\log_a x_2$ 利用指数函数 $\log_a x$ 单调性比较大小;
- (4) 底数、指数、真数都不同, 寻找中间变量 0, 1 或者其它能判断大小关系的中间量, 借助中间量进行大小关系的判定.

1. (23-24 高三·辽宁朝阳·阶段练习) 已知 $a = 0.8^{0.5} + 0.8^{0.7} + 0.8^{0.9}$, $b = 0.6^{0.8} + 0.7^{0.8} + 0.8^{0.8}$,

$c = e^{-\frac{8}{15}} + e^{-\frac{12}{35}} + e^{-\frac{1}{5}}$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $b > c > a$

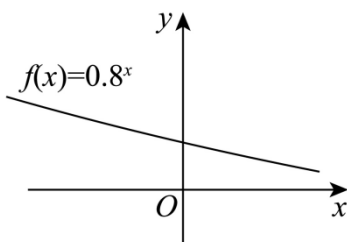
【答案】A

【分析】根据函数的上凸和下凸性质得到 $a = 0.8^{0.5} + 0.8^{0.7} + 0.8^{0.9} > 3 \times 0.8^{0.7}$,

$b = 0.6^{0.8} + 0.7^{0.8} + 0.8^{0.8} < 3 \times 0.7^{0.8}$, 结合 $0.8^{0.7} > 0.7^{0.7} > 0.7^{0.8}$ 得到 $a > b$, 设 $h(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ ($0 < x < 1$), 求导

得到 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 得到 $0.6^{0.8} > e^{-\frac{8}{15}}$, 同理可得 $0.7^{0.8} > e^{-\frac{12}{35}}$, $0.8^{0.8} > e^{-\frac{1}{5}}$, 相加后求出 $b > c$, 得到答案.

【详解】设 $f(x) = 0.8^x$, 画出 $f(x)$ 的图象,



因为 $a = \log_3 \frac{7}{2} > \log_3 3 = 1$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 4^{-\frac{1}{3}} < 1$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} = \log_3 5 > 1$,

$\log_3 5 > \log_3 \frac{7}{2}$, 所以 $c > a > b$, 故选: D

3. (广东省陆丰市林启恩纪念中学 2021-2022 学年高三学期 (12 月) 数学试题) 已知 $a = 0.3^{\frac{1}{2}}$, $b = 2^{0.2}$, $c = 0.3^{0.2}$, 则 a , b , c 三者的大小关系是 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $c > b > a$

【答案】 C

【分析】

利用指数函数的性质比较即可

【详解】

因为 $y = 0.3^x$ 在 R 上为减函数, 且 $\frac{1}{2} > 0.2 > 0$,

所以 $0.3^{\frac{1}{2}} < 0.3^{0.2} < 0.3^0$, 即 $0.3^{\frac{1}{2}} < 0.3^{0.2} < 1$,

因为 $y = 2^x$ 在 R 上为增函数, 且 $0.2 > 0$,

所以 $2^{0.2} > 2^0 = 1$,

所以 $0.3^{\frac{1}{2}} < 0.3^{0.2} < 1 < 2^{0.2}$, 所以 $b > c > a$

故选: C.

4. (陕西省西安市第一中学 2021-2022 学年高三上学期期中) 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足当 $m \neq n$ 时,

不等式 $(m-n)[f(m)-f(n)] < 0$ 恒成立, 若 $a = f\left(\log_5 \frac{1}{2}\right)$, $b = f\left(\log_2 \frac{1}{2}\right)$, $c = f(4^{0.3})$, 则 a , b , c 大小关系为 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$

【答案】 D

【分析】

依题意可得函数 $f(x)$ 在 R 上为减函数, 再根据指数、对数的性质比较自变量的大小即可;

【详解】

解: 根据题意, 函数 $f(x)$ 满足当 $m \neq n$ 时, 不等式 $(m-n)[f(m)-f(n)] < 0$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$ 在 R 上为减函数,

因为 $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, $-1 = \log_5 \frac{1}{5} < \log_5 \frac{1}{2} < 0$, 即 $-1 < \log_5 \frac{1}{2} < 0$, 又 $1 = 4^0 < 4^{0.3}$

所以 $f\left(\log_2 \frac{1}{2}\right) > f\left(\log_5 \frac{1}{2}\right) > f(4^{0.3})$, 即 $b > a > c$, 故选: D.

题型五: 指数型同构法

【分析】

先借助中间量“2”比较出 a, c 间的大小关系和 b, c 间的大小关系，再将 a, b 分别化为 $3^{\frac{5}{10}}, 2^{\frac{6}{10}}$ ，进而化为根式即可比较出 a, b 的大小关系，最后得到答案.

【详解】

因为 $a = 3^{0.5} = \sqrt{3} < 2, b = 2^{0.6} < 2^1 = 2, c = \ln 10 > \ln e^2 = 2$ ，所以 $a < c, b < c$ ，

又因为 $a = 3^{0.5} = 3^{\frac{5}{10}} = \sqrt[10]{243}, b = 2^{\frac{6}{10}} = \sqrt[10]{64}$ ，所以 $a > b$ ，

综上： $c > a > b$. 故选：D.

4. 已知三个实数 $a, b = a^a, c = a^{a^a}$ ，其中 $0 < a < 1$ ，则这三个数的大小关系是 ()

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$

【答案】A
【分析】

利用指数函数的单调性判断.

【详解】

$\because 0 < a < 1$ ， \therefore 由指数函数的性质，有 $a^1 < a^a < a^0 = 1$ ， $\therefore 1 > a^a > a$. 再由指数函数的性质得 $a < a^{a^a} < a^a$ ，即 $a < c < b$.

故选：A

题型六：借助常数分界

指 | 点 | 迷 | 津

寻找非 0、1 的中间变量是难点。中间变量的选择首先要估算要比较大小的两个值所在的大致区间。然后可以对区间使用二分法（或者利用区间内特殊值，或者利用指对互化）寻找合适的中间值。

1. 估算要比较大小的两个值所在的大致区间
2. 可以对区间使用二分法（或者利用指对转化）寻找合适的中间值
3. 利用幂指对等函数计算公式进行适当的放缩转化

1. (陕西省西安市第一中学 2024 届高三下学期高考模拟押题文科数学试题 (一)) 若

$a = 0.31^{1.5}, b = \log_3 12, c = \log_2 6, d = \sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$ ，则有 ()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > d$
C. $c > a > b$ D. $b > c > a$

【答案】B

【分析】由题意首先得 $0 < a < 1, d = \sqrt[3]{-\frac{2}{3}} < 0$ ，进一步 $b = \log_3 12 = 1 + \log_3 4 > 2, c = \log_2 6 = 1 + \log_2 3 > 2$ ，从而我们只需要比较 $\log_3 4, \log_2 3$ 的大小关系即可求解，两式作商结合基本不等式、换底公式即可比较.

【详解】 $a = 0.31^{1.5} < 0.31^0 = 1$ ，所以 $0 < a < 1, d = \sqrt[3]{-\frac{2}{3}} < 0$ ，
 $b = \log_3 12 = 1 + \log_3 4 > 2, c = \log_2 6 = 1 + \log_2 3 > 2$ ，

$$\text{又因为 } \frac{\log_3 4}{\log_2 3} = \frac{\ln 4 \cdot \ln 2}{\ln 3 \cdot \ln 3} < \frac{\left(\frac{\ln 4 + \ln 2}{2}\right)^2}{\ln 3 \cdot \ln 3} = \frac{(\ln 2 \sqrt{2})^2}{(\ln 3)^2} < 1,$$

所以 $b < c$, 即 $d < a < b < c$. 故选: B.

2. (2024 年普通高等学校招生全国统一考试数学理科猜题卷 (四)) 已知 $a = \log_5 2$, $b = \lg 4$, $c = 2e^{-1}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

【答案】A

【分析】根据题意利用指、对数函数单调性以及指、对数运算分析判断.

【详解】因为 $a = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, $b = \lg 4 > \lg \sqrt{10} = \frac{1}{2}$, 所以 $a < b$;

又因为 $3 \lg 2 = \lg 2^3 = \lg 8 < 1, 3e^{-1} > 1$, 则 $3 \lg 2 < 3e^{-1}$,

即 $\lg 2 < e^{-1}$, 所以 $2 \lg 2 = \lg 4 < 2e^{-1}$, 即 $b < c$;

所以 $a < b < c$. 故选: A.

3. (2022 年全国著名重点中学领航高考冲刺试卷 (九)) 若 $a = \log_3 2$, $b = \log_\pi 3$, $c = \log_8 5$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$
C. $b < c < a$ D. $a < c < b$

【答案】D

【分析】

根据对数函数的单调性, 分别计算 a, b, c 的范围即可比较大小.

【详解】

因为 $2^3 < 3^2$, 所以 $\log_3 2^3 < \log_3 3^2$, 即 $3 \log_3 2 < 2 \log_3 3 = 2$, 可得 $\log_3 2 < \frac{2}{3}$, 即 $a < \frac{2}{3}$,

因为 $5^5 < 8^4$, 所以 $\log_8 5^5 < \log_8 8^4$, 即 $5 \log_8 5 < 4 \log_8 8 = 4$,

所以 $\log_8 5 < \frac{4}{5}$, 又 $\log_8 5 > \log_8 4 = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$, 可得 $\frac{2}{3} < c < \frac{4}{5}$,

因为 $\left(\frac{\pi}{3}\right)^4 < (1.1)^4 = 1.4641 < 3$, 故 $\pi^4 < 3^5$ 所以 $\log_\pi \pi^4 < \log_\pi 3^5$, 即 $4 \log_\pi \pi < 5 \log_\pi 3$,

所以 $\log_\pi 3 > \frac{4}{5}$, 即 $b > \frac{4}{5}$, 所以 $a < c < b$. 故选: D.

4. (广西师大附属外国语学校 2021 届高三 5 月高考考前模拟考试数学 (理) 试题) 已知 $a = \log_5 6$,

$b = \log_3 5$, $c = \log_2 3$, $d = \frac{3}{2}$, 则 a, b, c, d 的大小关系是 ()

- A. $b < a < d < c$ B. $a < b < c < d$
C. $b < a < c < d$ D. $a < b < d < c$

【答案】D

【分析】

利用对数函数的单调性比较 a 、 b 、 c 与 d 的大小关系，利用中间值法判断出 a 、 b 的大小关系，综合可得出 a 、 b 、 c 、 d 的大小关系。

【详解】

$$Q a = \log_5 6 < \log_5 5\sqrt{5} = \frac{3}{2} = d, \quad b = \log_3 5 < \log_3 3\sqrt{3} = \frac{3}{2} = d, \quad c = \log_2 3 > \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} = d,$$

$$Q 6^4 = 1296 < 5^5 = 3125, \therefore 6 < 5^{\frac{5}{4}}, \text{ 则 } a = \log_5 6 < \log_5 5^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4},$$

$$Q 5^4 = 625 > 3^5 = 243, \therefore 5 > 3^{\frac{5}{4}}, \text{ 则 } b = \log_3 5 > \log_3 3^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4},$$

因此， $a < b < d < c$. 故选：D.

题型七：放缩型

指 | 点 | 迷 | 津

放缩：

1. 借助幂指对函数的单调性进行放缩。

2. 常用一些放缩公式：

$$\tan x \geq x \geq \sin x, \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right);$$

$e^x \geq x + 1$, 当 $x = 0$ 时取等;

$\ln x \leq x - 1$, 当 $x = 1$ 时取等,

1. (湖北省恩施州咸丰春晖学校 2022-2023 学年高二上学期 11 月月考数学试题) 若 $a = \ln 5$, $b = \frac{4}{3}$, $c = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

则它们的大小关系是 ()

A. $a > c > b$ B. $b > c > a$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

【答案】 D

【分析】 先判断 b, c 大小，再分别判断 a, b 和 a, c 的大小即可

【详解】 因为 $c = \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{\sqrt{5}} > \frac{4}{3} = b$, 故 $c > b$. 又 $3a = 3 \ln 5 = \ln 125$, $3b = 4 = \ln e^4 < \ln 3^4 = \ln 81 < \ln 125 = 3a$,

故 $b < a$. 再分析 a, c 和 $\frac{5}{3}$ 的大小，因为 $c^2 = \frac{16}{5} > 3$, $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} < 3$, 故 $c > \frac{5}{3}$, 又

$3a = \ln 125 < \ln 2.7^5 < \ln e^5 = 5$, 故 $a < \frac{5}{3}$, 故 $c > a$. 综上有 $c > a > b$

故选：D

2. (山东省枣庄市第三中学 2021-2022 学年高三质量检测数学试题) 已知 $a = \frac{\ln 2}{2}$, $b = \frac{\ln 3}{3}$, $c = \frac{\ln 5}{5}$, 则 a , b , c 的大小关系为 ()

【分析】由题设有 $\frac{\ln a}{a} = 10k \ln 8, \frac{\ln b}{b} = 9k \ln 9, \frac{\ln c}{c} = 8k \ln 10$, 构造 $g(x) = (18-x) \ln x$ 且 $x \in [8, +\infty)$ 研究单调性比较 $g(8), g(9), g(10)$ 大小, 进而确定 $\frac{\ln a}{a}, \frac{\ln b}{b}, \frac{\ln c}{c}$, 再构造 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 且 $x \in (e, +\infty)$ 研究单调性比较参数大小.

【详解】由 $\frac{\ln a}{10} = ak \ln 8, \frac{\ln b}{9} = bk \ln 9, \frac{\ln c}{8} = ck \ln 10$,
得 $\frac{\ln a}{a} = 10k \ln 8, \frac{\ln b}{b} = 9k \ln 9, \frac{\ln c}{c} = 8k \ln 10$.

令 $g(x) = (18-x) \ln x$ 且 $x \in [8, +\infty)$, 则 $g'(x) = -\ln x + \frac{18}{x} - 1$ 且在 $[8, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{而 } g'(8) = -\ln 8 + \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} - \ln 8 < \frac{5}{4} - \ln e^2 = \frac{5}{4} - 2 < 0,$$

所以 $g'(x) < 0$ 在 $[8, +\infty)$ 上恒成立, 故 $g(x)$ 在 $[8, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $g(8) > g(9) > g(10)$, 即 $10 \ln 8 > 9 \ln 9 > 8 \ln 10$,

所以 $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} > \frac{\ln c}{c}$,

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 且 $x \in (e, +\infty)$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 故 $c > b > a$.

故选: B

【点睛】关键点点睛: 由 $\frac{\ln a}{a} = 10 \ln 8, \frac{\ln b}{b} = 9 \ln 9, \frac{\ln c}{c} = 8 \ln 10$, 构造 $g(x) = (18-x) \ln x$ 研究单调性比较等式右侧大小确定 $\frac{\ln a}{a}, \frac{\ln b}{b}, \frac{\ln c}{c}$ 大小, 构造 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 并利用单调性确定参数大小.

3. (2023·河南·校联考模拟预测) 设 $a = \frac{\ln 4}{4}$, $b = \frac{4 - \ln 4}{e^2}$, $c = \frac{\sqrt{e}}{2e}$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

【答案】D

【分析】构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 求导判断其单调性, 利用单调性比较大小, 注意 $a = f(4) = f(2)$.

【详解】由题意可得 $a = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$, $b = \frac{4 - \ln 4}{e^2} = \frac{\ln \frac{e^2}{2}}{e^2}$, $c = \frac{\sqrt{e}}{2e} = \frac{\ln \sqrt{e}}{\sqrt{e}}$,

设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

故当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/295144241314011313>