

广东揭阳市惠来县第一中学 2024 届高三下学期第十五周综合练习数学试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型 (B) 填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 大衍数列，米源于我国古代文献《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论，主要用于解释我国传统文化中的太极衍生原理，数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾经经历过的两仪数量总和.已知该数列前 10 项是 0, 2, 4, 8, 12, 18, 24, 32, 40, 50, ..., 则大衍数列中奇数项的通项公式为 ()

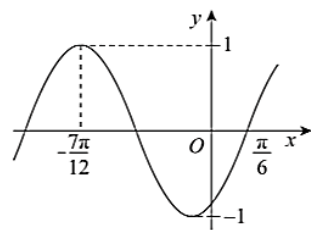
A. $\frac{n^2 - n}{2}$ B. $\frac{n^2 - 1}{2}$ C. $\frac{(n-1)^2}{2}$ D. $\frac{n^2}{2}$

2. 本次模拟考试结束后，班级要排一张语文、数学、英语、物理、化学、生物六科试卷讲评顺序表，若化学排在生物前面，数学与物理不相邻且都不排在最后，则不同的排表方法共有 ()

A. 72 种 B. 144 种 C. 288 种 D. 360 种

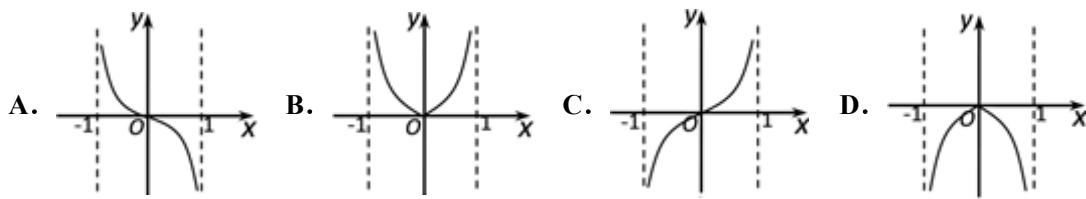
3. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位长度, 得到

函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x) = \frac{1}{3}$ 是 $g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 的 ()



- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 设函数 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x}$, 则函数的图像可能为 ()



5. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $\frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2 b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2$, 若 c 为最大边, 则 $\frac{a+b}{c}$ 的取值范围是 ()

- A. $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ B. $(1, \sqrt{3})$ C. $\left[1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ D. $(1, \sqrt{3}]$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是线段 BC 上任意一点, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. 2

7. 已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{5}{4}$

8. 在钝角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , B 为钝角, 若 $a \cos A = b \sin A$, 则 $\sin A + \sin C$ 的最大值为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{9}{8}$ C. 1 D. $\frac{7}{8}$

9. 已知 $a > 0, f(x) = ax^2 - x + 1 (x > 0), A = \{x | f(x) \leq x\}, B = \{x | f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$, 若 $A = B \neq \emptyset$ 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 1]$ B. $(0, \frac{3}{4}]$ C. $[\frac{3}{4}, 1]$ D. $[1, +\infty)$

10. 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \left\{x \mid y = (x-1)^{-\frac{1}{2}}\right\}, B = \{x \mid x^2 - 2x < 0\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$ ()

- A. $(0, 2)$ B. $(1, 2]$ C. $[0, 1]$ D. $(0, 1]$

11. 已知平面 $ABCD \perp$ 平面 $ADEF, AB \perp AD, CD \perp AD$, 且 $AB = 3, AD = CD = 6, ADEF$ 是正方形, 在正方形 $ADEF$ 内部有一点 M , 满足 MB, MC 与平面 $ADEF$ 所成的角相等, 则点 M 的轨迹长度为 ()

- A. $\frac{4}{3}$ B. 16 C. $\frac{4}{3}\pi$ D. 8π

12. 集合 $M = \{y \mid y = \sqrt{4-x^2}, x \in \mathbf{Z}\}$ 的真子集的个数为 ()

- A. 7 B. 8 C. 31 D. 32

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x (x \leq 0) \\ 12 - 3x (x > 0) \end{cases}$, 则 $f(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$; 满足 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

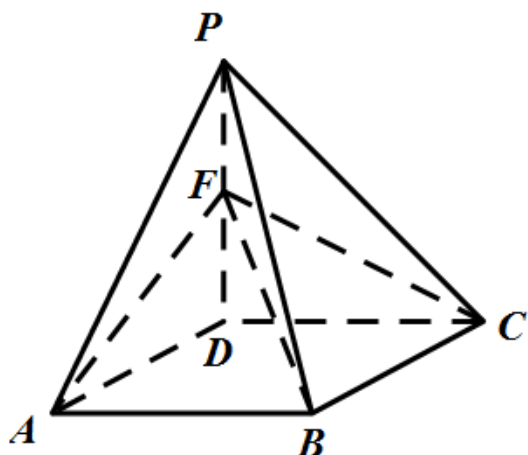
14. 已知函数 $f(x) = m(2x+1)^3 - 2e^x$, 若曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $4x + y - 2 = 0$ 平行, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + 2y \leq 3 \\ 4x - y \geq -6 \end{cases}$, 则 $z = x - 2y$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 已知 $A(3,1), B(-1,3)$, 若点 C 满足 $\vec{OC} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 且 $\alpha + \beta = 1$, 则点 C 的轨迹方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle DAB = 60^\circ, \angle ADP = 90^\circ$, 平面 $ADP \perp$ 平面 $ABCD$, 点 F 为棱 PD 的中点.



(I) 在棱 AB 上是否存在一点 E , 使得 $AF \perp$ 平面 PCE , 并说明理由;

(II) 当二面角 $D-FC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时, 求直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角.

18. (12 分) 已知曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos \alpha \\ y = 2\sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 8 + t \cos \frac{3\pi}{4} \\ y = t \sin \frac{3\pi}{4} \end{cases}$ (t 为参数).

(1) 求 C_1 和 C_2 的普通方程;

(2) 过坐标原点 O 作直线交曲线 C_1 于点 M (M 异于 O), 交曲线 C_2 于点 N , 求 $\frac{|ON|}{|OM|}$ 的最小值.

19.（12 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x) = \log_2(|x+1|+|x-2|-m)$.

- (1) 当 $m=7$ 时，求函数 $f(x)$ 的定义域；
- (2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 2$ 的解集是 $\mathbb{R}$ ，求 m 的取值范围.

20.（12 分）已知函数 $f(x) = 16 - |2x-1|$.

- (1) 解不等式 $f(x) \leq |x+2|$ ；
- (2) 若函数 $y = f(x) - a$ 存在零点，求 a 的求值范围.

21.（12 分）已知某种细菌的适宜生长温度为 $12^{\circ}\text{C} \sim 27^{\circ}\text{C}$ ，为了研究该种细菌的繁殖数量 y （单位：个）随温度 x （单位： $^{\circ}\text{C}$ ）变化的规律，收集数据如下：

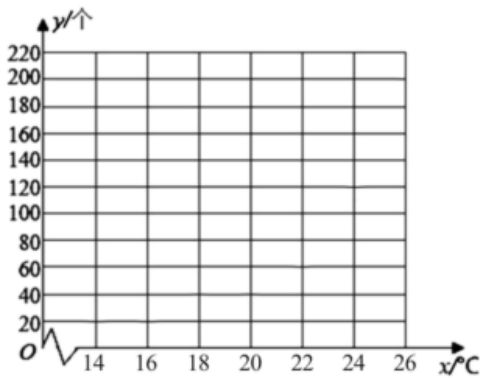
温度 $x/^{\circ}\text{C}$	14	16	18	20	22	24	26
繁殖数量 y /个	25	30	38	50	66	120	218

对数据进行初步处理后，得到了一些统计量的值，如表所示：

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{k}$	$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^7 (k_i - \bar{k})^2$	$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(k_i - \bar{k})$
20	78	4.1	112	3.8	1590	20.5

其中 $k_i = \ln y_i$ ， $\bar{k} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 k_i$.

- (1) 请绘出 y 关于 x 的散点图，并根据散点图判断 $y = bx + a$ 与 $y = ce^{dx}$ 哪一个更适合作为该种细菌的繁殖数量 y 关于温度 x 的回归方程类型（给出判断即可，不必说明理由）；



- (2) 根据（1）的判断结果及表格数据，建立 y 关于 x 的回归方程（结果精确到 0.1）；
- (3) 当温度为 27°C 时，该种细菌的繁殖数量的预报值为多少？

参考公式：对于一组数据 $(u_i, v_i) (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ，其回归直线 $v = \beta u + a$ 的斜率和截距的最小二成估计分别为

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad a = \bar{v} - \beta \bar{u}, \quad \text{参考数据: } e^{5.5} \approx 245.$$

22. (10 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $(a + 2c) \cos B + b \cos A = 0$ 。

(1) 求 B ；

(2) 若 $b = 4$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

直接代入检验，排除其中三个即可。

【详解】

由题意 $a_1 = 0$ ，排除 D， $a_3 = 4$ ，排除 A，C。同时 B 也满足 $a_5 = 12$ ， $a_7 = 24$ ， $a_9 = 40$ ，

故选：B。

【点睛】

本题考查由数列的项选择通项公式，解题时可代入检验，利用排除法求解。

2、B

【解析】

利用分步计数原理结合排列求解即可

【详解】

第一步排语文，英语，化学，生物 4 种，且化学排在生物前面，有 $A_4^2 = 12$ 种排法；第二步将数学和物理插入前 4 科

除最后位置外的 4 个空挡中的 2 个，有 $A_4^2 = 12$ 种排法，所以不同的排表方法共有 $12 \times 12 = 144$ 种。

选 B。

【点睛】

本题考查排列的应用,不相邻采用插空法求解,准确分步是关键,是基础题

3、B

【解析】

先根据图象求出函数 $g(x)$ 的解析式,再由平移知识得到 $f(x)$ 的解析式,然后分别找出

$f(x) = \frac{1}{3}$ 和 $g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 的等价条件,即可根据充分条件,必要条件的定义求出.

【详解】

设 $g(x) = A \sin(\omega x + \mu)$, 根据图象可知,

$$A = 1, \frac{3}{4}T = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{7\pi}{12}\right) \Rightarrow T = \pi \Rightarrow \omega = 2,$$

$$\text{再由 } g\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left[2 \times \left(-\frac{7\pi}{12}\right) + \mu\right] = 1, \text{ 取 } \mu = -\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

将函数 $g(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位长度,得到函数 $f(x)$ 的图象,

$$\therefore f(x) = g\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}, g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{令 } \theta = x - \frac{\pi}{6}, \text{ 则 } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1}{3}, \text{ 显然, } \cos 2\theta = \frac{1}{3} \not\Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3} \text{ 是 } g\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 的必要不充分条件.}$$

故选: B.

【点睛】

本题主要考查利用图象求正(余)弦型函数的解析式,三角函数的图形变换,二倍角公式的应用,充分条件,必要条件的定义的应用,意在考查学生的数学运算能力和逻辑推理能力,属于中档题.

4、B

【解析】

根据函数为偶函数排除 A, C ，再计算 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \ln 3 > 0$ 排除 D 得到答案.

【详解】

$$f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ 定义域为: } (-1, 1)$$

$$f(-x) = -x \ln \frac{1-x}{1+x} = x \ln \frac{1+x}{1-x} = f(x), \text{ 函数为偶函数, 排除 } A, C$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \ln 3 > 0, \text{ 排除 } D$$

故选 B

【点睛】

本题考查了函数图像，通过函数的单调性，奇偶性，特殊值排除选项是常用的技巧.

5、C

【解析】

由 $\frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2 b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2$ ，化简得到 $\cos C$ 的值，根据余弦定理和基本不等式，即可求解.

【详解】

$$\text{由 } \frac{a^4 + b^4 + c^4 + a^2 b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2, \text{ 可得 } \frac{(a^2 + b^2)^2 + c^4 - a^2 b^2}{a^2 + b^2} = 2c^2,$$

$$\text{可得 } a^2 + b^2 - c^2 = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2) + a^2 b^2}{a^2 + b^2},$$

$$\text{通分得 } \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(c^2 - a^2 - b^2) + a^2 b^2}{a^2 + b^2} = 0,$$

$$\text{整理得 } (a^2 + b^2 - c^2)^2 = a^2 b^2, \text{ 所以 } (\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab})^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{因为 } C \text{ 为三角形的最大角, 所以 } \cos C = -\frac{1}{2},$$

$$\text{又由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 + ab = (a+b)^2 - ab$$

$$\geq (a+b)^2 - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{3}{4}(a+b)^2, \text{ 当且仅当 } a=b \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\text{所以 } c > \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b), \text{ 即 } \frac{a+b}{c} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{又由 } a+b > c, \text{ 所以 } \frac{a+b}{c} \text{ 的取值范围是 } (1, \frac{2\sqrt{3}}{3}].$$

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了代数式的化简，余弦定理，以及基本不等式的综合应用，试题难度较大，属于中档试题，着重考查了推理与运算能力.

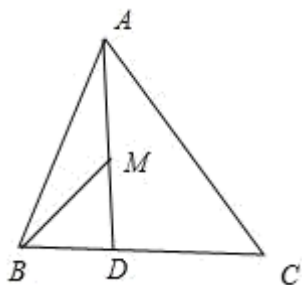
6、A

【解析】

设 $\vec{BD} = k\vec{BC}$ ，用 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 表示出 $\vec{BM}$ ，求出 λ, μ 的值即可得出答案.

【详解】

设 $\vec{BD} = k\vec{BC} = k\vec{AC} - k\vec{AB}$



由 $2\vec{AM} = \vec{AD}$

$$\therefore \vec{BM} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BD}) = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{k}{2}\vec{AC} - \frac{k}{2}\vec{AB}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{k}{2}\right)\vec{AB} + \frac{k}{2}\vec{AC},$$

$$\therefore \lambda = -\frac{1}{2} - \frac{k}{2}, \mu = \frac{k}{2},$$

$$\therefore \lambda + \mu = -\frac{1}{2}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了向量加法、减法以及数乘运算，需掌握向量加法的三角形法则以及向量减法的几何意义，属于基础题.

7、C

【解析】

将圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ ，化为标准方程为，求得圆心为 $(2, -1)$. 根据圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线

$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称，则圆心在渐近线上， $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. 再根据 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 求解.

【详解】

已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$,

所以其标准方程为： $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ ，

所以圆心为 $(2, -1)$ 。

因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，

所以其渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

又因为圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称，

则圆心在渐近线上，

所以 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ 。

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 。

故选：C

【点睛】

本题主要考查圆的方程及对称性，还有双曲线的几何性质，还考查了运算求解的能力，属于中档题。

8、B

【解析】

首先由正弦定理将边化角可得 $\cos A = \sin B$ ，即可得到 $A = B - \frac{\pi}{2}$ ，再求出 $B \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ ，最后根据

$\sin A + \sin C = \sin\left(B - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left[\pi - \left(B - \frac{\pi}{2}\right) - B\right]$ 求出 $\sin A + \sin C$ 的最大值；

【详解】

解：因为 $a \cos A = b \sin A$ ，

所以 $\sin A \cos A = \sin B \sin A$

因为 $\sin A \neq 0$

所以 $\cos A = \sin B$

Q $B > \frac{\pi}{2}$

$\therefore A = B - \frac{\pi}{2}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/296100103014010241>