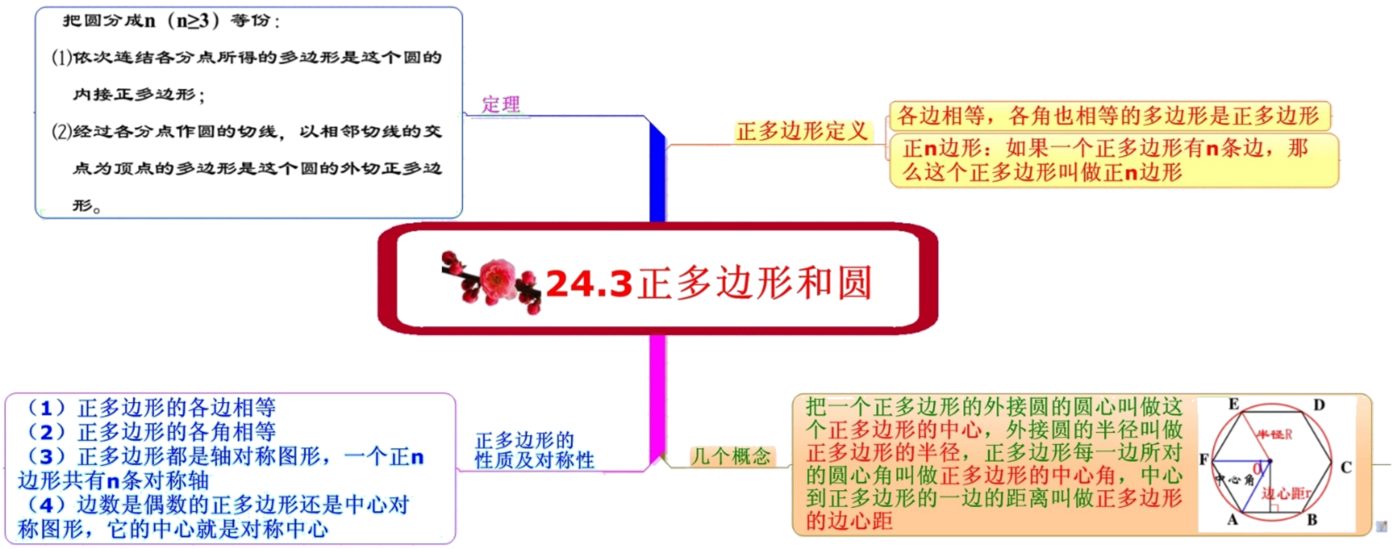
专题 12 正多边形和圆（综合题）

知识互联网



易错点拨

知识点 01：正多边形的概念

各边相等，各角也相等的多边形是正多边形.

细节剖析：

判断一个多边形是否是正多边形，必须满足两个条件：(1)各边相等；(2)各角相等；缺一不可.如菱形的各边都相等，矩形的各角都相等，但它们都不是正多边形(正方形是正多边形).

知识点 02：正多边形的重要元素

1.正多边形的外接圆和圆的内接正多边形

正多边形和圆的关系十分密切，只要把一个圆分成相等的一些弧，就可以作出这个圆的内接正多边形，这个圆就是这个正多边形的外接圆.

2.正多边形的有关概念

(1)一个正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的中心.

(2)正多边形外接圆的半径叫做正多边形的半径.

(3)正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的中心角.

(4)正多边形的中心到正多边形的一边的距离叫做正多边形的边心距.

3. 正多边形的有关计算

(1)正 n 边形每一个内角的度数是 $\frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n}$；

(2)正 n 边形每个中心角的度数是 $\frac{360^{\circ}}{n}$；

(3)正 n 边形每个外角的度数是 $\frac{360^{\circ}}{n}$.

细节剖析:

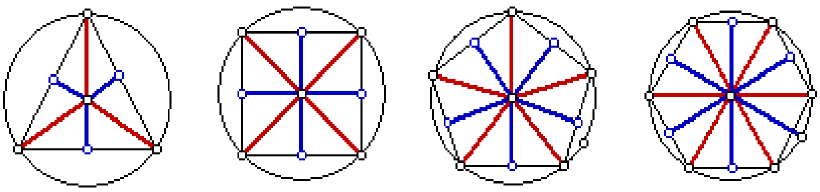
要熟悉正多边形的基本概念和基本图形，将待解决的问题转化为直角三角形.

知识点 03：正多边形的性质

1. 正多边形都只有一个外接圆，圆有无数个内接正多边形.

2. 正 n 边形的半径和边心距把正 n 边形分成 2 n 个全等的直角三角形.

3. 正多边形都是轴对称图形，对称轴的条数与它的边数相同，每条对称轴都通过正 n 边形的中心；当边数是偶数时，它也是中心对称图形，它的中心就是对称中心.



4. 边数相同的正多边形相似。它们周长的比，边心距的比，半径的比都等于相似比，面积的比等于相似比的平方.

5. 任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆

细节剖析:

（1）各边相等的圆的内接多边形是圆的内接正多边形；（2）各角相等的圆的外切多边形是圆的外切正多边形.

知识点 04：正多边形的画法

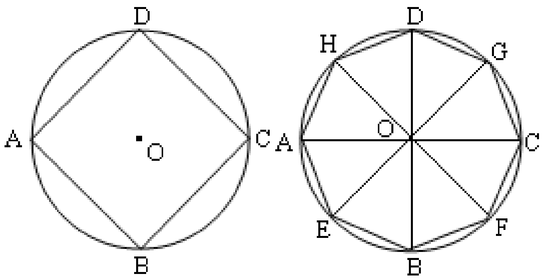
1. 用量角器等分圆

由于在同圆中相等的圆心角所对的弧也相等，因此作相等的圆心角(即等分顶点在圆心的周角)可以等分圆；根据同圆中相等弧所对的弦相等，依次连接各分点就可画出相应的正 n 边形.

2. 用尺规等分圆

对于一些特殊的正 n 边形，可以用圆规和直尺作图.

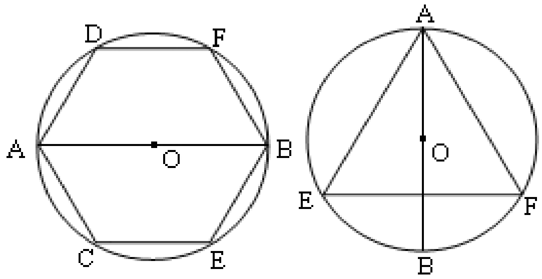
①正四、八边形.



(1)　　　　　　(2)

在⊙O 中，用尺规作两条互相垂直的直径就可把圆分成 4 等份，从而作出正四边形. 再逐次平分各边所对的弧(即作∠AOB 的平分线交$\overset{\frown}{AB}$于 E) 就可作出正八边形、正十六边形等，边数逐次倍增的正多边形.

②正六、三、十二边形的作法.



(3)　　　　　　(4)

通过简单计算可知，正六边形的边长与其半径相等，所以，在⊙O 中，任画一条直径 AB，分别以 A、B 为圆心，以⊙O 的半径为半径画弧与⊙O 相交于 C、D 和 E、F，则 A、C、E、B、F、D 是⊙O 的 6 等分点.

显然，A、E、F(或 C、B、D)是⊙O 的 3 等分点.

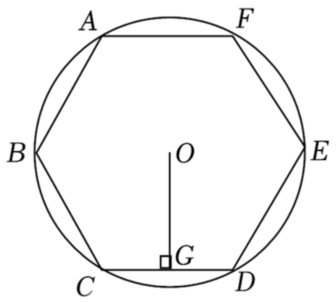
同样，在图(3)中平分每条边所对的弧，就可把⊙O 12 等分…….

细节剖析：

画正 n 边形的方法：(1）将一个圆 n 等份，(2）顺次连结各等分点.

一．选择题

1.（2022•雅安）如图，已知⊙*O*的周长等于 6π，则该圆内接正六边形 *ABCDEF* 的边心距 *OG* 为（　　）



A. $3\sqrt{3}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. 3

【易错思路引导】连接 OC，OD，由正六边形 $ABCDEF$ 可求出 $\angle COD=60^\circ$，进而可求出 $\angle COG=30^\circ$，根据 30° 角的锐角三角函数值即可求出边心距 OG 的长.

【规范解答】解：连接 OC，OD，

∵正六边形 $ABCDEF$ 是圆的内接多边形，

∴$\angle COD=60^\circ$，

∵$OC=OD$，$OG\perp CD$，

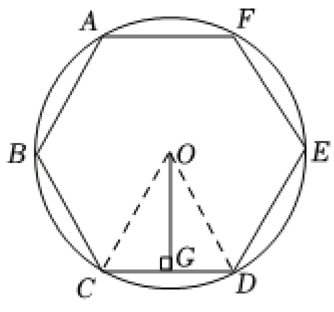
∴$\angle COG=30^\circ$，

∵$\odot O$ 的周长等于 6π，

∴$OC=3$，

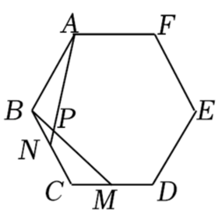
∴$OG=3\cos30^\circ=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

故选：C.



【考察注意点】本题考查了正多边形和圆、正六边形的性质、等腰三角形的判定与性质；熟练掌握正六边形的性质是解决问题的关键.

2.（2022•游仙区校级二模）如图，在正六边形 $ABCDEF$ 中，M，N 分别为边 CD，BC 的中点，AN 与 BM 相交于点 P，则 $\angle APM$ 的度数是（　　）



A．110°　　　　　B．120°　　　　　C．118°　　　　　D．122°

【易错思路引导】根据正六边形的性质可得 $AB=BC=CD$，$BN=CM$，利用全等三角形的判定与性质可得$\angle BNP=\angle CMB$，然后利用三角形的内角和定理可得答案．

【规范解答】解：∵六边形 $ABCDEF$ 是正六边形，

∴$\angle ABC=\angle BCD=\dfrac{(6-2)\times 180}{6}=120°$，$AB=BC=CD$，

∵M，N 分别为边 CD，BC 的中点，

∴$BN=CM$，

∴$\triangle ABN\cong\triangle BCM$（$SAS$），

∴$\angle BNP=\angle CMB$，

∵$\angle CBM=\angle PBN$，

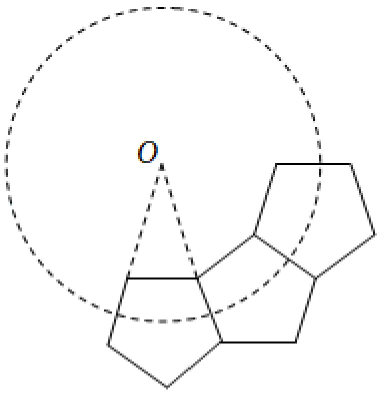
∴$\angle BPN=\angle BCD=120°$，

∴$\angle APM=120°$，

故选：B．

【考察注意点】本题考查了正六边形的性质、全等三角形的性质和判定等知识，通过证三角形全等得到$\angle BNP=\angle CMB$ 是解决此题的关键．

3．（2022•太原一模）如图，用若干个全等的正五边形排成圆环状，图中所示的是其中 3 个正五边形的位置．要完成这一圆环排列，共需要正五边形的个数是（　　）



A．7 个　　　　　B．8 个　　　　　C．9 个　　　　　D．10 个

【易错思路引导】先求出多边形的每一个内角为 108°，可得到$\angle O=36°$，即可求解．

【规范解答】解：∵多边形是正五边形，

∴正五边形的每一个内角为：$\dfrac{1}{5}\times 180°\times(5-2)=108°$，

∴$\angle O=180°-(180°-108°)\times 2=36°$，

∴正五边形的个数是 360°÷36°＝10．

故选：D．

【考察注意点】本题主要考查圆的基本性质，多边形内角和问题，熟练掌握相关知识点是解题关键．

4．（2022•安国市一模）2019 年版一元硬币的直径约为 22.25mm，则用它能完全覆盖住的正方形的边长最大不能超过（　　）

A．11.125mm　　B．22.25mm　　C．$\frac{89\sqrt{2}}{8}mm$　　D．$\frac{89\sqrt{3}}{8}mm$

【易错思路引导】根据正方形性质得到△AOD 为等腰直角三角形，根据正方形和圆的关系得到 AC 的长度，根据等腰直角三角形的性质求出 AD 的长度．

【规范解答】解：如图所示，

∵AC＝BD＝22.25mm，

∴AO＝OD＝$\frac{22.25}{2}=\frac{89}{8}mm$．

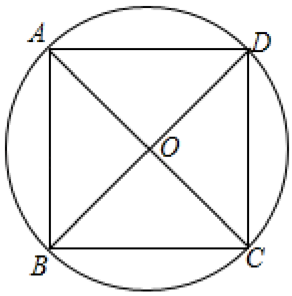
∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴$AC\perp BD$，

∴△AOD 为等腰直角三角形，

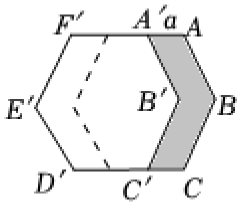
∴$AD=\sqrt{2}AO=\frac{89}{8}\sqrt{2}mm$．

故选：C．



【考察注意点】本题考查了正多边形和圆，等腰直角三角形的性质，根据题意画出图形，掌握正多边形和圆的关系，得到△AOD 为等腰直角三角形是解题的关键．

5．（2022•固安县模拟）如图，两张完全相同的正六边形纸片（边长为 2a）重合在一起，下面一张保持不动，将上面一张纸片六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 沿水平方向向左平移 a 个单位长度，则上面正六边形纸片面积与折线 $A'-B'-C$ 扫过的面积（阴影部分面积）之比是（　　）



A．3：1　　　　　B．4：1　　　　　C．5：2　　　　　D．2：1

【易错思路引导】求出正六边形和阴影部分的面积即可解决问题．

【规范解答】解：正六边形的面积＝$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2a)^2=6\sqrt{3}a^2$，

阴影部分的面积＝$a\bullet2\sqrt{3}a=2\sqrt{3}a^2$，

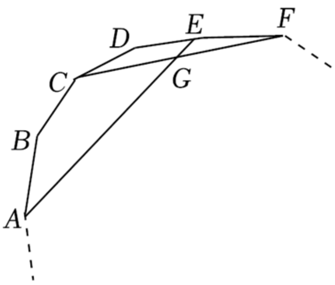
∴空白部分与阴影部分面积之比是＝$6\sqrt{3}a^2$：$2\sqrt{3}a^2$＝3：1，

故选：A．

【考察注意点】本题考查正多边形的性质、平移变换等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

二．填空题

6．（2022•雨花台区校级模拟）如图，A、B、C、D、E、F 是正 n 边形的六个连续顶点，AE 与 CF 交于点 G，若∠EGF＝30°，则 n＝__18__．



【易错思路引导】连接 CE，用 n 表示出正 n 边形的中心角，根据三角形的外角性质列出方程，解方程求出 n．

【规范解答】解：连接 CE，

正 n 边形的中心角的度数为：$\frac{360^\circ}{n}$，

则$\angle ECF=\frac{360^\circ}{n}\times\frac{1}{2}$，$\angle AEC=\frac{360^\circ}{n}$，

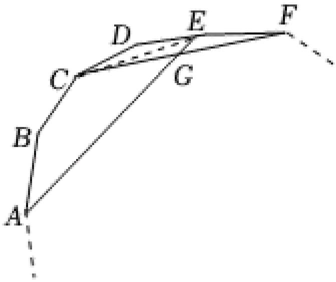
∵∠EGF＝30°，

∴∠ECF+∠AEC＝30°，

∴$\frac{360^\circ}{n}\times\frac{1}{2}+\frac{360^\circ}{n}=30^\circ$，

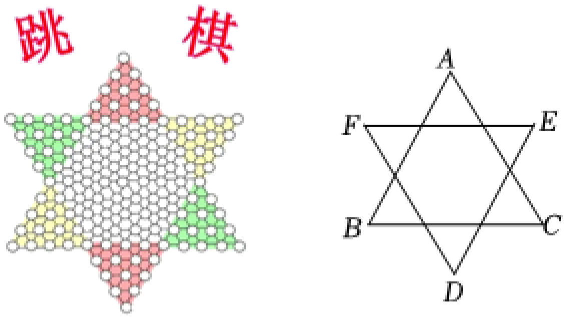
解得：n＝18，

故答案为：18．



【考察注意点】本题考查的是正多边形和圆，掌握正多边形的中心角的计算公式、三角形的外角性质是解题的关键．

7．（2022•长春）跳棋是一项传统的智力游戏．如图是一副跳棋棋盘的示意图，它可以看作是由全等的等边三角形 ABC 和等边三角形 DEF 组合而成，它们重叠部分的图形为正六边形．若 $AB=27$ 厘米，则这个正六边形的周长为 <u>54</u> 厘米．

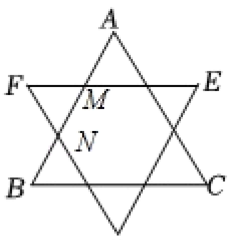


【易错思路引导】根据对称性和周长公式进行解答即可．

【规范解答】解：由图象的对称性可得，$AM=MN=BN=\frac{1}{3}AB=9$（厘米），

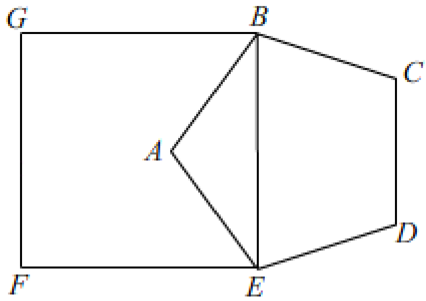
∴正六边形的周长为 $9\times6=54$（厘米），

故答案为：54．



【考察注意点】本题考查等边三角形的性质，正多边形与圆，理解图形的对称性以及等边三角形的判定是解决问题的前提．

8．(2022•陈仓区二模）如图，以正五边形 $ABCDE$ 的对角线 BE 为边，作正方形 $BEFG$，使点 A 落在正方形 $BEFG$ 内，则$\angle ABG$ 的度数为 <u>54°</u>．



【易错思路引导】根据正五边形的性质可求出角 A 的度数，再根据等腰三角形以及三角形的内角和可求出 $\angle ABE$，再根据正方形的性质求出 $\angle ABC$ 即可．

【规范解答】解：∵正五边形 $ABCDE$，

∴$\angle BAE=\dfrac{(5-2)\times 180^\circ}{5}=108^\circ$，$AB=BC=CD=DE=AE$，

∴$\angle ABE=\angle AEB=36^\circ$，

又∵四边形 $BEFG$ 是正方形，

∴$\angle EBG=90^\circ$，

∴$\angle ABG=90^\circ-36^\circ=54^\circ$，

故答案为：54°．

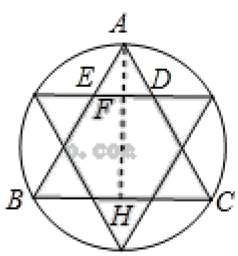
【考察注意点】本题考查正五边形，正方形以及等腰三角形，掌握正五边形、正方形、等腰三角形的性质是正确计算的前提．

9．（2022•沙湾区模拟）已知图标（如图）是由圆的六个等分点连接而成，若圆的半径为 1，则阴影部分的面积等于 __$\sqrt{3}$__．

【易错思路引导】根据题意得到图中阴影部分的面积＝$S_{\triangle ABC}+3S_{\triangle ADE}$，代入数据即可得到结论．

【规范解答】解：如图，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，交 DE 于点 F．

∵如图是由圆的六等分点连接而成，



∴$\triangle ABC$ 与$\triangle ADE$ 是等边三角形，

∵圆的半径为1，

∴$AH=\frac{3}{2}$，$BC=AB=\sqrt{3}$，

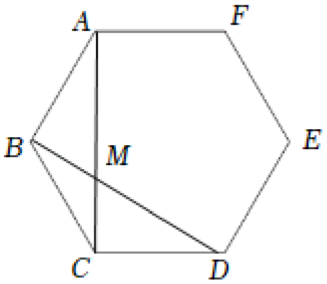
∴$AE=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AF=\frac{1}{2}$，

∴图中阴影部分的面积$=S_{\triangle ABC}+3S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}\times3=\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$.

【考察注意点】本题考查了正多边形与圆，等边三角形的性质，熟记正多边形与圆的性质是解题的关键.

10.（2022•雁塔区校级模拟）在正六边形$ABCDEF$中，对角线AC，BD相交于点M，则$\frac{AM}{CM}$的值为 __2__.



【易错思路引导】根据正六边形的性质可得$\angle BCD=\angle ABC=120°$，$AB=BC=CD$，从而利用等腰三角形的性质可得$\angle CBD=\angle BCA=30°$，进而求出$\angle ABM=90°$，$BM=CM$，然后在$Rt\triangle ABM$中，进行计算即可解答.

【规范解答】解：∵六边形$ABCDEF$是正六边形，

∴$\angle BCD=\angle ABC=120°$，$AB=BC=CD$，

∴$\angle CBD=\angle BDC=30°$，$\angle BAC=\angle BCA=30°$，

∴$\angle ABM=\angle ABC-\angle CBD=90°$，$\angle CBD=\angle BCA=30°$，

∴$BM=CM$，

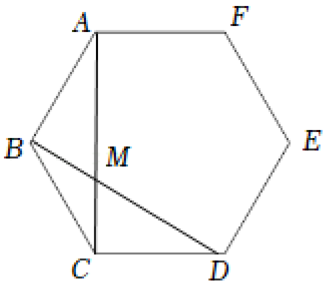
在$Rt\triangle ABM$中，$\angle BAC=30°$，

∴$AM=2BM$，

∴$AM=2CM$，

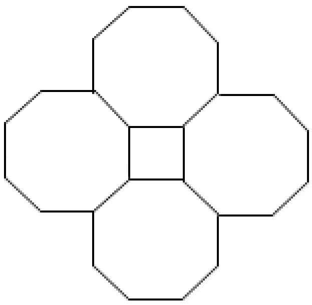
∴$\frac{AM}{CM}=2$，

故答案为：2.



【考察注意点】本题考查了等腰三角形的判定，正多边形和圆，多边形的内角与外角，含 30 度角的直角三角形，熟练掌握正六边形的性质是解题的关键.

11.（2022•河北二模）如图，将几个全等的正八边形进行拼接，相邻的两个正八边形有一条公共边，围成一图后中间形成一个正方形．设正方形的边长为 1，则该图形外轮的周长为 __20__；若 n 个全等的正多边形中间围成的图形是正三角形，且相邻的两个正多边形有一条公共边，设正三角形的边长为 1，则该图形外轮廓的周长是 __27__.



【易错思路引导】根据拼图，由“外围”的边长进行计算即可.

【规范解答】解：由拼图可知，每个正八边形有 5 条边在“外围”，因此周长为 5×4＝20，

若 n 个全等的正多边形中间围成的图形是正三角形，且相邻的两个正多边形有一条公共边，可知这个正多边形为正十二边形，

如图，则“外围”的周长为（12﹣3）×3＝27，

故答案为：20，27.