高三数学百所名校好题分项解析汇编之上海专版(2020 版)

# 专题 07　不等式

一、单选题

1.（2019 上海市嘉定区封浜高级中学高三期中）若 $ab<0$，且 $a+b>0$，则以下不等式中正确的是（　　）

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<0$　　B. $\sqrt{a}>\sqrt{-b}$　　C. $a^2<b^2$　　D. $|a|>|b|$

【答案】A

【解析】

$\because a+b>0, ab<0, \quad \therefore \frac{a+b}{ab}<0, \quad \therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}<0$，故 A 正确；当 $a=-1, b=2$ 时，不满足 B、D 选项；当 $a=2, b=-1$ 时，不满足 C 选项，

故选：A.

2.（2019·上海高三）已知 $x, y \in R$，且 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y \le 4\sqrt{3} \\ \sqrt{3}x-y \ge 0 \\ y \ge 0\end{cases}$，则存在 $\theta \in R$，使得 $x\cos\theta+y\sin\theta+1=0$ 成立的 $P(x, y)$ 构成的区域面积为（　　）

A. $4\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$　　B. $4\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$

【答案】A

【解析】作出不等式组对应的平面区域如图：对应的区域为三角形 OAB，

若存在 $\theta \in R$，使得 $x\cos\theta+y\sin\theta+1=0$ 成立，

则 $\sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\theta+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\theta\right)=-1$，

令 $\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $\cos\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

则方程等价为 $\sqrt{x^2+y^2}\sin(\alpha+\theta)=-1$，即 $\sin(\alpha+\theta)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

$\because$ 存在 $\theta \in R$，使得 $x\cos\theta+y\sin\theta+1=0$ 成立，

$\therefore \left|-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 1$，即 $x^2+y^2 \ge 1$，则对应的区域为单位圆的外部，

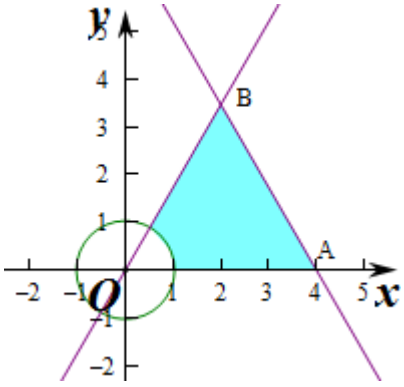
由 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=4\sqrt{3}\\ \sqrt{3}x-y=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2\\ y=2\sqrt{3}\end{cases}$，即 $\mathrm{B}\left(2,2\sqrt{3}\right)$，$\mathrm{A}\left(4,0\right)$，

则三角形 OAB 的面积 $\mathrm{S}=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，

直线 $\mathrm{y}=\sqrt{3}\mathrm{x}$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$，即扇形的面积为 $\frac{\pi}{6}$，

则 $\mathrm{P}\left(\mathrm{x},\mathrm{y}\right)$ 构成的区域面积为 $\mathrm{S}=4\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$，

故选 A.




3.（2019·上海高三）已知集合 $P=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 1\}$，$Q=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\right\}$，则有（　　）

A. $P=Q$　　B. $P\Leftarrow Q$　　C. $P\cup Q=P$　　D. $P\cap Q=Q$

【答案】B

【解析】因为 $P=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\leqslant 1\}$ 表示四个顶点分别为 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 的正方形围成的区域(包括边界),而 $Q=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\right\}$ 表示的圆心为原点,半径为 1 的圆围成的区域(包括边界),所以 $P\Leftarrow Q$.

故选:B

4.（2020 上海高三）下列不等式一定成立的是

A. $\lg(x^2+\frac{1}{4})>\lg x(x>0)$　　B. $\sin x+\frac{1}{\sin x}\geq 2(x\neq k\pi,k\in Z)$

C. $x^2+1\geq 2|x|(x\in R)$　　D. $\frac{1}{x^2+1}>1(x\in R)$

【答案】C

【解析】A. $\lg(x^2+\frac{1}{4})>\lg x\,(x>0)$，则：$x^2+\frac{1}{4}\geq 2\times\frac{1}{2}\times x=x$，可能相等，错误；

B. $\sin x+\frac{1}{\sin x}\geq 2\,(x\neq k\pi,k\in Z)$，因为 $\sin x<0$ 时不成立；所以错误；

C. $x^2+1^2\geq 2x(x\in R)$，则 $x^2+1\geq 2|x|\geq 2x(x\in R)$ 成立，结论正确.

D．$\frac{1}{x^2+1}>1(x\in R)$，则应该为：$\frac{1}{x^2+1}<1$，错误．

5．（2019·上海师大附中高三）若 $a<0$，$b<0$，则 $p=\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}$ 与 $q=a+b$ 的大小关系为　（　　）

A．$p<q$　　B．$p\le q$　　C．$p>q$　　D．$p\ge q$

【答案】B

【解析】p− q=$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}$− a− b=$\frac{b^2-a^2}{a}+\frac{a^2-b^2}{b}$=（b²− a²）·$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$=

$\frac{\left(b^2-a^2\right)(b-a)}{ab}=\frac{(b-a)^2(a+b)}{ab}$，

∵a＜0，b＜0，∴a+b＜0，ab＞0，若 a=b，则 p− q=0，此时 p=q，

若 a≠b，则 p− q＜0，此时 p＜q，综上 p≤q，故选：B．

6．（2019·上海市洋泾中学高三月考）已知集合 $A=\left\{(x,y)\middle|\log_a x+\log_a y>0\right\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|x+y<a\right\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则 $a$ 的取值范围是（　　）

A．$\varnothing$

B．$a>0$ 且 $a\neq 1$

C．$0<a\le 2$ 且 $a\neq 1$

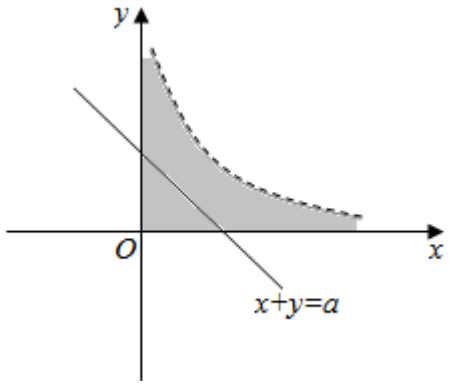
D．$1<a\le 2$

【答案】D

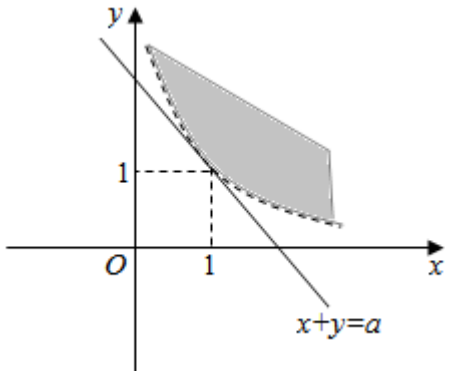
【解析】$\because \log_a x+\log_a y=\log_a xy>0=\log_a 1$，当 $a>1$ 时，有 $xy>1$，$\therefore y>\frac{1}{x}$

当 $0<a<1$ 时，有 $0<xy<1$，$\therefore y<\frac{1}{x}$

(1)当 $0<a<1$ 时，$y=\frac{1}{x}$ 与 $y+x<a$ 的区域始终由公共点，$\therefore 0<a<1$ 应舍去



(2)当 $a>1$ 时，要使 $A\cap B=\varnothing$，需有 $x+y=a$ 刚切过 $(1,1)$ 时，即 $a=2$ 时成立，将此直线向左下平移也成立，$\therefore 1<a\le 2$，




故选：*D*

7.（2018·上海市实验学校高三月考） 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\ge 0\\ x+y-3\ge 0\\ x-2y\le 0\end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的取值范围是

A．[0,6]　　B．[0,4]　　C．[6，+∞）　　D．[4，+∞）

【答案】D

【解析】x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x+y-3\geqslant 0\\ x-2y\leqslant 0\end{cases}$，表示的可行域如图：

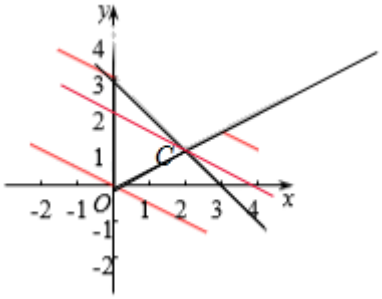
目标函数 z=x+2y 经过 C 点时，函数取得最小值，

由 $\begin{cases}x+y-3=0\\ x-2y=0\end{cases}$ 解得 C（2，1），

目标函数的最小值为：4

目标函数的范围是[4，+∞）.

故选 D.




8.（2019·华东师大二附中前滩学校高三月考）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3, x\le 1,\\ x+\dfrac{2}{x}, x>1.\end{cases}$ 设 $a\in R$，若关于 $x$

的不等式 $f(x)\geq|\frac{x}{2}+a|$ 在 R 上恒成立，则 $a$ 的取值范围是

A．$[-\frac{47}{16},2]$　　B．$[-\frac{47}{16},\frac{39}{16}]$　　C．$[-2\sqrt{3},2]$　　D．$[-2\sqrt{3},\frac{39}{16}]$

【答案】A

【解析】不等式 $f(x)\geq\left|\frac{x}{2}+a\right|$ 为 $-f(x)\leq\frac{x}{2}+a\leq f(x)$ (*)，

当 $x\leq1$ 时，(*)式即为 $-x^2+x-3\leq\frac{x}{2}+a\leq x^2-x+3$，$-x^2+\frac{x}{2}-3\leq a\leq x^2-\frac{3}{2}x+3$，又

$-x^2+\frac{x}{2}-3=-(x-\frac{1}{4})^2-\frac{47}{16}\leq-\frac{47}{16}$（$x=\frac{1}{4}$ 时取等号），

$x^2-\frac{3}{2}x+3=(x-\frac{3}{4})^2+\frac{39}{16}\geq\frac{39}{16}$（$x=\frac{3}{4}$ 时取等号），

所以 $-\frac{47}{16}\leq a\leq\frac{39}{16}$，

当 $x>1$ 时，(*)式为 $-x-\frac{2}{x}\leq\frac{x}{2}+a\leq x+\frac{2}{x}$，$-\frac{3}{2}x-\frac{2}{x}\leq a\leq\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$，

又 $-\frac{3}{2}x-\frac{2}{x}=-(\frac{3}{2}x+\frac{2}{x})\leq-2\sqrt{3}$（当 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时取等号），

$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geq2\sqrt{\frac{x}{2}\times\frac{2}{x}}=2$（当 $x=2$ 时取等号），所以 $-2\sqrt{3}\leq a\leq2$，

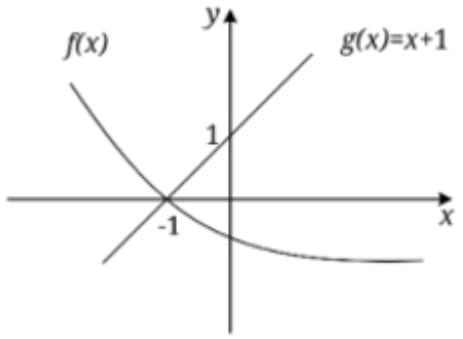
综上 $-\frac{47}{16}\leq a\leq2$．故选 A.

二、填空题

9．（2020·上海高三）已知 $f(x)=a^x-b(a>0,a\neq1)$，$g(x)=x+1$.若对任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f(x)\cdot g(x)\leq0$ 恒成立，则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值是_____.

【答案】4

【解析】




$f(x)\cdot g(x)\le 0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

画出函数图象，由图可得 $f(x)=a^x-b$ 过 $(-1,0)$

所以 $a^{-1}=\frac{1}{a}=b$，所以 $ab=1$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{4}{b}}=4$，

当且仅当 $a=\frac{1}{2},b=2$ 时取等，故 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值是 4.故答案为：4

10．（2019·上海高三）若复数 $z=x+yi$ （$x$，$y\in\mathbf{R}$，$i$ 为虚数单位）满足 $|z|=|z-2-2i|$，则 $3^x+3^y$ 的最小值为_____.

【答案】6

【解析】由 $|z|=|z-2-2i|$ 得 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$ ,化简得 $x+y=2$ ,即 $y=2-x$ ,所以 $3^x+3^y$

$=3^x+3^{2-x}=3^x+\frac{9}{3^x}\ge 2\sqrt{3^x\cdot\frac{9}{3^x}}=2\times 3=6$ ,当且仅当 $x=1.y=1$ 时等号成立.故答案为:6

11．（2019·上海市建平中学高三月考）已知实数 $x$，$y$ 满足 $\begin{cases}x+y\ge 1\\ x-y-2\le 0\\ y\le 1\end{cases}$，则 $\frac{y}{x}$ 的最小值为_____.

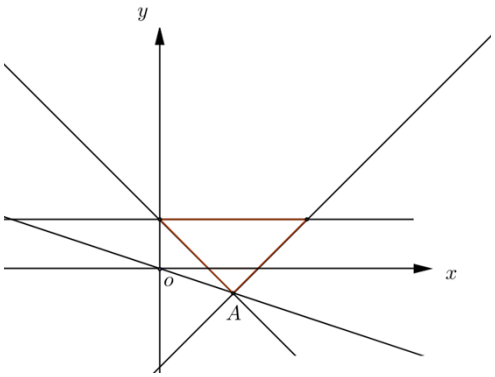
【答案】$-\frac{1}{3}$

【解析】

线性约束条件所表示的区域，如图所示：$\frac{y}{x}$ 表示可行域内的点与原点连线的斜率，

所以当 $(x,y)$ 落在点 $A(3,-1)$ 时，$\frac{y}{x}$ 取得最小值为 $-\frac{1}{3}$.

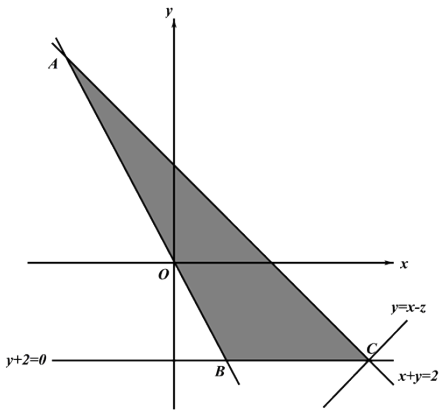
故答案为 $-\frac{1}{3}$.




12．（2019·上海市崇明中学高三）已知不等式组$\begin{cases}x+y\le 2\\ 2x+y\ge 0\\ y+2\ge 0\end{cases}$表示的平面区域为$\Omega$，点$M$坐标为$(x,y)$，对任意点$M\in\Omega$，则$x-y$的最大值为_____

【答案】6

【解析】由约束条件可得平面区域$\Omega$如下图阴影部分所示：




令$z=x-y$，则$z$取最大值时，$y=x-z$在$y$轴截距最小

平移$y=x$可知，当$y=x-z$过$C$时，在$y$轴截距最小

由$\begin{cases}x+y=2\\ y+2=0\end{cases}$得：$C(4,-2)$　　$\therefore z_{\max}=4+2=6$

本题正确结果：6

13．（2019·上海华师大二附中高三月考）设全集$U=\mathbf{R}$，若集合$A=\left\{x\left|\left|x-\frac{1}{2}\right|<1\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\frac{2x-3}{x}\ge 1\right.\right\}$，则$A\cap C_UB=$_____.

【答案】$\left[0,\frac{3}{2}\right)$

【解析】由$\left|x-\frac{1}{2}\right|<1$,得$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2},\therefore A=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，

由$\frac{2x-3}{x}\geq 1,\frac{x-3}{x}\geq 0,\therefore x<0$或$x\geq 3$，

$B=(-\infty,0)\cup[3,+\infty),\therefore C_UB=[0,3)$，$A\cap C_UB=[0,\frac{3}{2})$.故答案为:$\left[0,\frac{3}{2}\right)$

14.（2019·上海中学高三期中）设$x>0,\quad y>0,\quad x+2y=5$，则$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为_____.

【答案】$4\sqrt{3}$

【解析】$\because\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}=\frac{2xy+x+2y+1}{\sqrt{xy}}$,$\because x>0,\quad y>0,\quad x+2y=5,xy>0,\therefore$

$\frac{2xy+6}{\sqrt{xy}}\geq\frac{2\cdot 2\sqrt{3}\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=4\sqrt{3}$，当且仅当$xy=3$，即$x=3,y=1$时成立，

故所求的最小值为$4\sqrt{3}$.

15.（2019·上海高三期中）若关于$x$的不等式$a\leq\frac{3}{4}x^2-3x+4\leq b$的解集恰好是$[a,b]$，则

$a+b=$_____.

【答案】4

【解析】设$f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+4$，对称轴为$x=2$，此时$f(x)_{\min}=1$，有题意可得;$a\leq 1$,且

$f(a)=f(b)=b,a<b$，由$f(b)=b\Rightarrow\frac{3}{4}b^2-3b+4=b$，解得：$b=\frac{4}{3}$（舍去）或$b=4$，可得$b=4$，

由抛物线的对称轴为$x=2$得到$a=0$，所以$a+b=4$

16.（2020·上海市实验学校高三月考）已知函数$f(x)=ax^2+2x+1$，若对任意$x\in R,f[f(x)]\geq 0$恒成立，则实数$a$的取值范围是___.

【答案】$a\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【解析】

当$a=0$时，函数$f(x)=2x+1$，$f[f(x)]=4x+3$，不满足对任意$x\in R$，$f[f(x)]\geq 0$恒成立

当$a>0$时，$f(x)\geq\frac{4a-4}{4a}=1-\frac{1}{a}$，$f[f(x)]\geq f(1-\frac{1}{a})=a(1-\frac{1}{a})^2+2(1-\frac{1}{a})+1=a-\frac{1}{a}+1\geq 0$

$\therefore a \le \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $a \ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\therefore a \ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

当 $a<0$ 时，$f(x) \le \frac{4a-4}{4a} = 1-\frac{1}{a}$，不满足对任意 $x \in R$，$f\left[f(x)\right] \ge 0$ 恒成立

综上可得，$a \ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 故答案为 $a \ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

17.（2020 上海市实验学校高三月考）设 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上的偶函数，且当 $x \ge 0$ 时，$f(x)=2^x$，若对任意的 $x \in [a, a+2]$，不等式 $f(x+a) \ge f^2(x)$ 恒成立，则实数 $a$ 的取值范围是_____.

【答案】$a \le -\frac{3}{2}$

【解析】由题意得:

$f(x)=2^{|x|}$,Q $f(x+a) \ge f^2(x)$,则$2^{|x+a|} \ge \left(2^{|x|}\right)^2 = 2^{2|x|}$,$\therefore |x+a| \ge 2|x|$,即

$3x^2-2ax-a^2 \le 0$ 对任意的 $x \in [a, a+2]$ 恒成立,令

$g(x)=3x^2-2ax-a^2$,则 $\begin{cases} g(a) \le 0 \\ g(a+2) \le 0 \end{cases}$,解得 $a \le -\frac{3}{2}$,故填 $a \le -\frac{3}{2}$.

18.（2019·上海市建平中学高三月考）已知 $\log_2(a-2)+\log_2(b-1) \ge 1$，则 $2a+b$ 取到最小值时，$ab=$_____.

【答案】9

【解析】由对数的真数大于 0，可得 $\begin{cases} a-2>0 \\ b-1>0 \end{cases}$，

因为 $\log_2(a-2)+\log_2(b-1) \ge 1$，

所以 $(a-2)(b-1) \ge 2$ 且 $\begin{cases} a>2 \\ b>1 \end{cases}$，

所以 $2a+b=2(a-2)+(b-1)+5 \ge 2\sqrt{2(a-2)(b-1)}+5 \ge 2\times\sqrt{2\times 2}+5=9$，

当且仅当 $2(a-2)=b-1=2$，即 $a=b=3$ 时，等号成立，

所以 $2a+b$ 取到最小值时 $ab=9$.

故答案为 9.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/296223045055010240