专项28 二次函数与等腰三角形有关的问题

【解题思路】

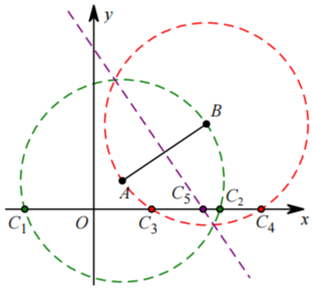
等腰三角形的存在性问题

【方法1 几何法】“两圆一线”

（1）以点A为圆心，AB为半径作圆，与x轴的交点即为满足条件的点C，有AB=AC；

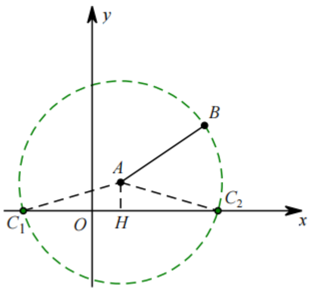
（2）以点B为圆心，AB为半径作圆，与x轴的交点即为满足条件的点C，有BA=BC；

（3）作AB的垂直平分线，与x轴的交点即为满足条件的点C，有CA=CB.



注意：若有重合的情况，则需排除.

以点 C_1 为例，具体求点坐标：



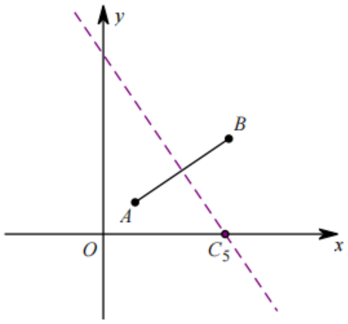
过点A作AH⊥x轴交x轴于点H，则AH=1，

又 $AC_1=\sqrt{13}, \therefore HC_1=\sqrt{13-1}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

故点 C_1 坐标为 $\left(1-2\sqrt{3},0\right)$

类似可求点 C_2、C_3、C_4. 关于点 C_5 考虑另一种方法.

【方法2 代数法】点线方程



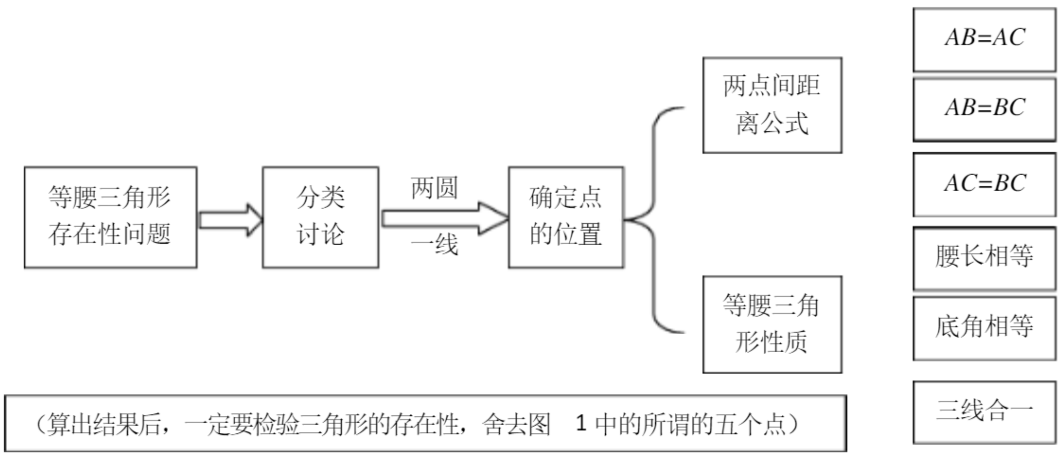
表示点：设点 C_5 坐标为$(m,0)$，又 A（1,1）、B（4,3），

表示线段：$AC_5^2=(m-1)^2+1$

$BC_5^2=(m-4)^2+9$

联立方程：$(m-1)^2+1=(m-4)^2+9$，解得：$m=\dfrac{23}{6}$，故点C_2坐标为（$\dfrac{23}{6}$,0）

总结：



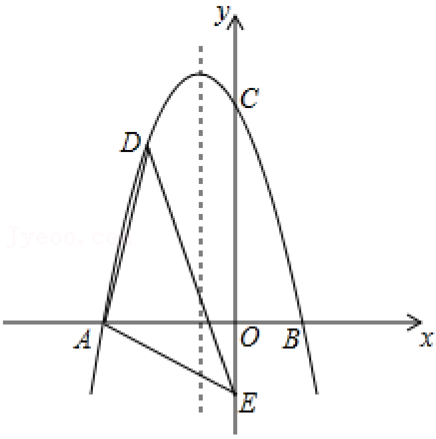
【典例分析】

【考点 1 等腰角形的存在性】

【典例 1】（2020•泰安）如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 交 x 轴于点 A（－4，0）、B（2，0），交 y 轴于点 C（0，6），在 y 轴上有一点 E（0，－2），连接 AE.

（1）求二次函数的表达式；

（2）抛物线对称轴上是否存在点 P，使△AEP 为等腰三角形？若存在，请直接写出所有 P 点的坐标，若不存在，请说明理由．



【答案】（1） $y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+6$，　（2） $m=-\frac{2}{3}$时，△ADE 的面积取得最大值为$\frac{50}{3}$　（3）点 P 坐标为：（－1，1），（－1，$\pm\sqrt{11}$），（－1，－2$\pm\sqrt{19}$）

【解答】解：（1）∵二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 A（－4，0）、B（2，0），C（0，6），

$$\therefore\begin{cases}16a-4b+c=0\\4a+2b+c=0\\c=6\end{cases},$$

$$\text{解得}\begin{cases}a=-\frac{3}{4}\\b=-\frac{3}{2}\\c=6\end{cases},$$

所以二次函数的解析式为：$y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+6$，

（2）$y=-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x+6$的对称轴为 $x=-1$，

设 P（－1，n），又 E（0，－2），A（－4，0），

可求 $PA^2=9+n^2$，$PE^2=1+(n+2)^2$，$AE^2=16+4=20$，

当 $PA^2=PE^2$ 时，$9+n^2=1+(n+2)^2$，

解得，$n=1$，此时 $P(-1,1)$；

当 $PA^2=AE^2$ 时，$9+n^2=20$，

解得，$n=\pm\sqrt{11}$，此时点 P 坐标为 $(-1,\pm\sqrt{11})$；

当 $PE^2=AE^2$ 时，$1+(n+2)^2=20$，

解得，$n=-2\pm\sqrt{19}$，此时点 P 坐标为：$(-1,-2\pm\sqrt{19})$．

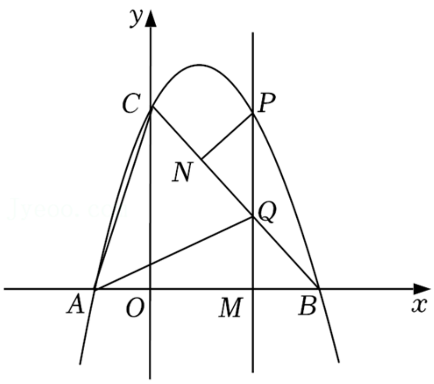
综上所述，

P 点的坐标为：$(-1,1)$，$(-1,\pm\sqrt{11})$，$(-1,-2\pm\sqrt{19})$．

【变式 11】（2022•澄海区模拟）如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交 x 轴于 A、B 两点，交 y 轴于点 C，点 A 的坐标为 $(-1,0)$，点 C 坐标为 $(0,3)$，对称轴为 $x=1$．点 M 为线段 OB 上的一个动点（不与两端点重合），过点 M 作 $PM\perp x$ 轴，交抛物线于点 P，交 BC 于点 Q．

（1）求抛物线及直线 BC 的表达式；

（2）试探究点 M 在运动过程中，是否存在这样的点 Q，使得以 A，C，Q 为顶点的三角形是等腰三角形．若存在，请求出此时点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由．



【解答】解：（1）∵抛物线对称轴为 $x=1$，点 B 与 $A(-1,0)$ 关于直线 $x=1$ 对称，

∴$B(3,0)$，

设 $y=a(x-3)(x+1)$，把 $C(0,3)$ 代入得：$-3a=3$，

解得：$a=-1$，

∴$y=-(x-3)(x+1)=-x^2+2x+3$，

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+d$，则 $\begin{cases}3k+d=0\\ d=3\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}k=-1\\ d=3\end{cases}$，

∴直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$，