高级中学 2022—2023 学年第一学期期中考试

高二数学

一、单选题 本题共 8 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $\frac{1}{1-\mathrm{i}}$ 的虚部是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. 1　　　　C. $\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　　　D. i

2. 直线 $\sqrt{6}x+\sqrt{2}y-1=0$ 的倾斜角为（　　　）

A. 30°　　　　B. 60°　　　　C. 120°　　　　D. 150°

3. 已知某圆锥的底面圆半径为5， 它的高与母线长的和为25， 则该圆锥的侧面积为（　　）

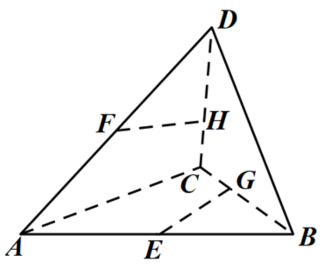
A. 15π　　　　B. 20π　　　　C. 60π　　　　D. 65π

4. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是两个不共线的向量，且 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b},\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b},\overrightarrow{CD}=3\vec{a}-3\vec{b}$，则（　）

A. A,B,D 三点共线　　　　B. A,B,C 三点共线

C. B,C,D 三点共线　　　　D. A,C,D 三点共线

5. 已知：空间四边形 $ABCD$ 如图所示，E、F 分别是 AB、AD 的中点，G、H 分别是 BC、CD 上的点，且 $CG=\frac{1}{3}BC$，$CH=\frac{1}{3}DC$，则直线 FH 与直线 EG（　　）



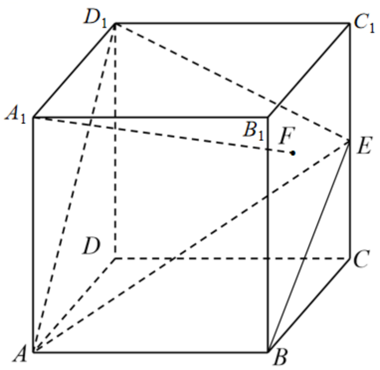
A. 平行　　　　B. 相交　　　　C. 异面　　　　D. 垂直

6. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $B=\frac{\pi}{6}$，$c=6\sqrt{3}$，且 $\triangle ABC$ 有两解，则 b 的值可能是（　　）

A. $3\sqrt{3}$　　　　B. $4\sqrt{3}$　　　　C. $6\sqrt{3}$　　　　D. $7\sqrt{3}$

7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 CC_1 的中点，F 是侧面 BCC_1B_1 内的动点，且 A_1F 与平

面D_1AE的垂线垂直，则下列说法不正确的是（　　）



A. A_1F与D_1E不可能平行

B. A_1F与BE是异面直线

C. 点F的轨迹是一条线段

D. 三棱锥$F-ABD_1$的体积为定值

8. 若对圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$上任意一点$P(x,y)$，$|3x-4y+a|+|3x-4y-9|$的取值与x，y无关，则实数a的取值范围是（　　）

A. $a\le 4$　　B. $-4\le a\le 6$　　C. $a\le -4$或$a\ge 6$　　D. $a\ge 6$

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知椭圆C：$16x^2+4y^2=1$，则下列结论正确的是（　　）

A. 长轴长为$\frac{1}{2}$

B. 焦距为$\frac{\sqrt{3}}{4}$

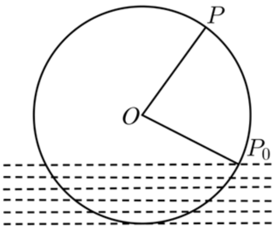
C. 焦点坐标为：$\left(0,\pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

D. 离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 已知方程$x^2+y^2-ax+2ay+2a^2+a-1=0$，则下列选项中$a$的值能满足方程表示圆的有（　　）

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. -2

11. 衢州市柯城区沟溪乡余东村是中国十大美丽乡村，也是重要的研学基地，村口的大水车，是一道独特的风景.假设水轮半径为4米（如图所示），水轮中心O距离水面2米，水轮每60秒按逆时针转动一圈，如果水轮上点P从水中浮现时（图中P_0）开始计时，则（　　）



A. 点 P 第一次达到最高点，需要 20 秒

B. 当水轮转动 155 秒时，点 P 距离水面 2 米

C. 在水轮转动的一圈内，有 15 秒的时间，点 P 距水面超过 2 米

D. 点 P 距离水面的高度 h（米）与 t（秒）的函数解析式为 $h=4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+2$

12. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=2$，$AA_1=a$，点 M 为 CC_1 点的中点，点 P 为底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的动点，下列四个结论中正确的为（　　）

A. 当 $a=\sqrt{3}$ 且点 P 位于底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心时，四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积为 $\frac{25\pi}{3}$

B. 当 $a=2$ 时，存在点 P 满足 $PA+PM=4$

C. 当 $a=2$ 时，存在唯一的点 P 满足 $\angle APM=90°$

D. 当 $a=2$ 时，满足 $BP\perp AM$ 的点 P 的轨迹长度为 $\sqrt{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所成的夹角大小是______.

14. 空间向量 $\vec{a}=(1,1,1),\vec{b}=(1,0,1),\vec{c}=(1,2,m)$，若三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，则实数 m 的值为______.

15. 在四面体 $P-ABC$ 中，$PC\perp$ 平面 ABC，$PA=PB=5$，$PC=4$，$AB=3\sqrt{2}$，则四面体 $P-ABC$ 外接球的表面积为______.

16. F_1、F_2 是椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左、右焦点，点 M 为椭圆 E 上一点，点 N 在 x 轴上，满足 $\angle F_1MN=\angle F_2MN=60°$，若 $3\overrightarrow{MF_1}+5\overrightarrow{MF_2}=\lambda\overrightarrow{MN}$，则椭圆 E 的离心率为__________.

四、解答题：本题共 6 个小题，共计 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

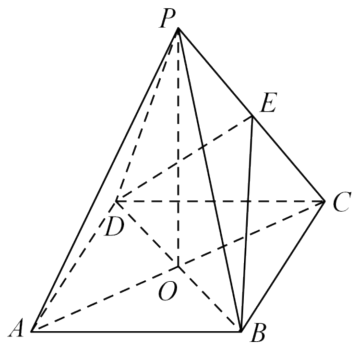
17. 求经过点 $A\left(-2,\sqrt{3}\right)$ 和点 $B\left(1,2\sqrt{3}\right)$ 的椭圆的标准方程.

18. 已知圆 $C:x^2+\left(y-1\right)^2=5$，直线 $l:mx-y+1-m=0$.

(1)求证：对 $m\in R$，直线 l 与圆 C 总有两个不同的交点；

⑵若直线l与圆C交于A,B两点，当$|AB|=\sqrt{17}$时，求m的值.

19. 如图，四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为边长为2的菱形且对角线AC与BD交于点O，$\angle DAB=60^{\circ}, PO\perp$底面$ABCD$，点$E$是$PC$的中点.



（1）求证：AP // 平面BDE；

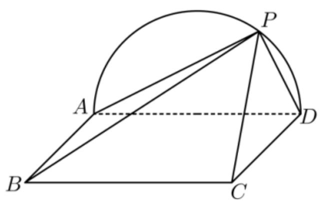
（2）若三棱锥$P-BDE$的体积为$\sqrt{3}$，求OP的长.

20. $\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知A为锐角，$\sin B-\cos C=\dfrac{c^2-a^2}{2ab}$.

（1）求A；

（2）若$b=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c$，且BC边上的高为$2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积.

21. 如图，半圆所在的平面与矩形所在平面$ABCD$垂直，P是半圆弧上一点（端点除外），AD是半圆的直径，AB=1，AD=2.



（1）求证：平面$PAB\perp$平面PDC；

（2）是否存在P点，使得二面角$B-PC-D$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$?若存在，求四棱锥$P-ABCD$的体积；若不存在，说明理由，

22. 曲线Γ上动点M到A（－2，0）和到B（2，0）的斜率之积为－$\dfrac{1}{4}$.

（1）求曲线Γ的轨迹方程；

（2）若点P（x_0，y_0）（$y_0\neq0$）为直线x＝4上任意一点，PA，PB交椭圆Γ于C，D两点，求四边形$ACBD$面积的最大值.

高级中学 2022—2023 学年第一学期期中考试

高二数学

一、单选题 本题共 8 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 复数$\frac{1}{1-\mathrm{i}}$的虚部是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. i

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的除法运算化简复数，即可得虚部.

【详解】$\frac{1}{1-\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，故虚部为：$\frac{1}{2}$

故选：A

2. 直线$\sqrt{6}x+\sqrt{2}y-1=0$的倾斜角为（　　）

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

【答案】C

【解析】

【分析】化成斜截式方程得斜率为$k=-\sqrt{3}$，进而根据斜率与倾斜角的关系求解即可.

【详解】将直线一般式方程化为斜截式方程得：$y=-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线的斜率为$k=-\sqrt{3}$，

所以根据直线倾斜角与斜率的关系得直线的倾斜角为$120°$.

故选：C

3. 已知某圆锥的底面圆半径为5， 它的高与母线长的和为25， 则该圆锥的侧面积为（　　）

A. 15π　　B. 20π　　C. 60π　　D. 65π

【答案】D

【解析】

【分析】根据圆锥轴截面的性质直接计算其母线，进而可得侧面积.

【详解】设该圆锥的母线长为l，则它的高为$25-l$，

由 $l^2-\left(25-l\right)^2=5^2$，解得 $l=13$，

所以该圆锥的侧面积为 $\pi rl=65\pi$，

故选：D.

4. 已知 $\vec{a},\vec{b}$ 是两个不共线的向量，且 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+5\vec{b},\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+8\vec{b},\overrightarrow{CD}=3\vec{a}-3\vec{b}$，则（　）

A. A,B,D 三点共线　　B. A,B,C 三点共线

C. B,C,D 三点共线　　D. A,C,D 三点共线

【答案】A

【解析】

【分析】借助向量运算与共线定理即可得.

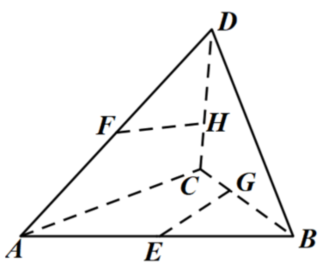
【详解】$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-2\vec{a}+8\vec{b}+3\vec{a}-3\vec{b}=\vec{a}+5\vec{b}$，故 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$，则 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BD}$，

又因为两向量有公共点 B，

故 A,B,D 三点共线.

故选：A.

5. 已知：空间四边形 $ABCD$ 如图所示，E、F 分别是 AB、AD 的中点，G、H 分别是 BC、CD 上的点，且 $CG=\frac{1}{3}BC$，$CH=\frac{1}{3}DC$，则直线 FH 与直线 EG（　　）



A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 垂直

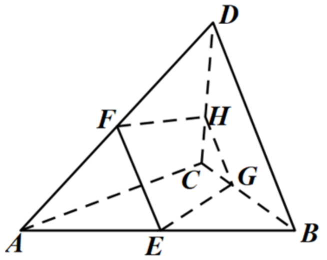
【答案】B

【解析】

【分析】

由已知 EF 为三角形 ABD 的中位线，从而 $EF//BD$ 且 $EF=\frac{1}{2}BD$，由 $CG=\frac{1}{3}BC.CH=\frac{1}{3}DC$，得在四边形 $EFHG$ 中，$EF//HG$，即 E，F，G，H 四点共面，且 $EF\neq HG$，由此能得出结论.

【详解】如图所示，连接 EF,GH.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是空间四边形，E 、F 分别是 AB 、AD 的中点，

$\therefore EF$ 为三角形 ABD 的中位线

$\therefore EF//BD$ 且 $EF=\frac{1}{2}BD$

又 $\because$ $CG=\frac{1}{3}BC$． $CH=\frac{1}{3}DC$，

$\therefore \triangle CHG \backsim \triangle CDB$，且 $HG//BD$，$HG=\frac{1}{3}BD$

$\therefore$ 在四边形 $EFHG$ 中，$EF//HG$

即 E，F，G，H 四点共面，且 $EF\neq HG$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是梯形，

$\therefore$ 直线 FH 与直线 EG 相交，

故选：B

【点睛】方法点睛：证明两直线相交，首先要证明两直线共面，再证明它们不平行.所以本题先证明 E，F，G，H 四点共面，再证明直线 FH 与直线 EG 不平行.

6. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $B=\frac{\pi}{6}$，$c=6\sqrt{3}$，且 $\triangle ABC$ 有两解，则 b 的值可能是（　　）

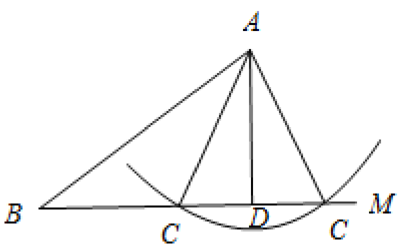
A. $3\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $6\sqrt{3}$　　D. $7\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据已知条件，结合 $\triangle ABC$ 有两解，作出示意图，确定 $3\sqrt{3}<b<6\sqrt{3}$，可得答案.

【详解】作 $\angle ABM=\frac{\pi}{6}$ ，作 $AD\perp BM$ 于 D 点，则 $AD=c\sin B=3\sqrt{3}$，

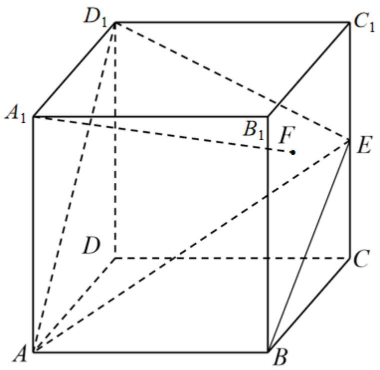


因为$\triangle ABC$有两解，故以A为圆心，以b为半径作圆弧，需交BM于两点，即为点C,

所以$3\sqrt{3}<b<6\sqrt{3}$，符合条件的是$4\sqrt{3}$，

故选：B

7. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是棱CC_1的中点，F是侧面BCC_1B_1内的动点，且A_1F与平面D_1AE的垂线垂直，则下列说法不正确的是（　　）



A. A_1F与D_1E不可能平行

B. A_1F与BE是异面直线

C. 点F的轨迹是一条线段

D. 三棱锥$F-ABD_1$的体积为定值

【答案】A

【解析】

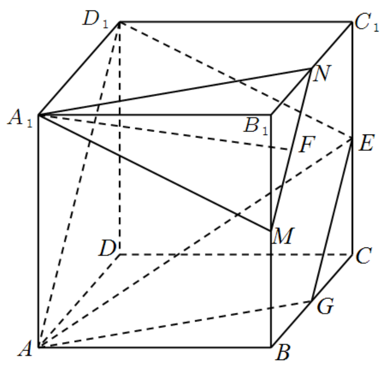
【分析】设平面D_1AE与直线BC交于G，连接AG，EG，则G为BC的中点，分别取B_1B，B_1C_1的中点M，N，连接A_1M，MN，A_1N，证明平面$A_1MN//$平面D_1AE，即可分析选项ABC的正误；再由$MN//EG$，得点F到平面D_1AE的距离为定值，可得三棱锥$F-ABD_1$的体积为定值判断D.

【详解】解：设平面D_1AE与直线BC交于G，连接AG，EG，

则G为BC的中点，分别取B_1B，B_1C_1的中点M，N，

连接A_1M，MN，A_1N，

如图.



$\because A_1M//D_1E$，A_1M Ë 平面 D_1AE，$D_1E\subset$ 平面 D_1AE，

$\therefore A_1M//$ 平面 D_1AE，同理可得 $MN//$ 平面 D_1AE，

又 A_1M 、MN 是平面 A_1MN 内的两条相交直线，

$\therefore$平面 $A_1MN//$ 平面 D_1AE，而 $A_1F//$ 平面 D_1AE，$\therefore A_1F\subset$ 平面 A_1MN，

得点 F 的轨迹为一条线段，故 C 正确；

并由此可知，当 F 与 M 重合时，A_1F 与 D_1E 平行，故 A 错误；

$\because$平面 $A_1MN//$ 平面 D_1AE，BE 和平面 D_1AE 相交，$\therefore A_1F$ 与 BE 是异面直线，故 B 正确；

$\because MN//EG$，则点 F 到平面 D_1AE 的距离为定值，$\therefore$三棱锥 $F-ABD_1$ 的体积为定值，故 D 正确.

故选：A.

8. 若对圆 $\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$ 上任意一点 $P\left(x,y\right)$，$\left|3x-4y+a\right|+\left|3x-4y-9\right|$ 的取值与 x，y 无关，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $a\le 4$　　B. $-4\le a\le 6$　　C. $a\le -4$ 或 $a\ge 6$　　D. $a\ge 6$

【答案】D

【解析】

【分析】利用几何意义得到要想 $\left|3x-4y+a\right|+\left|3x-4y-9\right|$ 的取值要想与 x，y 无关，只需圆 $\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$ 位于直线 $3x-4y+a=0$ 与 $3x-4y-9=0$ 之间，利用点到直线距离公式列出不等式，求出 $a\le -4$ 或 $a\ge 6$，通过检验舍去不合要求的解集.

【详解】$\dfrac{\left|3x-4y+a\right|}{\sqrt{9+16}}+\dfrac{\left|3x-4y-9\right|}{\sqrt{9+16}}$ 可看作点 $P\left(x,y\right)$ 到直线 $3x-4y+a=0$ 与 $3x-4y-9=0$ 的距离之和，

要想 $\left|3x-4y+a\right|+\left|3x-4y-9\right|$ 的取值与 x，y 无关，

只需圆$\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$位于直线$3x-4y+a=0$与$3x-4y-9=0$之间，

所以圆心$\left(1,1\right)$到$3x-4y+a=0$的距离大于等于半径，

即$\dfrac{\left|3-4+a\right|}{\sqrt{9+16}}\geq 1$，解得：$a\leq -4$或$a\geq 6$，

当$a\leq -4$时，$3x-4y+a=0$与$3x-4y-9=0$位于圆心的同一侧，不合要求，舍去；

当$a\geq 6$时，$3x-4y+a=0$与$3x-4y-9=0$位于圆心的两侧，满足题意.

故选：D

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知椭圆 C：$16x^2+4y^2=1$，则下列结论正确的是（　　）

A. 长轴长为$\frac{1}{2}$

B. 焦距为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

C. 焦点坐标为：$\left(0,\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

D. 离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】CD

【解析】

【分析】

先化简椭圆方程为标准方程$\dfrac{x^2}{\frac{1}{16}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$，再求出椭圆的长轴长、焦距、焦点坐标和离心率得解.

【详解】由椭圆方程$16x^2+4y^2=1$化为标准方程可得$\dfrac{x^2}{\frac{1}{16}}+\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$，

所以$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1}{4}$，$c=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ，

所以长轴长为$2a=1$，焦距$2c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，焦点坐标为$\left(0,\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，

短轴长为$2b=\dfrac{1}{2}$，离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：CD

10. 已知方程$x^2+y^2-ax+2ay+2a^2+a-1=0$，则下列选项中$a$的值能满足方程表示圆的有（　　）

A. -1　　　　B. 0　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D. -2

【答案】ABC

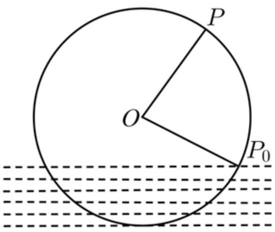
【解析】

【分析】将圆的方程化为标准方程$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+a\right)^2=1-a-\frac{3}{4}a^2$，则$1-a-\frac{3}{4}a^2>0$，解得即可得出答案.

【详解】解：$x^2+y^2-ax+2ay+2a^2+a-1=0$，即方程$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+a\right)^2=1-a-\frac{3}{4}a^2$方程表示圆的条件是$1-a-\frac{3}{4}a^2>0$，即$-2<a<\frac{2}{3}$．所以选项 A，B，C 能表示圆，选项 D 表示一个点，不能表示圆.

故选：ABC.

11. 衢州市柯城区沟溪乡余东村是中国十大美丽乡村，也是重要的研学基地，村口的大水车，是一道独特的风景.假设水轮半径为 4 米（如图所示），水轮中心O距离水面 2 米，水轮每 60 秒按逆时针转动一圈，如果水轮上点P从水中浮现时（图中P_0）开始计时，则（　　）



A. 点P第一次达到最高点，需要 20 秒

B. 当水轮转动 155 秒时，点P距离水面 2 米

C. 在水轮转动的一圈内，有 15 秒的时间，点P距水面超过 2 米

D. 点P距离水面的高度h（米）与t（秒）的函数解析式为$h=4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+2$

【答案】ABD

【解析】

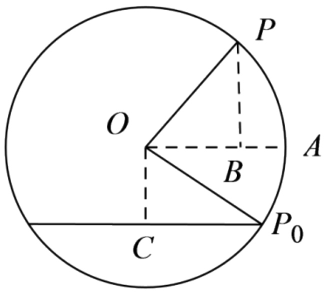
【分析】先根据题意求出点P距离水面的高度h（米）与t（秒）的函数解析式，再从解析式出发求解 ABC 选项.

【详解】如图所示，过点 O 作 $OC\perp$ 水面于点 C，作 OA 平行于水面交圆于点 A，过点 P 作 $PB\perp OA$ 于点 B，则因为水轮每 60 秒按逆时针转动一圈，故转动的角速度为 $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$（$\mathrm{rad/s}$），且点 P 从水中浮现时（图中 P_0）开始计时，t（秒）后，可知 $\angle POP_0=\frac{\pi}{30}t$，又水轮半径为 4 米，水轮中心 O 距离水面 2 米，即 $OC=2\,\mathrm{m}$，$OP_0=4\,\mathrm{m}$，所以 $\angle OP_0C=\angle AOP_0=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle POA=\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}$，因为 $OP=4\,\mathrm{m}$，所以 $PB=4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)$，故 $h=4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+2$，D 选项正确；

点 P 第一次达到最高点，此时 $\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)=1$，令 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，解得：$t=20$（s），A 正确；

令 $4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+2=2$，解得：$t=5+30k$，$k\in\mathrm{Z}$，当 $k=5$ 时，$t=155$（s），B 选项正确；

$4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+2>2$，令 $0<\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}<\pi$，解得：$5<t<35$，故有 30s 的时间点 P 距水面超过 2 米，C 选项错误；



故答案为：ABD

12. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=2$，$AA_1=a$，点 M 为 CC_1 点的中点，点 P 为底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的动点，下列四个结论中正确的为（　　）

A. 当 $a=\sqrt{3}$ 且点 P 位于底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心时，四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积为 $\frac{25\pi}{3}$

B. 当 $a=2$ 时，存在点 P 满足 $PA+PM=4$

C. 当 $a=2$ 时，存在唯一的点 P 满足 $\angle APM=90°$

D. 当 $a=2$ 时，满足 $BP\perp AM$ 的点 P 的轨迹长度为 $\sqrt{2}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据给定条件，结合球的截面小圆性质求出球半径计算判断 A；建立空间直角坐标系，利用空间