福建省厦门市2023-2024学年高一上学期1月期末质量检测

数学试题

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{x\mid 0\le x\le 1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

〖答 案〗B

〖解 析〗由题意可得：$A\cap B=\{0,1\}$.

故选：B.

2. 已知 $\log_x 8=2$，则 $x=$（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. 4

〖答 案〗B

〖解 析〗因为 $\log_x 8=2=\log_x x^2$，可得 $x^2=8$，

且 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，解得 $x=2\sqrt{2}$.

故选：B.

3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，α 为第二象限角，则 $\tan\alpha=$（　　）

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $-\dfrac{4}{5}$　　C. $-\dfrac{3}{4}$　　D. $-\dfrac{4}{3}$

〖答 案〗C

〖解 析〗因为 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，α 为第二象限角，则 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{4}{5}$，

所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{3}{4}$.

故选：C.

4. 已知 $a=3^{0.2}$，$b=3^{0.1}$，$c=5^{0.2}$，则（　　）

A. $c<a<b$　　B. $a<b<c$　　C. $c<b<a$　　D. $b<a<c$

〖答 案〗D

〖解 析〗因为指数函数 $y=3^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 $a=3^{0.2}>3^{0.1}=b$，

又因为幂函数 $y=x^{0.2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则 $c=5^{0.2}>3^{0.2}=a$，故 $b<a<c$.

故选：D.

5. 若命题：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+ax+1=0$ 是假命题，则（　　）

A. $-2<a<2$　　B. $a<2$

C. $a\le -2$ 或 $a\ge 2$　　D. $a\ge 2$

〖答 案〗A

〖解 析〗由命题：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+ax+1=0$ 是假命题，

可知命题的否定：“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+ax+1\neq 0$”是真命题，

即 $\Delta=a^2-4<0$，解得：$-2<a<2$.

故选：A.

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足① $f(2)=0$；② $\forall x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，$\dfrac{x_2f(x_2)-x_1f(x_1)}{x_2-x_1}>0$，则 $\dfrac{f(x)}{x}>0$ 的解集为（　　）

A. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-2,0)\cup(0,2)$

C. $(-\infty,-2)\cup(0,2)$　　D. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

〖答 案〗A

〖解 析〗不妨设 $x_2>x_1>0$，

$$\frac{x_2f(x_2)-x_1f(x_1)}{x_2-x_1}>0\Rightarrow x_2f(x_2)-x_1f(x_1)>0\Rightarrow x_2f(x_2)>x_1f(x_1),$$

故 $F(x)=xf(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，

故 $F(x)=xf(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，且 $F(-x)=-xf(-x)=xf(x)=F(x)$，

故 $F(x)=xf(x)$ 为偶函数，

因为 $f(2)=0$，所以 $F(2)=0$，

$\frac{f(x)}{x}>0\Leftrightarrow xf(x)>0\Leftrightarrow F(x)>0\Leftrightarrow F(|x|)>0=F(2)$，

所以$|x|>2$，解得$x>2$或$x<-2$.

故选：A.

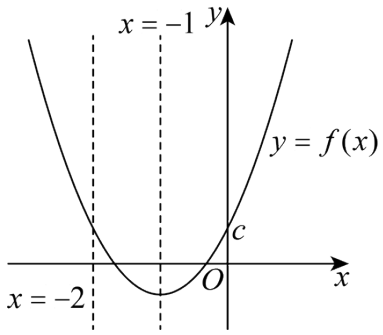
7. 已知函数$f(x)=x^2+2x+c(c>0)$，若$f(t)<0$，则（　　）

A. $f(t-1)>0$　　B. $f(t+1)<0$

C. $f(t-2)<0$　　D. $f(t+2)>0$

〖答　案〗D

〖解　析〗由题意可知：函数$f(x)$的对称轴为$x=-1$，且$f(0)=c>0$，如图所示，



若$f(t)<0$，结合对称性可知$-2<t<0$，且$f(-1)<0$，

对于选项A：例如$c=0.01,t=-0.1$，则$f(-0.1)=-0.18<0$符合题意，

但$f(t-1)=f(-1.1)=-0.98<0$，故A错误；

对于选项BC：若$t=-1$，显然满足题意，

但$f(t+1)=f(0)>0$，$f(t-2)=f(-3)>0$，故BC错误；

对于选项D：因为$-2<t<0$，则$t+2>0$，所以$f(t+2)>0$，故D正确.

故选：D.

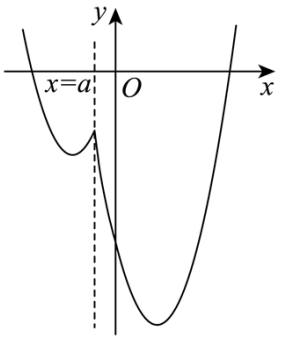
8. 已知函数$f(x)=x^2-4|x-a|+4a$恰有三个零点，则实数a的取值范围为（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$　　C. $\left[-\frac{1}{2},1\right]$　　D. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

〖答　案〗B

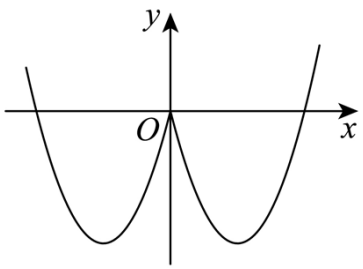
〖解 析〗因为 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-4x+8a,x\geq a\\x^2+4x,x<a\end{cases}$，

①当$a<0$时，做出两段抛物线的图像如图：



此时函数 $f\left(x\right)$ 只有两个零点，不满足题意；

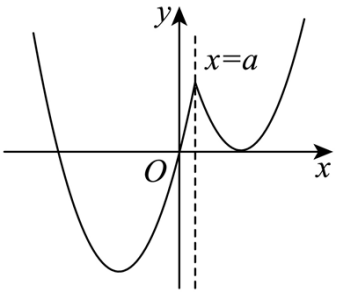
②当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-4x,x\geq 0\\x^2+4x,x<0\end{cases}$，做出两段抛物线的图像如图：



此时函数 $f\left(x\right)$ 恰有三个零点，满足题意；

③当 $a>0$ 时，因为 $y=x^2+4x$ 在 $x\in\left(-\infty,a\right)$ 有两个零点，

且当 $x=a$ 时两段抛物线的函数值相等，若要满足题意，则两段抛物线的图像应该如图：



此时 $\begin{cases}a>0\\\Delta=16-32a=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$，满足题意；

综上实数 a 的取值范围为 $\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$.

故选：B.

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列函数中，与函数 $y=x$ 是同一个函数的是（　　）

A. $y=\sqrt{x^2}$　　B. $y=\sqrt[3]{x^3}$

C. $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$　　D. $y=\log_2 2^x$

〖答 案〗BD

〖解 析〗显然函数 $y=x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

对于选项 A：因为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，即对应关系不一致，故 A 错误；

对于选项 B：因为 $y=\sqrt[3]{x^3}=x$，且定义域为 $\mathbf{R}$，所以两个函数相同，故 B 正确；

对于选项 C：因为 $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，即定义域不同，故 C 错误；

对于选项 D：因为 $2^x>0$ 恒成立，即 $y=\log_2 2^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

且 $y=\log_2 2^x=x$，所以两个函数相同，故 D 正确.

故选：BD.

10. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x+a$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内存在零点的充分条件可以是（　　）

A. $a=0$　　B. $-1<a<0$

C. $-1<a<1$　　D. $a<1$

〖答 案〗AB

〖解 析〗因为 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减，$y=\ln x$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增，

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x+a$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减，

若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 内存在零点，

则 $\begin{cases}f(1)>0\\ f(\mathrm{e})<0\end{cases}$，即 $\begin{cases}1+a>0\\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}-1+a<0\end{cases}$，解得 $-1<a<1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

故 AB 符合题意，CD 不符合题意.

故选：AB.

11. 已知实数 a，b，c 满足 $a+b+c=0$ 且 $a>b>c$，则（　　）

A. $bc>ac$　　B. $a^2>c^2$

C. $2ac-2bc<a^2-b^2$　　D. $(a-c)^2\le 2(a-b)^2+2(b-c)^2$

〖答 案〗ACD

〖解 析〗因为$a+b+c=0$且$a>b>c$，所以$a>0,c<0$，

A 选项，$bc-ac=(b-a)c>0$，故$bc>ac$，A 正确；

B 选项，不妨设$a=1,b=0,c=-1$，此时满足$a+b+c=0$且$a>b>c$，但$a^2=c^2$，B 错误；

C 选项，因为$a+b+c=0$且$a>b>c$，所以$a-b>0,a+b-2c=a-c+b-c>0$，

$a^2-b^2+2bc-2ac=(a+b)(a-b)+2c(b-a)=(a-b)(a+b-2c)>0$，

所以$2ac-2bc<a^2-b^2$，C 正确；

D 选项，$2(a-b)^2+2(b-c)^2-(a-c)^2=2(a-b)^2+2(b-c)^2-\left[(a-b)+(b-c)\right]^2$

$=2(a-b)^2+2(b-c)^2-(a-b)^2-2(a-b)(b-c)-(b-c)^2$

$=(a-b)^2+(b-c)^2-2(a-b)(b-c)=\left[(a-b)-(b-c)\right]^2=(a+c-2b)^2$，

因为$a+b+c=0$，

所以$2(a-b)^2+2(b-c)^2-(a-c)^2=(-b-2b)^2=9b^2\ge 0$，

故$(a-c)^2\le 2(a-b)^2+2(b-c)^2$，D 正确.

故选：ACD.

12. 已知$[x]$表示不超过x的最大整数，例如：$[-3.5]=-4$，$[2.1]=2$.定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)$，且当$x\in[1,2)$时，$f(x)=-\sin\pi x$，则（　　）

A. $f(3)=2$

B. 当$x\in[8,16)$时，$f(x)=-16\sin\frac{\pi x}{16}$

C. $f(x)$在区间$\left[2^k,2^k+k\right)\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$上单调递增

D. 关于x的方程$f(x)=x-[x]$在区间$(0,2048]$上恰有 23 个实根

〖答 案〗ACD

〖解 析〗对于选项 A：$f(3)=2f\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(-\sin\frac{3}{2}\pi\right)=2$，故 A 正确；

对于选项 B：因为$x\in[8,16)$，则$\frac{x}{2}\in[4,8),\frac{x}{4}\in[2,4),\frac{x}{8}\in[1,2)$，

可得$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)=4f\left(\frac{x}{4}\right)=8f\left(\frac{x}{8}\right)=-8\sin\frac{\pi x}{8}$，故 B 错误；

对于选项 C：因为当$x\in[1,2)$时，$f(x)=-\sin\pi x$，

可知当$x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$时，$f(x)$单调递增，当$x\in\left(\frac{3}{2},2\right)$时，$f(x)$单调递减，

结合$f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)$，可知$f(x)$的单调递增区间为$\left[2^k,3\cdot2^{k-1}\right](k\in\mathbf{Z})$，

当$k\in\mathbf{N}^*$时，$k\le2^{k-1}$，$2^k+k\le2^k+2^{k-1}=3\cdot2^{k-1}$，

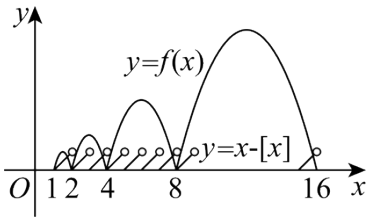
故$f(x)$在区间$\left[2^k,2^k+k\right)\left(k\in\mathbf{N}^*\right)$上单调递增，故 C 正确；

对于选项 D：当$x\in\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)(n\in\mathbf{N})$，$f(x)=-\frac{1}{2^{n+1}}\sin\left(2^{n+1}\pi x\right)$，且$x-[x]=x$，

则$x-[x]-f(x)=x-f(x)=x-\left(-\frac{1}{2^{n+1}}\sin\left(2^{n+1}\pi x\right)\right)\ge\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\sin\left(2^{n+1}\pi x\right)\right)\ge0$，

且等号不同时成立，原方程无实根；

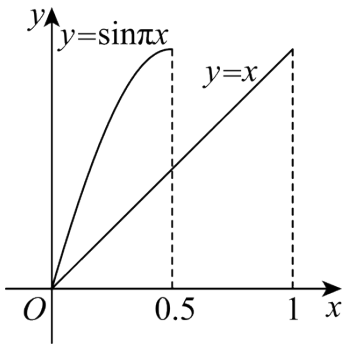
当$x\in[1,+\infty)$时，画出函数的图象，如图所示，



因为$f\left(2^n+1\right)=-2^n\sin\left(\frac{2^n+1}{2^n}\pi\right)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

要证$-2^n\sin\left(\frac{2^n+1}{2^n}\pi\right)>1$，只需证$\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)>\frac{1}{2^n}$，

令$x=\frac{1}{2^n}$，则$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，只需证$\sin(\pi x)>x$，如图所示，



可知$\sin(\pi x)>x$，$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$成立，

所以方程$f(x)=x-[x]$在区间$\left[2^n,2^{n+1}\right)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$上恰有 2 个实根，

所以方程$f(x)=x-[x]$在区间$(0,2048]$上恰有$2\times11+1=23$个实根，故 D 正确.

故选：ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知某扇形的半径为 2，弧长为π，则该扇形的圆心角为_____rad.

〖答 案〗$\frac{\pi}{2}$

〖解 析〗设圆心角为θ，则$2\theta=\pi$，解得$\theta=\frac{\pi}{2}$.

故〖答 案〗为：$\frac{\pi}{2}$.

14. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(0)=1$，$\frac{f(1)}{f(0)}=2$，$\frac{f(2)}{f(1)}=2$，$\frac{f(3)}{f(2)}=2$，$\frac{f(4)}{f(3)}=2$，…，$\frac{f(n)}{f(n-1)}=2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.写出满足上述条件的一个函数：_____.

〖答 案〗$f(x)=2^x$（〖答 案〗不唯一）

〖解 析〗例如$f(x)=2^x$，则$f(0)=1$，且$\frac{f(x)}{f(x-1)}=\frac{2^x}{2^{x-1}}=2$，

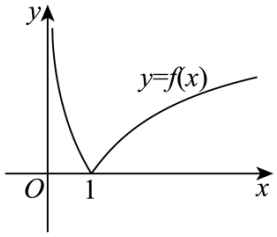
所以$f(x)=2^x$符合题意.

故〖答 案〗为：$f(x)=2^x$.

15. 已知函数$f(x)=\left|\log_2 x\right|$，若$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)\left(x_1<x_2\right)$，则$4x_1+x_2$的最小值为_____.

〖答 案〗4

〖解 析〗作出函数 $f(x)=\left|\log_2 x\right|$ 的图象，如图所示，



因为 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，且 $x_1<x_2$，

则 $\log_2 x_1+\log_2 x_2=\log_2\left(x_1x_2\right)=0$，可得 $x_1x_2=1$，

即 $x_2=\dfrac{1}{x_1}$，且 $0<x_1<1$，

则 $4x_1+x_2=4x_1+\dfrac{1}{x_1}\geq 2\sqrt{4x_1\cdot\dfrac{1}{x_1}}=4$，当且仅当 $4x_1=\dfrac{1}{x_1}$，即 $x_1=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立，

所以 $4x_1+x_2$ 的最小值为 4.

故〖答 案〗为：4.

16. 水星是离太阳最近的行星，在地球上较难观测到.当地球和水星连线与地球和太阳连线的夹角达到最大时，称水星东（西）大距，这是观测水星的最佳时机（如图 1）.将行星的公转视为匀速圆周运动，则研究水星大距类似如下问题：在平面直角坐标系中，点 A，B 分别在以坐标原点 O 为圆心，半径分别为 1，3 的圆上沿逆时针方向做匀速圆周运动，角速度分别为 $\omega_A=\dfrac{\pi}{3}\text{rad/s}$，$\omega_B=\dfrac{\pi}{6}\text{rad/s}$.当 $\angle OBA$ 达到最大时，称 A 位于 B 的“大距点”.如图 2，初始时刻 A 位于 $(1,0)$，B 位于以 Ox 为始边的角 $\varphi(0\leq\varphi<2\pi)$ 的终边上.

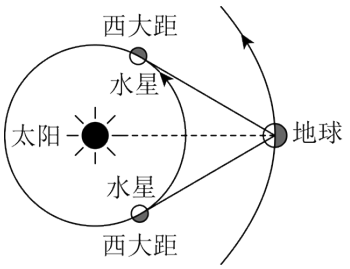


图1

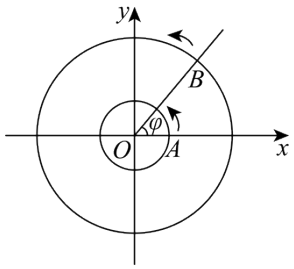


图2

（1）若 $\varphi=0$，当 A 第一次位于 B 的“大距点”时，A 的坐标为_____；

（2）在 30s 内，A 位于 B 的“大距点”的次数最多有_____次

〖答 案〗$\left(-\dfrac{7}{9},\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)$　　6

〖解 析〗当$\varphi=0$时，经过时间t，$A\left(\cos\frac{\pi}{3}t,\sin\frac{\pi}{3}t\right)$，$B\left(3\cos\frac{\pi}{6}t,3\sin\frac{\pi}{6}t\right)$，

当A位于B的“大距点”时，AB与小圆相切，

此时$\triangle ABO$为直角三角形，所以$\cos\angle AOB=\frac{OA}{OB}=\frac{1}{3}$，

因为$\omega_A>\omega_B$，所以$\cos\angle AOB=\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}t\right)=\cos\frac{\pi}{6}t=\frac{1}{3}$，

因为A是第一次位于B的“大距点”，可知$0<\frac{\pi}{6}t<\frac{\pi}{2}$，则$\sin\frac{\pi}{6}t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\cos\frac{\pi}{3}t=2\cos^2\frac{\pi}{6}t-1=-\frac{7}{9}$，$\sin\frac{\pi}{3}t=2\sin\frac{\pi}{6}t\cos\frac{\pi}{6}t=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，

即A的坐标为$\left(-\frac{7}{9},\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$，

经过时间t，$A\left(\cos\frac{\pi}{3}t,\sin\frac{\pi}{3}t\right)$，$B\left(3\cos\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right),3\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right)\right)$，

对于任意$\varphi\in[0,2\pi)$，当A位于B的“大距点”时，

A，B两点坐标满足$\cos\left|\frac{\pi}{3}t-\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right)\right|=\frac{1}{3}$，即$\cos\left(\frac{\pi}{6}t-\varphi\right)=\frac{1}{3}$，

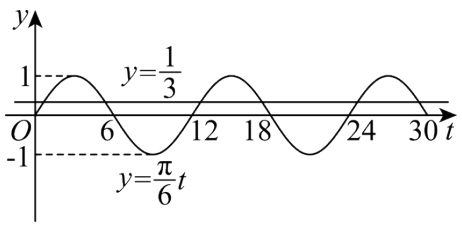
当$t\in[0,30]$时，

求“大距点”个数的问题转化为直线$y=\frac{1}{3}$与$y=\cos\left(\frac{\pi}{6}t-\varphi\right)$在$t\in[0,30]$的交点个数问题，

若$y=\frac{1}{3}$与$y=\cos\left(\frac{\pi}{6}t-\varphi\right)$有7个交点，则第1个交点到第7个交点间隔恰好3个周期，

共长度等于36，因为$30<36$，所以30s内不可能有7个交点，

又当$\varphi=\frac{\pi}{2}$时，$y=\cos\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{6}t$，



如图所示，$y=\dfrac{1}{3}$与$y=\sin\dfrac{\pi}{6}t$有6个交点，故A最多有6次位于B的“大距点”.

故〖答 案〗为：$\left(-\dfrac{7}{9},\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)$　　6.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知函数$f(x)=x^2+ax+b$.

（1）若$f(x)<0$的解集为$(-3,1)$，求a，b；

（2）若$f(1)=2$，a，$b\in(0,+\infty)$，求$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$的最小值.

解：（1）因为$f(x)<0$的解集为$(-3,1)$，可知-3，1是方程$x^2+ax+b=0$的两根，

则$\begin{cases}-3+1=-a\\-3\times1=b\end{cases}$，解得$a=2$，$b=-3$.

（2）因为$f(1)=1+a+b=2$，即$a+b=1$，

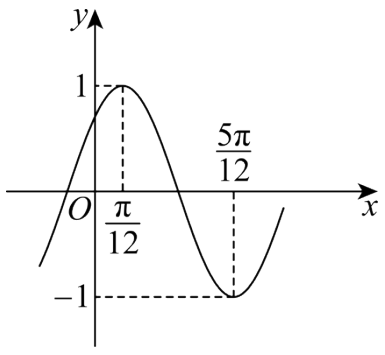
且a，$b\in(0,+\infty)$，

则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)=1+\dfrac{4a}{b}+\dfrac{b}{a}+4\geq2\sqrt{\dfrac{4a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}+5=4+5=9$，

当且仅当$\dfrac{4a}{b}=\dfrac{b}{a}$，即$b=2a=\dfrac{2}{3}$时，等号成立，

所以当$a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{2}{3}$时，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}$的最小值为9.

18. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.



（1）求$f(x)$的〖解 析〗式；

（2）将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值和最小值.

解：（1）由图可知：$T=2\times\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\pi}{3}$，且 $\omega>0$，

因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=3$，

又因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$，即 $\sin\left(3\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=1$，

则 $3\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，可知 $k=0,\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

（2）由 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$，

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，令 $t=3x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，

当 $t=-\frac{\pi}{4}$，即 $x=0$ 时，$g(x)$ 取最小值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

当 $t=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$g(x)$ 取最大值 1.

19. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

（1）判断 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的单调性，并用定义证明；

（2）当 $x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ 时，$\log_2 f(x)\geq t$ 恒成立，求实数 t 的最大值.

解：（1）$f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

证明：$\forall x_1$，$x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\frac{1}{x_1^2+1}-\frac{1}{x_2^2+1}=\frac{\left(x_2+x_1\right)\left(x_2-x_1\right)}{\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)}$，

因为 $x_2>x_1\geq 0$，则 $x_1+x_2>0$，$x_2-x_1>0$，$x_1^2+1>0$，$x_2^2+1>0$，

可得 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

（2）解法一：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2+1}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数，

由（1）可知 $f(x)$ 在 $\left[0,\sqrt{3}\right]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\sqrt{3},0\right]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ 上的最小值为 $f\left(-\sqrt{3}\right)=f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{1}{4}$，

因为 $\log_2 f(x)\geq t$ 恒成立，等价于 $f(x)\geq 2^t$ 恒成立，

则 $2^t\leq\dfrac{1}{4}$，解得 $t\leq -2$，所以 t 的最大值为 -2.

解法二：因为 $x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$，则 $x^2+1\in[1,4]$，

可得 $\dfrac{1}{x^2+1}\in\left[\dfrac{1}{4},1\right]$，所以 $\log_2 f(x)\in[-2,0]$，

即当 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，$\log_2 f(x)$ 的最小值为 -2，

因为 $\log_2 f(x)\geq t$ 恒成立，可得 $t\leq -2$，所以 t 的最大值为 -2.

20. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）若方程 $f(x)=\dfrac{2}{3}$ 在区间 $\left[-\pi,\dfrac{4}{3}\pi\right]$ 上有三个实根 x_1，x_2，$x_3\left(x_1<x_2<x_3\right)$，求 $\sin\left(\dfrac{x_1+x_3}{2}\right)$ 的值.

解：（1）$f(x)=2\sqrt{3}\sin^2\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}(1-\cos x)+\sin x-\sqrt{3}$

$=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

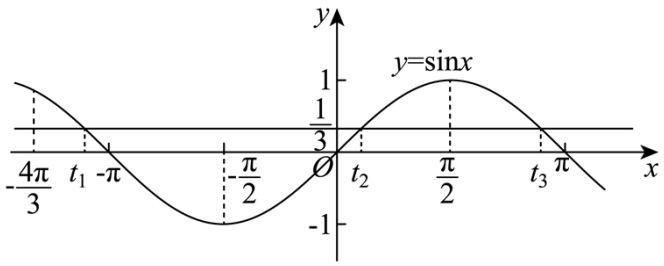
由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leq x-\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\leq x\leq\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

（2）解法一：令$t=x-\frac{\pi}{3}$，由$-\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi$得$-\frac{4\pi}{3}\le t\le\pi$，

所以$f(x)=\frac{2}{3}$在区间$\left[-\pi,\frac{4}{3}\pi\right]$上有三个实根$x_1$，$x_2$，$x_3$，

等价于$\sin t=\frac{1}{3}$在区间$\left[-\frac{4}{3}\pi,\pi\right]$上有三个实根$t_1$，$t_2$，$t_3$，



由对称性得$t_1+t_2=-\pi$，$t_2+t_3=\pi$，所以$t_1+2t_2+t_3=0$，

因为$0<t_2<\frac{\pi}{2}$，$\sin t_2=\frac{1}{3}$，所以$\cos t_2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\sin\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)=\sin\frac{1}{2}\left(t_1+\frac{\pi}{3}+t_3+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{t_1+t_3}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-t_2\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t_2-\frac{1}{2}\sin t_2=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

解法二：令$t=x-\frac{\pi}{3}$，由$-\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi$，得$-\frac{4\pi}{3}\le t\le\pi$，

所以$f(x)=\frac{2}{3}$在区间$\left[-\pi,\frac{4}{3}\pi\right]$上有三个实根$x_1$，$x_2$，$x_3$，

等价于$\sin t=\frac{1}{3}$在区间$\left[-\frac{4}{3}\pi,\pi\right]$上有三个实根$t_1$，$t_2$，$t_3$，

由周期性，有$t_3-t_1=2\pi$，因为$\frac{\pi}{2}<t_3<\pi$，$\sin t_3=\frac{1}{3}$，所以$\cos t_3=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\sin\left(\frac{x_1+x_3}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{t_1+t_3}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{t_3-2\pi+t_3}{2}\right)=\sin\left(t_3-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sin\left(t_3+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-\frac{1}{2}\sin t_3-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t_3=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

21. 在常温下，物体冷却的温度变化可以用牛顿冷却定律来描述：如果物体原来的温度为θ_1℃，空气的温度为θ_0℃，那么t分钟后物体的温度θ（单位：℃）可由公式$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt}$求得，其中$k$是一个随着物体与空气的接触状况而定的正常数.知空气的温度为20℃，现用某品牌电热水壶烧600毫升水，2分钟后水烧开（温度为100℃），再过30分钟，壶中开水自然冷却到60℃.假设烧水时水的温度是关于时间的一次函数，水的初始温度与空气的温度一致.

（1）从开始烧水算起，求壶中水的温度θ（单位：℃）关于时间t（单位：分钟）的函数〖解 析〗式；

（2）电热水壶在保温模式下会自动检测壶中水温，若水温高于40℃，保温管不加热；若水温不高于40℃，保温管开始加热，直至水温达到80℃才停止加热，保温管加热时水温的上升速度是正常烧水时的$\frac{1}{4}$.水烧开后，立即将电热水壶设定为保温模式.从开始烧水算起，求96分钟后壶中水的温度.

解：（1）由题意知，空气的温度为20℃，水温从100℃自然冷却到60℃用时30分钟，

则$60-20=(100-20)\cdot\mathrm{e}^{-30k}$，即$\mathrm{e}^{-30k}=\frac{1}{2}$，所以$\mathrm{e}^{-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}}$，

当$0\le t\le 2$时，依题意设$\theta=mt+20$，则$2m+20=100$，

解得$m=40$，所以$\theta=40t+20$；

当$t>2$时，依题意得，$\theta=20+(100-20)\mathrm{e}^{-k(t-2)}$，即$\theta=20+80\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-2}{30}}$；

综上所述：$\theta=\begin{cases}40t+20,0\le t\le 2\\ 20+80\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-2}{30}},t>2\end{cases}$.

（2）由$40=20+80\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-2}{30}}$，解得$t=62$，

即从开始烧水算起，水温从20℃升到100℃，再冷却到40℃，用了62分钟，

因为$96>62$，所以保温管加热过，

因为保温管加热时水温上升速度是正常烧水时的$\frac{1}{4}$，

所以保温管加热时，水温每分钟升高$10℃$，

所以水温从$40℃$升至$80℃$，所用时间为$\frac{80-40}{10}=4$分钟，

假设水温从$80℃$降至$40℃$需要t_1分钟，

则$40-20=(80-20)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{30}}$，即$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{30}}=\frac{1}{3}$，

因为$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t_1}{30}}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，所以$t_1>30$，

即水温从$80℃$冷却至$40℃$所用时间超过30分钟，

因为$62+4+t_1=66+t_1>96$，

所以从开始烧水算起，96分钟内保温管只加热过1次，

所以当$66\le t\le 66+t_1$时，$\theta=20+(80-20)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-66}{30}}=20+60\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-66}{30}}$，

所以当$t=96$时，$\theta=20+60\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{96-66}{30}}=50$，

所以从开始烧水算起，96分钟后壶中水的温度为$50℃$.

22. 已知函数$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$.

（1）解不等式$f(x+4)+f(x)>0$；

（2）讨论函数$F(x)=8f(2x)-kf(x)+2^x-2^{-x}$的零点个数.

解：（1）$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，

因为$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数，

因为$y=2^x+1$是增函数，所以$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$是增函数，

由$f(x+4)+f(x)>0$得$f(x+4)>-f(x)$，即$f(x+4)>f(-x)$，

所以$x+4>-x$，解得$x>-2$，即原不等式的解集为$(-2,+\infty)$.

（2）由$F(x)=0$得$k\cdot\frac{2^x-1}{2^x+1}=8\times\frac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}+2^x-\frac{1}{2^x}$，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/297130050160006062