

2024 届新疆塔城地区沙湾一中高中毕业班第二次模拟（数学试题理）试卷

考生须知：

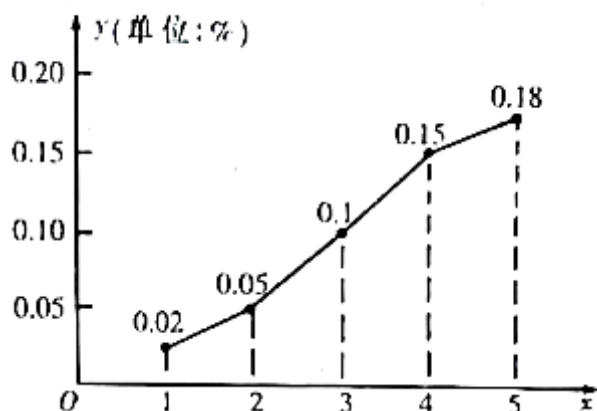
1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = e^x + b$ 的一条切线为 $y = a(x+1)$ ，则 ab 的最小值为（ ）

- A. $-\frac{1}{2e}$ B. $-\frac{1}{4e}$ C. $-\frac{1}{e}$ D. $-\frac{2}{e}$

2. 5G 网络是一种先进的高频传输技术，我国的 5G 技术发展迅速，已位居世界前列.华为公司 2019 年 8 月初推出了一款 5G 手机，现调查得到该款 5G 手机上市时间 x 和市场占有率 y （单位：%）的几组相关对应数据.如图所示的折线图中，横轴 1 代表 2019 年 8 月，2 代表 2019 年 9 月……，5 代表 2019 年 12 月，根据数据得出 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.042x + \hat{a}$.若用此方程分析并预测该款手机市场占有率的变化趋势，则最早何时该款 5G 手机市场占有率能超过 0.5%（精确到月）（ ）



- A. 2020 年 6 月 B. 2020 年 7 月 C. 2020 年 8 月 D. 2020 年 9 月

3. 已知双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线为 l ，圆 $C: (x-c)^2 + y^2 = 4$ 与 l 相切于点 A ，若 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}$ ，则双曲线 Γ 的离心率为（ ）

- A. 2 B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

4. 刘徽(约公元 225 年-295 年)，魏晋期间伟大的数学家，中国古典数学理论的奠基人之一他在割圆术中提出的，“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”，这可视为中国古代极限观念的佳作，割圆术的核心思想是将一个圆的内接正 n 边形等分成 n 个等腰三角形(如图所示)，当 n 变得很大时，这 n

个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积，运用割圆术的思想，得到 $\sin 2^\circ$ 的近似值为（ ）



- A. $\frac{\pi}{90}$ B. $\frac{\pi}{180}$ C. $\frac{\pi}{270}$ D. $\frac{\pi}{360}$

5. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = \sqrt{1-x^2}\}$, $B = \{(x, y) | y = 2x\}$, 则 $A \cap B$ 中元素的个数为()

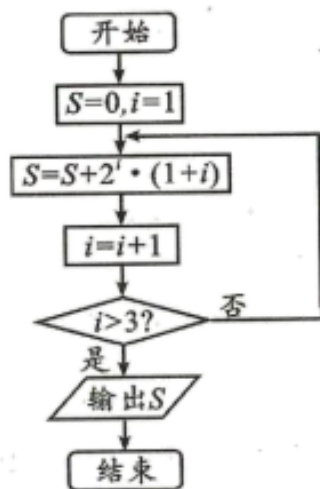
- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

6. 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数(如 $[2.5] = 2$, $[4] = 4$, $[-2.5] = -3$), 已知 $a_n = \left\lfloor \frac{2}{7} \times 10^n \right\rfloor$, $b_1 = a_1$,

$b_n = a_n - 10a_{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$), 则 $b_{2019} =$ ()

- A. 2 B. 5 C. 7 D. 8

7. 执行如图所示的程序框图，则输出 S 的值为 ()



- A. 16 B. 48 C. 96 D. 128

8. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$, 则不等式 $f(e^{1-x}) > f(e^{2x-1})$ 的解集是 ()

- A. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

9. 《聊斋志异》中有这样一首诗：“挑水砍柴不堪苦，请归但求穿墙术。得诀自谓无所阻，额上坟起终不悟。”在这里，我

们称形如以下形式的等式具有“穿墙术”： $2\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{2\frac{2}{3}}$, $3\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{3\frac{3}{8}}$, $4\sqrt{\frac{4}{15}} = \sqrt{4\frac{4}{15}}$, $5\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{5\frac{5}{24}}$

, 则按照以上规律, 若 $10\sqrt{\frac{10}{n}} = \sqrt{10\frac{10}{n}}$ 具有“穿墙术”, 则 $n = ()$

- A. 48 B. 63 C. 99 D. 120

10. 已知点 $A(2, 0)$ 、 $B(0, -2)$. 若点 P 在函数 $y = \sqrt{x}$ 的图象上, 则使得 $\triangle PAB$ 的面积为 2 的点 P 的个数为 $()$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x+y \geq -1 \\ x-2y \leq -1 \\ 2x-y-1 \leq 0 \end{cases}$, 则 $2x-3y+4$ 的最大值为 $()$

- A. -1 B. -2 C. 3 D. 2

12. 若 $\left(3x + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$ ($n \in N^*$) 的展开式中含有常数项, 且 n 的最小值为 a , 则 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = ()$

- A. 36π B. $\frac{81\pi}{2}$ C. $\frac{25\pi}{2}$ D. 25π

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 点 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右支上, 其左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 直线 PF_1 与以坐标原点 O 为圆心、 a 为半径的圆相切于点 A , 线段 PF_1 的垂直平分线恰好过点 F_2 , 则该双曲线的渐近线的斜率为_____.

14. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 斜率为 $2\sqrt{2}$ 的直线过 F 且与抛物线交于 A , B 两点, O 为坐标原点,

若 A 在第一象限, 那么 $\frac{S_{\triangle AFO}}{S_{\triangle BFO}} =$ _____.

15. $(x^2 + 2)\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中所有项的系数和为_____, 常数项为_____.

16. 锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , 若 $a^2 - b^2 + ac = 0$, 则 $\frac{\sin A}{\sin B}$ 的取值范围是_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_3 + 2$ 是 a_2 和 a_4 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = a_n \log_2 a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - ax + 1}$ ($a \geq 0$).

(1) 当 $a = 0$ 时, 试求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线;

(2) 试讨论函数 $f(x)$ 的单调区间.

19. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, F 是椭圆 C 的一个焦点, 点 $M(0, 2)$, 直线 MF 的斜率为 1.

(1) 求椭圆 C 的方程;

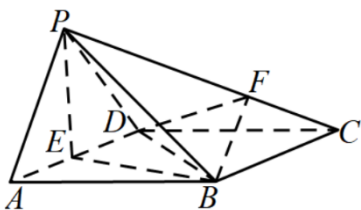
(1) 若过点 M 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 N , 是否存在直线 l 使得 $|AB| = 2|MN|$? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

20. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{\ln x}{a}$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数, 求实数 a 的最大值;

(2) 若 $0 < a < 1$, 求证: $f(x) \geq \frac{2 + \ln a}{a}$.

21. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中底面 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, $\triangle PAD$ 是边长为 2 的正三角形, $PC = \sqrt{10}$, E 为线段 AD 的中点.



(1) 求证: 平面 $PBC \perp$ 平面 PBE ;

(2) 是否存在满足 $\vec{PF} = \lambda \vec{FC} (\lambda > 0)$ 的点 F , 使得 $V_{B-PAE} = \frac{3}{4} V_{D-PFB}$? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (10 分) 在平面直角坐标系中, 曲线 $C_1: x^2 - y^2 = 2$, 曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$

(θ 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求曲线 C_1 、 C_2 的极坐标方程;

(2) 在极坐标系中, 射线 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 与曲线 C_1 , C_2 分别交于 A 、 B 两点 (异于极点 O), 定点 $M(3, 0)$, 求 $\triangle MAB$ 的面积

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

求导得到 $f'(x) = e^x$ ，根据切线方程得到 $b = a \ln a$ ，故 $ab = a^2 \ln a$ ，设 $g(x) = x^2 \ln x$ ，求导得到函数在 $\left(0, e^{\frac{1}{2}}\right)$ 上

单调递减，在 $\left(e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ 上单调递增，故 $g(x)_{\min} = g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$ ，计算得到答案.

【详解】

$f(x) = e^x + b$ ，则 $f'(x) = e^x$ ，取 $e^{x_0} = a$ ， $(a > 0)$ ，故 $x_0 = \ln a$ ， $f(x_0) = a + b$.

故 $a + b = a(\ln a + 1)$ ，故 $b = a \ln a$ ， $ab = a^2 \ln a$.

设 $g(x) = x^2 \ln x$ ， $g'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$ ，取 $g'(x) = 0$ ，解得 $x = e^{\frac{1}{2}}$.

故函数在 $\left(0, e^{\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(e^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ 上单调递增，故 $g(x)_{\min} = g\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查函数的切线问题，利用导数求最值，意在考查学生的计算能力和综合应用能力.

2、C

【解析】

根据图形，计算出 $\bar{x}, \bar{y}$ ，然后解不等式即可.

【详解】

解： $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3$ ， $\bar{y} = \frac{1}{5} \times (0.02 + 0.05 + 0.1 + 0.15 + 0.18) = 0.1$

点 $(3, 0.1)$ 在直线 $\hat{y} = 0.042x + \hat{a}$ 上

$0.1 = 0.042 \times 3 + \hat{a}$ ， $\hat{a} = -0.026$

$$\hat{y} = 0.042x - 0.026$$

$$\text{令 } \hat{y} = 0.042x - 0.026 > 0.5$$

$$x \geq 13$$

因为横轴 1 代表 2019 年 8 月，所以横轴 13 代表 2020 年 8 月，

故选：C

【点睛】

考查如何确定线性回归直线中的系数以及线性回归方程的实际应用，基础题.

3、D

【解析】

由圆 $C: (x-c)^2 + y^2 = 4$ 与 l 相切可知，圆心 $C(c, 0)$ 到 l 的距离为 2，即 $b = 2$. 又 $S_{\triangle AF_1F_2} = 2S_{\triangle AOF_2} = ab = 2\sqrt{3}$ ，由此求出 a 的值，利用离心率公式，求出 e .

【详解】

由题意得 $b = 2$ ， $S_{\triangle AF_1F_2} = ab = 2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore a = \sqrt{3}, \therefore e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查了双曲线的几何性质，直线与圆相切的性质，离心率的求法，属于中档题.

4、A

【解析】

设圆的半径为 r ，每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$ ，则每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$ ，由割圆术可得圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$ ，整理可得 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$ ，当 $n = 180$ 时即可为所求.

【详解】

由割圆术可知当 n 变得很大时，这 n 个等腰三角形的面积之和近似等于圆的面积，

设圆的半径为 r ，每个等腰三角形的顶角为 $\frac{360^\circ}{n}$ ，

所以每个等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$ ，

所以圆的面积为 $\pi r^2 = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$ ，即 $\sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n}$ ，

所以当 $n = 180$ 时，可得 $\sin \frac{360^\circ}{180} = \sin 2^\circ = \frac{2\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$ ，

故选：A

【点睛】

本题考查三角形面积公式的应用,考查阅读分析能力.

5、C

【解析】

集合 A 表示半圆上的点, 集合 B 表示直线上的点, 联立方程组求得方程组解的个数, 即为交集中元素的个数.

【详解】

由题可知: 集合 A 表示半圆上的点, 集合 B 表示直线上的点,

联立 $y = \sqrt{1-x^2}$ 与 $y = 2x$,

可得 $\sqrt{1-x^2} = 2x$, 整理得 $x^2 = \frac{1}{5}$,

即 $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$,

当 $x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时, $y = 2x < 0$, 不满足题意;

故方程组有唯一的解 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

故 $A \cap B = \left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$.

故选: C.

【点睛】

本题考查集合交集的求解, 涉及圆和直线的位置关系的判断, 属基础题.

6、B

【解析】

求出 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$, 判断出 $\{b_n\}$ 是一个以周期为 6 的周期数列, 求出即可.

【详解】

解: $a_n = \left[\frac{2}{7} \times 10^n\right], b_1 = a_1, b_n = a_n - 10a_{n-1} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2)$,

$\therefore a_1 = \left[\frac{20}{7}\right] = 2 = b_1, a_2 = \left[\frac{200}{7}\right] = 28,$

$b_2 = 28 - 10 \times 2 = 8,$

同理可得: $a_3 = 285, b_3 = 5; a_4 = 2857, b_4 = 7; a_5 = 28571, b_5 = 1. a_6 = 285714, b_6 = 4; a_7 = 2857142,$

$$b_7=2, \dots\dots$$

$$\therefore b_{n+6}=b_n.$$

故 $\{b_n\}$ 是一个以周期为 6 的周期数列,

$$\text{则 } b_{2019}=b_{6 \times 336+3}=b_3=5.$$

故选: **B**.

【点睛】

本题考查周期数列的判断和取整函数的应用.

7、 **B**

【解析】

列出每一次循环, 直到计数变量 i 满足 $i > 3$ 退出循环.

【详解】

第一次循环: $S = 2^1(1+1) = 4, i = 2$; 第二次循环: $S = 4 + 2^2(1+2) = 16, i = 3$;

第三次循环: $S = 16 + 2^3(1+3) = 48, i = 4$, 退出循环, 输出的 S 为 48.

故选: **B**.

【点睛】

本题考查由程序框图求输出的结果, 要注意在哪一步退出循环, 是一道容易题.

8、 **B**

【解析】

由导数确定函数的单调性, 利用函数单调性解不等式即可.

【详解】

$$\text{函数 } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}, \text{ 可得 } f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2},$$

$x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$$\because e^{1-x} > 0, e^{2x-1} > 0,$$

故不等式 $f(e^{1-x}) > f(e^{2x-1})$ 的解集等价于不等式 $e^{1-x} > e^{2x-1}$ 的解集.

$$1-x > 2x-1.$$

$$\therefore x < \frac{2}{3}.$$

故选: **B**.

【点睛】

本题主要考查了利用导数判定函数的单调性，根据单调性解不等式，属于中档题.

9、C

【解析】

观察规律得根号内分母为分子的平方减 1，从而求出 n.

【详解】

解：观察各式发现规律，根号内分母为分子的平方减 1

所以 $n = 10^2 - 1 = 99$

故选：C.

【点睛】

本题考查了归纳推理，发现总结各式规律是关键，属于基础题.

10、C

【解析】

设出点 P 的坐标，以 AB 为底结合 $\triangle PAB$ 的面积计算出点 P 到直线 AB 的距离，利用点到直线的距离公式可得出关于 a 的方程，求出方程的解，即可得出结论.

【详解】

设点 P 的坐标为 $(a, \sqrt{a})$ ，直线 AB 的方程为 $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$ ，即 $x - y - 2 = 0$ ，

设点 P 到直线 AB 的距离为 d，则 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times d = 2$ ，解得 $d = \sqrt{2}$ ，

另一方面，由点到直线的距离公式得 $d = \frac{|a - \sqrt{a} - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ，

整理得 $a - \sqrt{a} = 0$ 或 $a - \sqrt{a} - 4 = 0$ ， $\because a \geq 0$ ，解得 $a = 0$ 或 $a = 1$ 或 $a = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$.

综上，满足条件的点 P 共有三个.

故选：C.

【点睛】

本题考查三角形面积的计算，涉及点到直线的距离公式的应用，考查运算求解能力，属于中等题.

11、C

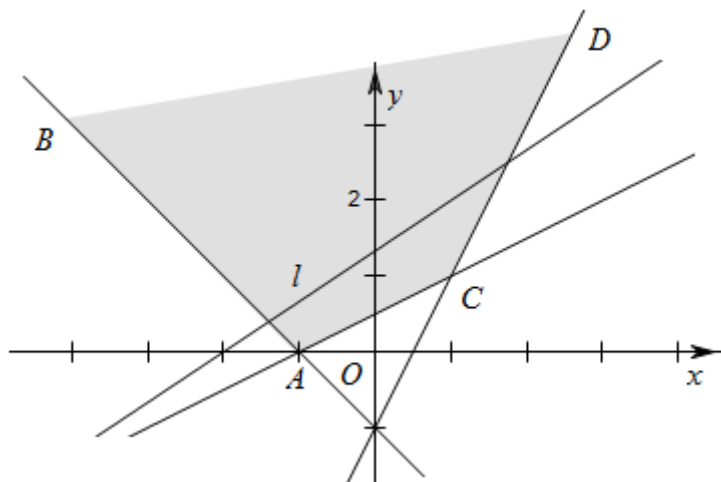
【解析】

作出可行域，直线目标函数对应的直线 l，平移该直线可得最优解.

【详解】

作出可行域，如图由射线 AB ，线段 AC ，射线 CD 围成的阴影部分（含边界），作直线 $l: 2x - 3y + 4 = 0$ ，平移直线 l ，当 l 过点 $C(1,1)$ 时， $z = 2x - 3y + 4$ 取得最大值 1.

故选：C.



【点睛】

本题考查简单的线性规划问题，解题关键是作出可行域，本题要注意可行域不是一个封闭图形.

12、C

【解析】

$3x + \frac{1}{x\sqrt{x}}$ ($n \in N^*$) 展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_n^r (3x)^{n-r} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} \right)^r = 3^{n-r} C_n^r x^{n-\frac{5}{2}r}, r=0,1,\dots,n, \text{ 因为展开式中含有常数项, 所以 } n - \frac{5}{2}r = 0, \text{ 即 } r = \frac{2}{5}n \text{ 为整数, 故 } n \text{ 的最小值为 } 1.$$

数，故 n 的最小值为 1.

$$\text{所以 } \int_a^{-a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_5^{-5} \sqrt{5^2 - x^2} dx = \frac{25\pi}{2}. \text{ 故选 C}$$

点睛：求二项展开式有关问题的常见类型及解题策略

(1)求展开式中的特定项.可依据条件写出第 $r+1$ 项，再由特定项的特点求出 r 值即可.

(2)已知展开式的某项，求特定项的系数.可由某项得出参数项，再由通项写出第 $r+1$ 项，由特定项得出 r 值，最后求出其参数.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $\pm \frac{4}{3}$

【解析】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/298013077040006117>