

* 第04讲 三元一次方程组的解法

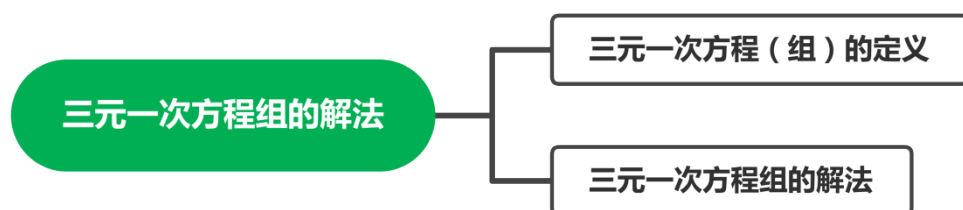
01

学习目标

课程标准	学习目标
①三元一次方程（组）	1. 掌握三元一次方程（组）的概念并能够准确的进行判断。
②三元一次的解法	2. 掌握三元一次方程组的解法并能够熟练的解三元一次方程组。

02

思维导图



03

知识清单

知识点 01 三元一次方程（组）的定义

1. 三元一次方程的定义：

含有__3__个未知数且含有未知数的项的次数都是__1__的整式方程叫做三元一次方程。

2. 三元一次方程组的定义：

方程组中含有__3__个未知数，含未知数的项的次数都是__1__且一共有三个方程的方程组叫做三元一次方程组。

【即学即练 1】

1. 下列是三元一次方程组的是（ ）

A.
$$\begin{cases} 2x=5 \\ x^2+y=7 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} \frac{3}{x}-y+z=-2 \\ x-2y+z=9 \\ y=-3 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x+y-z=7 \\ xyz=1 \\ x-3y=4 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x+y=2 \\ y+z=1 \\ x+z=9 \end{cases}$$

【分析】如果方程组中含有三个未知数，每个方程中含有未知数的项的次数都是一次，并且方程组中一

共有两个或两个以上的方程，这样的方程组叫做三元一次方程组；利用三元一次方程组的定义逐项判断即可得到答案.

【解答】解：对于 A 选项，第二个方程中未知数 x 的次数是 2，

故 A 选项中方程组不是三元一次方程组；

对于 B 选项，第一个方程中分母含有未知数，

故 B 选项中方程组不是三元一次方程组；

对于 C 选项，第二个方程中每个未知数的次数都是 1，但对于整个方程而言，次数是 3，

故 C 选项中的方程组不是三元一次方程组；

对于 D 选项，方程组中含有三个未知数，且含未知数的项的次数都是一次，

故 D 选项中的方程组是三元一次方程组.

故选 D .

知识点 02 解三元一次方程组

1. 基本思想：

三元一次方程组消元转化成二元一次方程组，再进行消元转化成一元一次方程。

2. 基本步骤：

(1) 变形：通过加减消元或带入消元把三元一次方程组变为二元一次方程。

(2) 求解：求解二元一次方程组。

(3) 回代：将求得的二元一次方程组的两个解带入原方程中任意一个方程，得到一个一元一次方程。

(4) 求解：解一元一次方程得到第三个未知数的值。

(5) 写解：用 $\begin{cases} \end{cases}$ 写出方程组的解。

【即学即练 1】

2. 解方程组：
$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}.$$

【分析】由①+②和①+③可消去 z ，再组成二元一次方程，求解即可.

【解答】解：

在方程组
$$\begin{cases} x-2y+z=0 \text{ ①} \\ 2x+y-z=1 \text{ ②} \\ 3x+2y-z=4 \text{ ③} \end{cases}$$
 中，

①+②可得 $3x-y=1$ ④，

①+③可得 $4x=4$ ，解得 $x=1$ ，

把 $x=1$ 代入④可得 $y=2$ ，

把 $x=1$ 、 $y=2$ 代入①可得 $z=3$ ，

$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

04

题型精讲

题型 01 解三元一次方程组

【典例 1】解方程组：
$$\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 2x-y+2z=-4 \\ x+2y-2z=3 \end{cases}$$

【分析】利用加减消元法，进行计算即可解答.

【解答】解：
$$\begin{cases} 2x+3y=4 \text{ ①} \\ 2x-y+2z=-4 \text{ ②} \\ x+2y-2z=3 \text{ ③} \end{cases}$$

②+③得：

$$3x+y=-1 \text{ ④},$$

④×3 得：

$$9x+3y=-3 \text{ ⑤},$$

⑤ - ④得：

$$7x=-7,$$

解得： $x=-1$,

把 $x=-1$ 代入①得：

$$-2+3y=4,$$

解得： $y=2$,

把 $x=-1, y=2$ 代入②得：

$$-2-2+2z=-4,$$

解得： $z=0$,

$$\therefore \text{原方程组的解为:} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}.$$

【变式 1】解方程组：
$$\begin{cases} 3x+2y+5z=2 \\ x-2y-z=6 \\ 4x+2y-7z=30 \end{cases}.$$

【分析】先让①+②可得 $x+z=2$ ④，再让②+③得 $5x-8z=36$ ⑤，④和⑤组成方程组，解可求 x, z ，再把 x, z 的值代入②可求 y .

【解答】解：
$$\begin{cases} 3x+2y+5z=2 & \text{①} \\ x-2y-z=6 & \text{②} \\ 4x+2y-7z=30 & \text{③} \end{cases},$$

①+②，得 $x+z=2$ ④，

②+③，得 $5x-8z=36$ ⑤，

④ $\times$ 5 - ⑤，得 $13z=-26$ ，

解得 $z=-2$ ，

把 $z=-2$ 代入④，得 $x=4$ ，

把 $x=4$ ， $z=-2$ 代入②，得 $y=0$ 。

所以原方程组的解是
$$\begin{cases} x=4 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}.$$

【变式2】解方程组：
$$\begin{cases} 3x-y+z=4 & \text{①} \\ 2x+3y-z=12 & \text{②} \\ x+y+z=6 & \text{③} \end{cases}$$

【分析】①+②得出 $5x+2y=16$ ④，③+②得出 $3x+4y=18$ ⑤，由④和⑤组成一个二元一次方程组，求出 x 、 y 的值，再求出 z 即可。

【解答】解：
$$\begin{cases} 3x-y+z=4 & \text{①} \\ 2x+3y-z=12 & \text{②} \\ x+y+z=6 & \text{③} \end{cases},$$

①+②，得 $5x+2y=16$ ④，

③+②，得 $3x+4y=18$ ⑤，

由④和⑤组成一个二元一次方程组
$$\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 3x+4y=18 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases},$$

把 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 代入①，得 $6-3+z=4$ ，

解得： $z=1$ ，

所以原方程组的解是
$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}.$$

【变式3】解三元一次方程组
$$\begin{cases} x-4y+z=-3, & \text{①} \\ 2x+y-z=18, & \text{②} \\ x-y-z=7, & \text{③} \end{cases}.$$

【分析】①+②求出 $x-y=5$ ，②-③求出 $x+2y=11$

，组成一个二元一次方程组，求出方程组的解，把求出的 x 、 y 的值代入③求 z 即可.

【解答】解：①+②，得 $3x - 3y = 15$ ，

即 $x - y = 5$ ，④

② - ③，得 $x + 2y = 11$ ，⑤

由④和⑤组成一个二元一次方程组
$$\begin{cases} x+2y=11 \\ x-y=5 \end{cases}$$

解得： $x=7$ ， $y=2$ ，

再把 $x=7$ ， $y=2$ 代入③，得 $z = -2$.

所以方程组的解为
$$\begin{cases} x=7 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases}.$$

题型 02 构造三元一次方程组求值

【典例 1】已知 $y = ax^2 + bx + c$ ，当 $x = -2$ 时， $y = 9$ ；当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ；当 $x = 2$ 时， $y = 5$ ，求 a 、 b 、 c 的值.

【分析】将三组数值代入 $y = ax^2 + bx + c$ 列出三元一次方程组即可求出答案.

【解答】解：当 $x = -2$ 时， $y = 9$ ；

$$\therefore 9 = 4a - 2b + c,$$

当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，

$$\therefore 3 = c,$$

当 $x = 2$ 时， $y = 5$ ，

$$\therefore 5 = 4a + 2b + c,$$

$$\therefore \begin{cases} 4a - 2b + c = 9 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

【变式 1】在等式 $y = ax^2 + bx + c$ 中，当 $x = -1$ 时， $y = 3$ ；当 $x = 0$ 时， $y = 1$ ，当 $x = 1$ 时， $y = 1$ ，求这个等式中 a 、 b 、 c 的值.

【分析】根据题意列出三元一次方程组，解方程组即可.

$$\text{【解答】解：由题意得，} \begin{cases} a - b + c = 3 \\ c = 1 \\ a + b + c = 1 \end{cases},$$

解得， $a = 1$ ， $b = -1$ ， $c = 1$.

【变式2】已知多项式 x^3+ax^2+bx+c 中， a, b, c 为常数，当 $x=1$ 时，多项式的值是 1；当 $x=2$ 时，多项式的值是 2；若当 x 是 8 和 -5 时，多项式的值分别为 M 与 N ，求 $M-N$ 的值。

【分析】根据题意列出方程 $1+a+b+c=1$ ， $8+4a+2b+c=2$ ，解得 $\begin{cases} a=\frac{c-6}{2} \\ b=\frac{6-3c}{2} \end{cases}$ ，再由题意求出 M 和 N 的值，

然后把 a, b 的值代入即可求出答案。

【解答】解：当 $x=1$ 时， $1+a+b+c=1$ ，

$$\therefore a+b+c=0. \quad ①$$

当 $x=2$ 时， $8+4a+2b+c=2$ ，

$$\therefore 4a+2b+c=-6 \quad ②$$

联立①，②解得 $\begin{cases} a=\frac{c-6}{2} \\ b=\frac{6-3c}{2} \end{cases}$ ，

当 $x=8$ 时， $M=512+64a+8b+c$ ，

当 $x=5$ 时， $N=-125+25a-5b+c$ 。

$$\therefore M-N$$

$$=512+64a+8b+c-(-125+25a-5b+c)$$

$$=39a+13b+637$$

$$=39 \times \frac{c-6}{2} + 13 \times \frac{6-3c}{2} + 637$$

$$=-117+39+637$$

$$=559.$$

【变式3】若有理数 a, b, c 满足 $(a+2c-2)^2+|4b-3c-4|+\frac{a}{2}-4b-1=0$ ，试求 $a^{3n+1}b^{3n+2}-c^{4n+2}$ 。

【分析】根据非负数的性质得到 $\begin{cases} a+2c-2=0 \quad ① \\ 4b-3c-4=0 \quad ② \\ \frac{a}{2}-4b-1=0 \quad ③ \end{cases}$ ，再解方程组得到 $\begin{cases} a=4 \\ b=\frac{1}{4} \\ c=-1 \end{cases}$ ，所以 $a^{3n+1}b^{3n+2}-c^{4n+2}=4^{3n+1}$

$$\cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3n+2} - (-1)^{4n+2} = \left(4 \times \frac{1}{4}\right)^{3n+1} \cdot \frac{1}{4} - 1$$
，然后根据积的乘方进行计算。

【解答】解：根据题意得 $\begin{cases} a+2c-2=0 \quad ① \\ 4b-3c-4=0 \quad ② \\ \frac{a}{2}-4b-1=0 \quad ③ \end{cases}$ ，

$$②+③得 \frac{1}{2}a-3c-5=0,$$

所以 $a=6c+10$,

把 $a=6c+10$ 代入①得 $6c+10+2c-2=0$ 、

解得 $c=-1$,

所以 $a=-6+10=4$,

把 $c=-1$ 代入②得 $4b+3-4=0$,

解得 $b=\frac{1}{4}$,

所以方程组的解为
$$\begin{cases} a=4 \\ b=\frac{1}{4} \\ c=-1 \end{cases}$$

所以 $a^{3n+1}b^{3n+2}-c^{4n+2}=4^{3n+1}\cdot(\frac{1}{4})^{3n+2}-(-1)^{4n+2}$

$= (4 \times \frac{1}{4})^{3n+1} \cdot \frac{1}{4} - 1$

$= \frac{1}{4} - 1$

$= -\frac{3}{4}$.

题型 03 求式子的值

【典例 1】已知: $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}$, 且 $3a+2b-4c=9$, 则 $a+b+c$ 的值等于 -15.

【分析】先设比例系数为 k , 代入 $3a+2b-4c=9$, 转化为关于 k 的一元一次方程解答.

【解答】解: 设 $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}=k$,

则 $a=3k$, $b=5k$, $c=7k$,

代入 $3a+2b-4c=9$,

得 $9k+10k-28k=9$,

解得: $k=-1$,

$\therefore a=-3$, $b=-5$, $c=-7$,

于是 $a+b+c=-3-5-7=-15$.

故本题答案为: -15.

【变式 1】设 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$, 则 $\frac{x-2y+3z}{x+y+z}$ 的值为 ()

A. $\frac{2}{7}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{8}{9}$

D. $\frac{5}{7}$

【分析】设已知等式等于 k , 表示出 x, y, z , 代入原式计算即可得到结果.

【解答】解：设 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$ ，得到 $x=2k$ ， $y=3k$ ， $z=4k$ ，

$$\text{则原式} = \frac{2k-6k+12k}{2k+3k+4k} = \frac{8}{9}.$$

故选：C.

【变式2】已知 $x+y+7z=0$ ， $x-y-3z=0$ ($xyz \neq 0$)，则 $\frac{2x+y+z}{2x-y+z} = \underline{\quad -4 \quad}$.

【分析】在 $x+y+7z=0$ ， $x-y-3z=0$ 中，未知数系数相同， xy 的系数互为相反数，通过两个式子相减或相加，即可用 z 的代数式表示出 x 、 y ，进而得出答案.

【解答】解： $x+y+7z=0$ ①，

$$x-y-3z=0$$
 ②，

$$\text{①} - \text{②}, \text{得 } 2y+10z=0, \text{ 即 } y=-5z,$$

$$\text{①} + \text{②}, \text{得 } 2x+4z=0, \text{ 即 } x=-2z,$$

$$\therefore \frac{2x+y+z}{2x-y+z} = \frac{-4z-5z+z}{-4z+5z+z} = \frac{-8z}{2z} = -4.$$

故答案为：-4.

【变式3】已知方程组 $\begin{cases} 2m+3n+k=11 \\ 3m+5n+k=16 \end{cases}$ ，则 $\frac{m+2n}{m+n+k} = \underline{\quad \frac{5}{6} \quad}$.

【分析】方程组两方程相减求出 $m+2n$ 的值，第一个方程乘以 2 减去第二个方程求出 $m+n+k$ 的值，代入原式计算即可求出值.

$$\text{【解答】解：} \begin{cases} 2m+3n+k=11 \text{ ①} \\ 3m+5n+k=16 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{②} - \text{①} \text{得：} m+2n=5,$$

$$\text{①} \times 2 - \text{②} \text{得：} m+n+k=6,$$

$$\text{则原式} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{故答案为：} \frac{5}{6}.$$

题型 04 三元一次方程组的简单应用

【典例1】为确保信息安全，信息需要加密传输，发送方由明文 $\rightarrow$ 密文（加密），接收方由密文 $\rightarrow$ 明文（解密）。已知加密规则为：明文 a, b, c 对应的密文 $a+2, 2b+1, 3c+4$ 。例如明文 1, 2, 3 对应的密文 3, 5, 13。如果接收方收到密文 4, 13, 16，则解密得到的明文为（ ）

- A. 4, 5, 6 B. 2, 6, 8 C. 3, 6, 9 D. 2, 6, 4

【分析】根据接收方收到密文 4, 13, 16，可列出关于 a, b, c 的三元一次方程组，解之即可得出结论.

【解答】解：根据题意得：
$$\begin{cases} a+2=4 \\ 2b+1=13, \\ 3c+4=16 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} a=2 \\ b=6, \\ c=4 \end{cases}$$

∴解密得到的明文为 2, 6, 4.

故选：D.

【变式 1】小梦在某购物平台上购买甲、乙、丙三种商品，当购物车内选择 3 件甲，2 件乙，1 件丙时显示的价格为 420 元；当购物车内选择 2 件甲，3 件乙，4 件丙时显示的价格为 580 元，那么购买甲、乙、丙各两件应该付款（ ）

- A. 200 元 B. 400 元 C. 500 元 D. 600 元

【分析】设购买甲、乙、丙三种商品需付款 x 元， y 元， z 元，根据题意列出方程组，计算即可求出 x ， y ， z 的值，即可得到结果.

【解答】解：设购买甲、乙、丙三种商品需付款 x 元， y 元， z 元，

根据题意得：
$$\begin{cases} 3x+2y+z=420 \textcircled{1} \\ 2x+3y+4z=580 \textcircled{2} \end{cases},$$

$\textcircled{1}+\textcircled{2}$ 得： $5x+5y+5z=1000$ ，即 $x+y+z=200$ ，

∴ $2x+2y+2z=400$ ，

则购买甲、乙、丙各两件应该付款 400 元.

故选：B.

【变式 2】某校开学典礼需要购买一、二、三等奖奖品若干，若购买三等奖奖品 3 件，二等奖奖品 5 件，一等奖奖品 1 件，共需 62 元，若购三等奖奖品 4 件，二等奖奖品 7 件，一等奖奖品 1 件共需 77 元. 现在购买三等奖、二等奖、一等奖奖品各一件，共需（ ）元

- A. 31 B. 32 C. 33 D. 34

【分析】设三等奖奖品的单价是 x 元，二等奖奖品的单价是 y 元，一等奖奖品的单价是 z 元，根据“购买三等奖奖品 3 件，二等奖奖品 5 件，一等奖奖品 1 件，共需 62 元；购三等奖奖品 4 件，二等奖奖品 7 件，一等奖奖品 1 件共需 77 元”，可得出关于 x ， y ， z 的三元一次方程组，利用 $\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2$ ，即可求出购买三等奖、二等奖、一等奖奖品各一件所需的费用.

【解答】解：设三等奖奖品的单价是 x 元，二等奖奖品的单价是 y 元，一等奖奖品的单价是 z 元，

根据题意得：
$$\begin{cases} 3x+5y+z=62 \textcircled{1} \\ 4x+7y+z=77 \textcircled{2} \end{cases},$$

$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2$ 得： $x+y+z=32$ ，

∴购买三等奖、二等奖、一等奖奖品各一件，共需 32 元.

故选：B.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/298022015036007023>