高三数学（答案在最后）

本试卷满分 **150** 分，考试用时 **120** 分钟**.**

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上**.**

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑**.**如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号**.**回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效**.**

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回**.**

一、选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分**.**在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的**.**

1. 已知集合 $A=\{x|1\le 2^x\le 16, x\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x|\frac{x-3}{x-1}\le 0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $[1,3]$　　B. $[3,4]$　　C. $\{2,3\}$　　D. $(2,3]$

【答案】C

【解析】

【分析】解不等式化简集合 A,B，再利用交集的定义求解.

【详解】由 $A=\{x|1\le 2^x\le 16, x\in \mathbf{Z}\}=\{x|0\le x\le 4, x\in \mathbf{Z}\}=\{0,1,2,3,4\}$，

由 $B=\{x|\frac{x-3}{x-1}\le 0\}=\{x|\begin{cases}(x-1)(x-3)\le 0\\ x-1\ne 0\end{cases}\}=\{x|1<x\le 3\}$，

所以 $A\cap B=\{2,3\}$.

故选：C

2. 已知复数 z 满足：$\frac{z}{2+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$，则 $|z-2\mathrm{i}|=$（　　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $3\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据复数的乘除法求出复数 z，可得复数 $z-2\mathrm{i}$，由模长公式即可求得答案.

详解】由 $\frac{z}{2+\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$，得 $z=(1-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$，

所以 $|z-2\mathrm{i}|=|3-3\mathrm{i}|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$.

故选：D.

3. 已知圆锥的轴截面是一个斜边长为 $2\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形，则圆锥的表面积为（　　）

A. $\sqrt{2}\pi$　　　　B. $2\sqrt{2}\pi$　　　　C. 4π　　　　D. $\left(2+2\sqrt{2}\right)\pi$

【答案】D

【解析】

【分析】由轴截面可得底面半径及母线长，再由表面积公式即可求解；

【详解】因为轴截面是一个斜边长为 $2\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形，

所以圆锥的底面半径 $R=\sqrt{2}$ ，母线 $l=2$ ，

所以圆锥的表面积 $S=\pi R^2+\pi Rl=\left(2+2\sqrt{2}\right)\pi$.

故选：D.

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若公比 $q\quad 2$ ，$S_3=7$，则 $a_4+a_5+a_6=$（　　）

A. 49　　　　B. 56　　　　C. 63　　　　D. 112

【答案】B

【解析】

【分析】根据等比数列的通项公式推导出 $\dfrac{a_4+a_5+a_6}{a_1+a_2+a_3}$ 与公比 q 的关系，再结合已知条件求出 $a_4+a_5+a_6$ 的值.

【详解】$\because \dfrac{a_4+a_5+a_6}{a_1+a_2+a_3}=q^3=8$ ，$\therefore a_4+a_5+a_6=8S_3=56$.

故选：B.

5. 已知 $7+\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)=0$，$2\tan(\alpha-\beta)-1=0$，则 $\tan 2\alpha=$（　　）

A. $-\dfrac{2}{3}$　　　　B. $\dfrac{2}{3}$　　　　C. $\dfrac{3}{4}$　　　　D. $-\dfrac{3}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据已知条件求出 $\tan\beta$ 与 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值，再利用三角函数的两角和公式求出 $\tan\alpha$ ，最后根据

二倍角公式求出 $\tan 2\alpha$.

【详解】由 $7+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=0$，可得 $\tan\beta=-\frac{1}{7}$，且

$$\tan\alpha=\tan\left[(\alpha-\beta)+\beta\right]=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}}=\frac{1}{3},$$

故 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$.

故选：C.

6. 已知函数 $f(x)=x^m$， $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2-x},x<2,\\ \log_a x-1,x\geq 2(a>0,且a\neq 1),\end{cases}$ 若 $p:f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，

$q:g(m)>0$，且 p 是 q 的必要不充分条件，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,1)\cup(1,2]$　　B. $(0,1)\cup[2,+\infty)$　　C. $\left[\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$　　D. $\left[\frac{1}{2},1\right)\cup[2,+\infty)$

【答案】B

【解析】

【分析】由集合的包含关系，分类讨论 $m\geqslant 2$ 时， $\log_a m>1$ 的解集即可求解；

【详解】 $p:f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，得 $m>0$ ，

考虑 $q:g(m)>0$

当 $m<2$ 时， $g(m)>0$ 等价于 $\frac{m}{2-m}>0$ 得： $0<m<2$.

当 $m\geqslant 2$ 时， $g(m)>0$ 等价于 $\log_a m>1$ ，

当 $0<a<1$ 时，由 $\log_a m>1$ ，可得： $m<a$ ，又 $m\geqslant 2$ ，此时解集为 $\varnothing$ ，

也即 $g(m)>0$ 的解集为 $(0,2)$ 符合题意；

当 $1<a<2$ 时，由 $\log_a m>1$ ，可得： $m>a$ ，又 $m\geqslant 2$ ，此时解集为 $[2,+\infty)$ ，

也即 $g(m)>0$ 的解集为 $(0,+\infty)$ ，不符合题意；

当$a \ge 2$时，由$\log_a m > 1$，可得：$m > a$，又$m \geqslant 2$，此时解集为$(a,+\infty)$，

也即$g(m) > 0$的解集为$(0,2) \cup (a,+\infty)$，符合题意；

综上可知：a的取值范围是$(0,1) \cup [2,+\infty)$.

故选：B

7. 已知$-\frac{\pi}{3}$为函数$f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$（$\omega > 0$，$\pi < \varphi < 2\pi$）的一个零点，直线$x = \frac{\pi}{3}$为曲线$y = f(x)$的一条对称轴，设$f(x)$的最小正周期$T \in \left(\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right)$，则$\omega\varphi =$（　　）

A. $\frac{9\pi}{4}$　　B. $\frac{49\pi}{16}$　　C. $\frac{63\pi}{16}$　　D. $\frac{81\pi}{16}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用三角函数的图象性质，通过图象中两个特殊点的距离与周期的关系求出周期T，再结合周期公式求出ω，最后代入特殊点求出φ，进而求得$\omega\varphi$的值.

【详解】由三角函数的图象与性质可得$\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} = \frac{T}{4} + \frac{kT}{2}$，$k \in \mathbf{Z}$，解得$T = \frac{8\pi}{3(1+2k)}$，$k \in \mathbf{Z}$，

又因为$T \in \left(\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right)$，故有且仅有$k = 1$时满足题意，此时$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{8\pi}{9}$，解得$\omega = \frac{9}{4}$，

此时$f(x) = \sin\left(\frac{9x}{4} + \varphi\right)$，代入$x = -\frac{\pi}{3}$，可得$\varphi - \frac{3\pi}{4} = k'\pi$，$k' \in \mathbf{Z}$，

又因为$\pi < \varphi < 2\pi$，故有且仅有$k' = 1$时满足题意，此时$\varphi = \frac{7\pi}{4}$.故$\omega\varphi = \frac{63\pi}{16}$.

故选：C.

8. 已知实数x，y，z满足$e^x - e^2 = e(x-2) \ne 0$，$e^y - e^3 = e(y-3) \ne 0$，$e^z - e^5 = e(z-5) \ne 0$，其中为自然对数的底数.则x，y，z的大小关系是（　　）

A. $x < y < z$　　B. $y < x < z$　　C. $z < x < y$　　D. $z < y < x$

【答案】D

【解析】

【分析】构建函数$f(t) = e^t - et$，利用导数分析$f(t)$的单调性，根据题意可得$f(x) = f(2)$，

$f(y)=f(3)$，$f(z)=f(5)$，且$x\neq 2$，$y\neq 3$，$z\neq 5$，结合单调性分析判断.

【详解】设$f(t)=e^t-et$，可知函数$f(t)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f'(t)=e^t-e$，

因为$f'(t)$在定义域上单调递增，且$f'(1)=0$，

若$t>1$，则$f'(t)>0$；若$t<1$，则$f'(t)<0$；

可得$f(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,1)$上单调递减，

又因为$e^x-e^2=e(x-2)\neq 0$，$e^y-e^3=e(y-3)\neq 0$，$e^z-e^5=e(z-5)\neq 0$，

可得$e^x-ex=e^2-2e$，$e^y-ey=e^3-3e$，$e^z-ez=e^5-5e$，

即$f(x)=f(2)$，$f(y)=f(3)$，$f(z)=f(5)$，且$x\neq 2$，$y\neq 3$，$z\neq 5$，

可知$f(x)<f(y)<f(z)$，且$x<1$，$y<1$，$z<1$，所以$z<y<x$.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于构建函数$f(t)=e^t-et$，结合函数的单调性分析判断.

二、选择题：本题共 3 小题，每题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知一组样本数据分别为：31，6，12，19，17，16，11，则该组样本数据的（　　）

A. 极差为 27　　B. 上四分位数为 19　　C. 平均数为 15.5　　D. 方差为$\frac{376}{7}$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据平均数、方差以及极差求解可判断 ACD，根据百分位数计算即可判断 D.

【详解】将样本数据按照从小到大的顺序排列为：6，11，12，16，17，19，31.

对于 A，根据极差定义可知，该组数据的极差为$31-6=25$，故 A 错误；

对于 B，因为$7\times 0.75=5.25$，所以该组数据的上四分位数为 19，故 B 正确；

对于 C，该组数据的平均数为$\frac{6+11+12+16+17+19+31}{7}=16$，故 C 错误；

对于 D，该组数据的方差为$\frac{(6-16)^2+(11-16)^2+(12-16)^2+(17-16)^2+(19-16)^2+(31-16)^2}{7}=\frac{376}{7}$

，

故 D 正确.

故选：BD

10. 设 F_1，F_2 分别为双曲线 $C: x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点，$P(x_0,y_0)$ 为 C 上一点，则（　　）

A. C 的焦距为 $2\sqrt{5}$

B. 当 P 在 C 的右支上，且 $y_0=4$ 时，$|PF_1|=6$

C. 当 $x_0=1$ 时，点 P 到 C 的两条渐近线距离之和为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. 当 $y_0=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 时，$\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形

【答案】ABD

【解析】

【分析】由椭圆方程可得 c 的值，判断 A；确定 P 点坐标结合双曲线定义判断 B；求出渐近线方程结合点到直线的距离公式可判断 C；求出 P 点坐标结合向量垂直的坐标运算可判断 D.

【详解】由双曲线 $C: x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 可知 $a=1, b=2, \therefore c=\sqrt{5}$，

得 C 的焦距为 $2\sqrt{5}$，故 A 正确；

由 P 在双曲线 C 的右支上，且 $y_0=4$ 可得 $x_0=\sqrt{5}$，从而 $P(\sqrt{5},4)$，

又因为 $F_2(\sqrt{5},0)$，此时 $PF_2\perp x$ 轴，即 $|PF_2|=4$，所以 $|PF_1|=|PF_2|+2=6$，故 B 正确；

C 的渐近线方程为 $2x\pm y=0$，当 $x_0=1$ 时，$P(1,0)$，

故点 P 到 C 的两条渐近线距离之和为 $\frac{|2|}{\sqrt{2^2+1^2}}+\frac{|2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，故 C 错误；

由 $y_0=\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 可得 $x_0=\pm\frac{3\sqrt{5}}{5}$，而 $F_1(-\sqrt{5},0)$，取 $P\left(\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$，

$\overrightarrow{PF_1}=\left(-\frac{8\sqrt{5}}{5},-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$，$\overrightarrow{PF_2}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$，则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，所以 $\angle F_1PF_2=90^\circ$，