专题40 代数综合压轴题（解析版）

类型一 配方法的应用

1．（2022•南京模拟）利用我们学过的完全平方公式及不等式知识能解决方程或代数式的一些问题，请阅读下列材料：

阅读材料：若 $m^2-2mm+2n^2-8n+16=0$，求 m、n 的值．

解：∵$m^2-2mn+2n^2-8n+16=0$，

∴$(m^2-2mn+n^2)+(n^2-8n+16)=0$，

∴$(m-n)^2+(n-4)^2=0$，

∴$(m-n)^2=0$，$(n-4)^2=0$，

∴$n=4$，$m=4$．

根据你的观察，探究下面的问题：

（1）已知 $a^2+4ab+5b^2+6b+9=0$，求 $a=$_____，$b=$_____；

（2）已知△ABC 的三边长 a、b、c 都是正整数，且满足 $a^2-4a+2b^2-4b+6=0$，求 c 的值；

（3）若 $A=3a^2+3a-4$，$B=2a^2+4a-6$，试比较 A 与 B 的大小关系，并说明理由．

思路引领：（1）将 $a^2+4ab+5b^2+6b+9=0$ 的左边分组配方，然后根据偶次方的非负性，可求出 a，b 的值；

（2）将 $a^2-4a+2b^2-4b+6=0$ 的左边分组配方，然后根据偶次方的非负性，可求出 a，b 的值，根据三角形的三边关系求出 c；

（3）让多项式 $3a^2+3a-4$ 与 $2a^2+4a-6$ 作差，结果配方，根据偶次方的非负性判断大小．

解：（1）$a^2+4ab+5b^2+6b+9=a^2+4ab+4b^2+b^2+6b+9=(a+2b)^2+(b+3)^2=0$，

∴$a+2b=0$，$b+3=0$，

解得 $a=6$，$b=-3$．

故答案为：6，-3；

（2）$a^2-4a+2b^2-4b+6=a^2-4a+4+2b^2-4b+2=(a-2)^2+2(b-1)^2=0$，

∴$a-2=0$，$b-1=0$，

解得 $a=2$，$b=1$，

∵a、b、c 是△ABC 的三边长，

∴$1<c<3$，

∵c 是正整数，

∴$c=2$；

（3）$A>B$，理由如下：

∵$A=3a^2+3a-4$，$B=2a^2+4a-6$，

$A-B=3a^2+3a-4-(2a^2+4a-6)=3a^2+3a-4-(2a^2+4a-6)=3a^2+3a-4-2a^2-4a+6=a^2-a+2=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}$，

∵$(a-\frac{1}{2})^2\geqslant 0$，

∴$(a-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0$，

∴$A>B$.

总结提升：本题考查了配方法的应用，结合偶次方的非负性求值的问题，本题属于中档题.

2.（2022秋•和平区校级期末）已知多项式$A=2x^2+my-12$，$B=nx^2-3y+6$.

（1）若$(m+2)^2+|n-3|=0$，化简$A-B$；

（2）若$A+B$的结果中不含有x^2项以及y项，求$m+n+mn$的值.

思路引领：（1）先根据整式的加减运算法则进行化简，然后将m与n的值代入原式即可求出答案.

（2）先根据整式的加减运算法则进行化简，然后令含有x^2的项和y的项的系数为零，从而可求出m与n的值.

解：（1）$A-B$

$=(2x^2+my-12)-(nx^2-3y+6)$

$=2x^2+my-12-nx^2+3y-6$，

由题意可知：$m+2=0$，$n-3=0$，

∴$m=-2$，$n=3$，

∴原式$=2x^2-2y-12-3x^2+3y-6$

$=-x^2+y-18$.

（2）$A+B=(2x^2+my-12)+(nx^2-3y+6)$

$=2x^2+my-12+nx^2-3y+6$

$=(n+2)x^2+(m-3)y-6$，

令$n+2=0$，$m-3=0$，

∴$m=3$，$n=-2$，

∴原式$=3-2+3\times(-2)$

$=1-6$

$=-5$.

总结提升：本题考查整式的加减运算，解题的关键是熟练运用整式的加减运算法则，本题属于基础题型.

3．已知 $a+b+c=1$，$b^2+c^2-4ac+6c+1=0$，求 abc 的值.

思路引领：由 $a+b+c=1$，得出 $a=1-b-c$，进一步代入 $b^2+c^2-4ac+6c+1=0$ 整理得出 a、b、c 的数值得出答案即可.

解：$\because a+b+c=1$，

$\therefore a=1-b-c$，

$\therefore b^2+c^2-4ac+6c+1$

$=b^2+c^2-4(1-b-c)c+6c+1$

$=b^2+c^2-4c+4bc+4c^2+6c+1$

$=(b+2c)^2+(c+1)^2=0$，

解得：$c=-1$，$b=2$，

$\therefore a=1-b-c=0$，

$\therefore abc=0$.

总结提升：此题考查因式分解的实际运用，非负数的性质，掌握完全平方公式是解决问题的关键.

类型二 一元二次方程与二次函数的综合

4．（2011•东城区二模）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2ax+b^2=0$，$a>0$，$b>0$.

（1）若方程有实数根，试确定 a，b 之间的大小关系；

（2）若 $a:b=2:\sqrt{3}$，且 $2x_1-x_2=2$，求 a，b 的值；

（3）在（2）的条件下，二次函数 $y=x^2+2ax+b^2$ 的图象与 x 轴的交点为 A、C（点 A 在点 C 的左侧），与 y 轴的交点为 B，顶点为 D．若点 $P(x, y)$ 是四边形 $ABCD$ 边上的点，试求 $3x-y$ 的最大值.

思路引领（1）根据方程有实数根可以得到其根的判别式为非负数，然后再根据 $a>0$，$b>0$ 作出判断即可；

（2）利用 a 与 b 的比值分别设出 a 和 b，利用根与系数的关系用设出的未知数表示出方程的两个解，代入的 $2x_1-x_2=2$ 中求得 a 与 b 的值即可；

（3）将上题中求得的 a 与 b 的值代入到函数中确定函数的解析式，然后求得与 x 轴的交点坐标，与 y 轴的交点坐标和顶点坐标，据此可以求出 $3x-y$ 的最大值.

解：（1）$\because$关于 x 的一元二次方程 $x^2+2ax+b^2=0$ 有实数根，

∴△＝（2a）^{2}－4b^2≥0，

有 a^2-b^2≥0，

（$a+b$）（$a-b$）≥0．

∵a＞0，b＞0，

∴$a+b$＞0，$a-b$≥0．

∴a≥b．

（2）∵a：b＝2：$\sqrt{3}$，

∴设$a=2k$，$b=\sqrt{3}k$．

解关于 x 的一元二次方程 $x^2+4kx+3k^2=0$，得 x＝－k 或－3k．

当 x_1＝－k，x_2＝－3k 时，由 $2x_1-x_2$＝2 得 k＝2．

当 x_1＝－3k，x_2＝－k 时，由 $2x_1-x_2$＝2 得$k=-\frac{2}{5}$（不合题意，舍去）．

∴$a=4$，$b=2\sqrt{3}$．

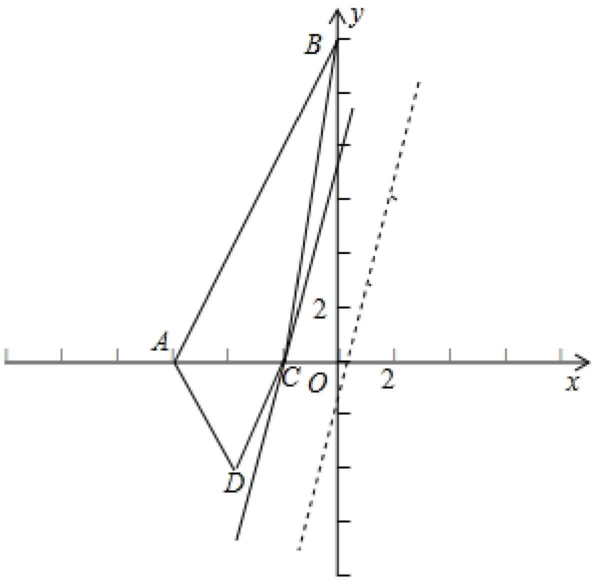
（3）当$a=4$，$b=2\sqrt{3}$时，

二次函数 $y=x^2+8x+12$ 与 x 轴的交点坐标分别为 A（－6，0）、C（－2，0），

与 y 轴交点坐标为 B（0，12），顶点坐标 D 为（－4，－4）．

设 $z=3x-y$，则 $y=3x-z$．

画出函数 $y=x^2+8x+12$ 和 $y=3x$ 的图象，若直线 $y=3x$ 平行移动时，如图



可以发现当直线经过点 C 时符合题意，此时最大 z 的值等于 - 6

总结提升：本题考查了函数综合知识，函数综合题是初中数学中覆盖面最广、综合性最强的题型．近几年的中考压轴题多以函数综合题的形式出现．解决函数综合题的过程就是转化思想、数形结合思想、分类讨论思想、方程思想的应用过程．

5．（2021 秋•沙市区校级期中）已知：关于 x 的一元二次方程（$m-1$）x^2+（$m-2$）$x-1=0$（m 为实数）．

（1）若方程有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围；

（2）在（1）的条件下，求证：无论 m 取何值，抛物线 $y=$（$m-1$）x^2+（$m-2$）$x-1$ 总过 x 轴上的一个固定点．

思路引领（1）根据 b^2-4ac 与零的关系即可判断出的关于 x 的一元二次方程（$m-1$）x^2+（$m-2$）$x-1=0$（m 为实数）的解的情况；

（2）法 1：用十字相乘法来转换 $y=$（$m-1$）x^2+（$m-2$）$x-1$，即 $y=[$（$m-1$）$x-1]$（$x+1$），令 $y=0$ 即可确定出抛物线过 x 轴上的固定点坐标；

法 2：函数解析式变形后，根据题意确定出 x 的值进而得出定点即可．

（1）解：根据题意，得 $\Delta=$（$m-2$）$^2-4\times$（$m-1$）$\times$（-1）>0，即 $m^2>0$，

解得 $m>0$ 或 $m<0$①，

又∵$m-1\neq0$，

∴$m\neq1$②，

由①②，得 $m<0$，$0<m<1$ 或 $m>1$；

（2）法 1：证明：由 $y=$（$m-1$）x^2+（$m-2$）$x-1$，得 $y=[$（$m-1$）$x-1]$（$x+1$），

抛物线 $y=[$（$m-1$）$x-1]$（$x+1$）与 x 轴的交点就是方程$[$（$m-1$）$x-1]$（$x+1$）$=0$ 的两根，

则$\begin{cases}x+1=0① \\ (m-1)x-1=0②\end{cases}$，

由①得，$x=-1$，即一元二次方程的一个根是 - 1，

∴无论 m 取何值，抛物线 $y=$（$m-1$）x^2+（$m-2$）$x-1$ 总过 x 轴上的一个固定点（-1，0）；

法 2：$y=$（$m-1$）x^2+（$m-2$）$x-1=$（x^2+x）$m-x^2-2x-1$，

∵无论 m 取何值，抛物线 $y=$（$m-1$）x^2+（$m-2$）$x-1$ 总过 x 轴上的一个固定点，

∴$x^2+x=0$，即 x（$x+1$）$=0$，

解得：$x=0$ 或 $x=-1$，

当 $x=0$ 时，$y=1$，定点为（0，1）；

当 $x=-1$ 时，$y=0$，定点为（－1，0），

则无论 m 取何值，抛物线 $y=(m-1)x^2+(m-2)x-1$ 总过 x 轴上的一个固定点．

总结提升：此题考查了抛物线与 x 轴的交点，以及根的判别式，在解一元二次方程的根时，利用根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与 0 的关系来判断该方程的根的情况；用十字相乘法对多项式进行分解，可以降低题的难度．

类型三 含参二次函数

6．（2021•邯郸模拟）如图 1，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线 G：$y=ax^2-4ax+1$（$a>0$）．

（1）若抛物线过点 A（－1，6），求出抛物线的解析式；

（2）当 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时，y 的最小值是－1，求 $1\leqslant x\leqslant 5$ 时，y 的最大值；

（3）已知直线 $y=-x+1$ 与抛物线 $y=ax^2-4ax+1$（$a>0$）存在两个交点，若两交点到 x 轴的距离相等，求 a 的值；

（4）如图 2，作与抛物线 G 关于 x 轴对称的抛物线 G'，当抛物线 G 与抛物线 G' 围成的封闭区域内（不包括边界）共有 11 个横、纵坐标均为整数的点时，直接写出 a 的取值范围．

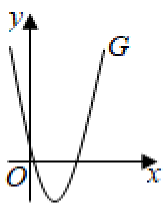


图1

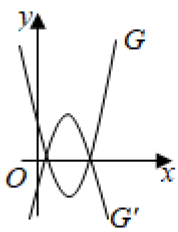


图2

思路引领：（1）将 A（－1，6）代入 $y=ax^2-4ax+1$，列方程求出 a 的值；

（2）求出抛物线的对称轴为直线 $x=2$，可知顶点的纵坐标就是 y 的最小值－1，由此求出抛物线的解析式，再由二次函数的性质求出 y 的最大值；

（3）由直线与抛物线都经过 y 轴上的定点（0，1），可知直线与抛物线的两个交点到 x 轴的距离都为 1，由另一个交点的纵坐标为－1，求出这个点的坐标并且代入抛物线的解析式即可求出此时 a 的值；

（4）抛物线 G 与抛物线 G' 围成的封闭区域是以 x 轴为对称轴的轴对称图形，这样只考虑 x 轴下方（或上方）的情况即可，即抛物线 G 当 x 等于 1 时的 y 值不小于－2 而小于－1，其顶点的纵坐标不小于－3 而小于－2，列不等式组求出 a 的取值范围．

解：（1）把 A（－1，6）代入 $y=ax^2-4ax+1$，得 $a+4a+1=6$，解得 $a=1$，

∴抛物线的解析式为 $y=x^2-4x+1$．

（2）∵$y=ax^2-4ax+1=a(x-2)^2-4a+1$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=2$，

∵抛物线的顶点的横坐标在 $1\leqslant x\leqslant 5$ 的范围内，

∴抛物线的顶点的纵坐标就是 y 的最小值 -1，

∴ $-4a+1=-1$，

解得 $a=\frac{1}{2}$，

∴抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$，

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x=1$ 时，$y_{最大}=\frac{1}{2}-2+1=-\frac{1}{2}$；

当 $2<x\leqslant 5$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x=5$ 时，$y_{最大}=\frac{25}{2}-10+1=\frac{7}{2}$，

∵ $-\frac{1}{2}<\frac{7}{2}$，

∴y 的最大值为$\frac{7}{2}$.

（3）∵直线 $y=-x+1$ 及抛物线 $y=ax^2-4ax+1$ 与 y 轴的交点都是（0，1），

∴直线 $y=-x+1$ 与抛物线 $y=ax^2-4ax+1$ 的两个交点到 x 轴的距离都是 1，且其中一个交点坐标为（0，1），

∴另一个交点的纵坐标为 -1，

当 $y=-1$ 时，由 $-1=-x+1$，得 $x=2$，

∴另一交点坐标为（2，-1），

把（2，-1）代入 $y=ax^2-4ax+1$ 得 $4a-8a+1=-1$，解得$a=\frac{1}{2}$.

（4）由题意可知，抛物线 G 与抛物线 G' 围成的封闭区域是以 x 轴为对称轴的轴对称图形，

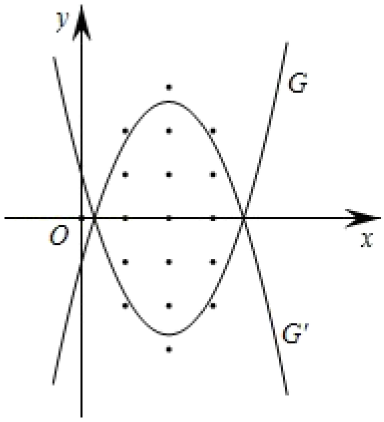
∴该区域内 x 轴上有三个横、纵坐标均为整数的点，x 轴的下方和上方各有四个这样的点，且两两关于 x 轴对称.

如图，对于抛物线 G，当 $x=1$ 时，$y=-3a+1$；当 $x=2$ 时，$y=-4a+1$，

由题意，得$\begin{cases}-2\leq -3a+1<-1\\ -3\leq -4a+1<-2\end{cases}$，

解得$\frac{3}{4}<a\leqslant 1$，

∴a 的取值范围是$\frac{3}{4}<a\leqslant 1$.



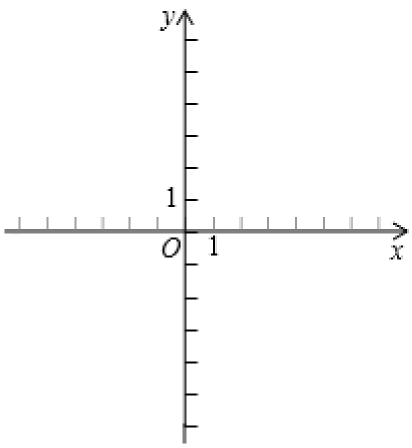
总结提升：此题重点考查二次函数的图象与性质、轴对称的特征以及列不等式组求取值范围等知识和方法，解题的关键是数形结合，确定所需要的数量关系，利用函数解析式列方程或不等式组，此题中等难度，是很好的练习题．

7．（2022•河南模拟）已知二次函数$y=（t+1）x^2+2（t+2）x+\frac{3}{2}$在$x=0$和$x=2$时的函数值相等．

（1）求二次函数的解析式；

（2）若一次函数$y=kx+6$的图象与二次函数的图象都经过点$A（﹣3，m）$，求m和k的值；

（3）把二次函数的图象与x轴两个交点之间的部分记为图象G，把图象G向左平移n（$n>0$）个单位后得到的图象记为M，请结合图象回答：当（2）中得到的直线与图象M有公共点时，求n的取值范围．



思路引领：（1）根据已知条件知，该函数的对称轴方程为$x=1$，则$-\frac{2(t+2)}{2(t+1)}=1$，据此易求t的值，把t的值代入函数解析式即可；根据图象与坐标轴的交点坐标，顶点坐标画出图象；

（2）把点A的坐标代入二次函数解析式，利用方程可以求得m的值；然后把点A的坐标代入一次函数解析式，也是利用方程来求k的值；

（3）求出点B、C间的部分图象的解析式是$y=-\frac{1}{2}（x﹣3）（x+1）$，得出抛物线平移后得出的图象G的

解析式是 $y=-\frac{1}{2}(x-3+n)(x+1+n)$，$-n-1\leqslant x\leqslant 3-n$，直线的解析式是 $y=4x+6$，若两图象有一个交点时，得出方程 $4x+6+n=-\frac{1}{2}(x-3+n)(x+1+n)$ 有两个相等的实数解，求出判别式 $\Delta=24n=0$，求出的 n 的值与已知 $n>0$ 相矛盾，得出直线与抛物线有两个公共点，设两个临界的交点为 $(-n-1, 0)$，$(3-n, 0)$，代入直线的解析式，求出 n 的值，即可得出答案.

解：（1）∵二次函数 $y=(t+1)x^2+2(t+2)x+\frac{3}{2}$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 时的函数值相等，

∴对称轴 $x=-\frac{2(t+2)}{2(t+1)}=\frac{0+2}{2}=1$，解得，$t=-\frac{3}{2}$，

则二次函数的解析式为：$y=(-\frac{3}{2}+1)x^2+2(-\frac{3}{2}+2)x+\frac{3}{2}$，即 $y=-\frac{1}{2}(x+1)(x-3)$ 或 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$，

（2）∵二次函数的象经过点 $A(-3, m)$，

∴$m=-\frac{1}{2}(-3+1)(-3-3)=-6$.

又∵一次函数 $y=kx+6$ 的图象经过点 $A(-3, m)$，

∴$m=-3k+6$，即 $-6=-3k+6$，

解得，$k=4$.

综上所述，m 和 k 的值分别是 -6、4；

（3）解：由题意可知，图象 G 的解析式是 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x^2-2x-3)=-\frac{1}{2}(x-3)(x+1)$，$-1\leqslant x\leqslant 3$，

则抛物线平移后得出的图象 M 的解析式是 $y=-\frac{1}{2}(x-3+n)(x+1+n)$，$-n-1\leqslant x\leqslant 3-n$，

此时直线平的解析式是 $y=4x+6$，

如果直线与平移后的二次函数相切，

则方程 $4x+6=-\frac{1}{2}(x-3+n)(x+1+n)$ 有两个相等的实数解，

即 $x^2+(2n+6)x+n^2-6n+9=0$ 有两个相等的实数解，

判别式 $\Delta=(2n+6)^2-4\times(n^2-6n+9)=48n=0$，

即 $n=0$，

∵与已知 $n>0$ 相矛盾，

∴直线与平移后的抛物线不相切，

∴结合图象可知，如果直线与抛物线有公共点，

则两个临界的交点为（－n－1，0），（3－n，0），

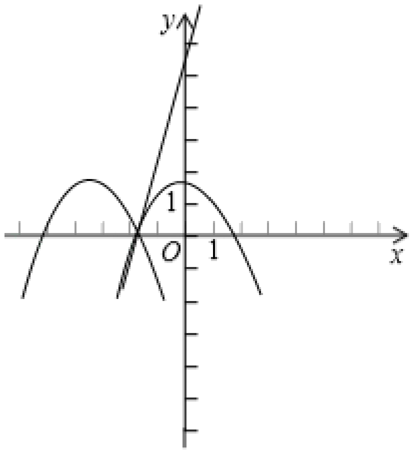
则 0＝4（－n－1）+6，

$n=\frac{1}{2}$，

0＝4（3－n）+6，

$n=\frac{9}{2}$，

即 n 的取值范围是：$\frac{1}{2}\leq n\leq\frac{9}{2}$.



总结提升：本题考查了待定系数法求二次函数的解析式，二次函数的图象以及二次函数图象上点的坐标特征．求得二次函数的解析式时，利用了二次函数图象的对称性质．

8．已知抛物线 $y=mx^2+(3-2m)x+m-2$（$m\neq O$）与 x 轴有两个不同的交点．

（1）求 m 的取值范围；

（2）判断点 P（1，1）是否在抛物线上；

（3）当 m＝1 时，求抛物线的顶点 Q 及 P 点关于抛物线的对称轴对称的点 P' 的坐标，并过 P'，Q，P 三点，画出抛物线草图．

思路引领：（1）与 x 轴有两个不同的交点即令 y＝0，得到的一元二次方程的判别式Δ＞0，据此即可得到不等式求解；

（2）把点（1，1）代入函数解析式判断是否成立即可；

（3）首先求得函数解析式，即可求得定点坐标以及对称轴，则 P'的坐标即可求得，然后根据三点即可作出函数图象．

解：（1）$\triangle=(3-2m)^2-4m(m-2)=9-4m>0$，

解得：$m<\frac{9}{4}$且 $m\neq0$；