第1章　二次函数

专题3 二次函数与几何图形的综合

习题链接

温馨提示：点击 ⬢ 进入讲评

1

2

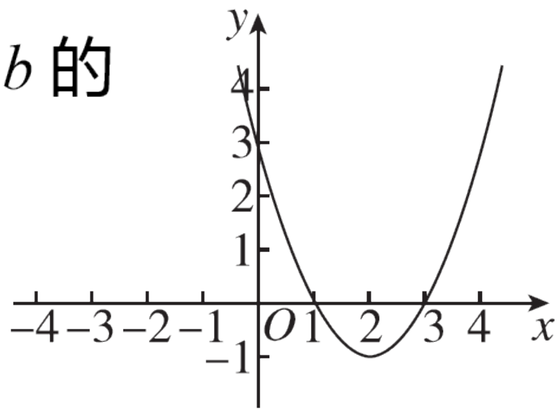
3

4

5

6

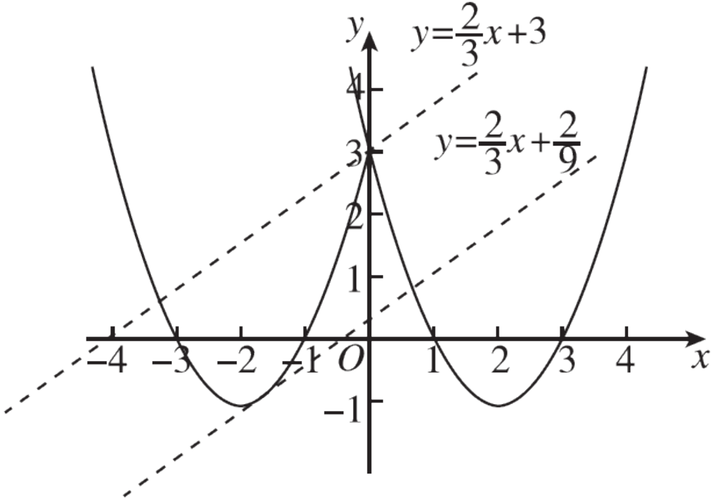
1. 在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=x^2-4x+3$ 的图象如图所示．将该图象 $x>0$ 的部分沿 y 轴翻折，翻折后得到的图象与原二次函数图象 $x\geq0$ 的部分构成了新的图象，记为图象 G.若一次函数 $y=\frac{2}{3}x+b$ 的图象与图象 G 有 4 个交点，则 b 的取值范围为__$\frac{2}{9}<b<3$__．



【点拨】易知翻折后的图象对应的二次函数表达式为 $y=x^2+4x+3(x<0)$，如图所示．

令$\frac{2}{3}x+b=x^2+4x+3$，整理得 $3x^2+10x+9-3b=0$，

若直线 $y=\frac{2}{3}x+b$ 与抛物线 $y=x^2+4x+3$ 只有一个交点，则 $10^2-4\times3\times(9-3b)=0$，解得 $b=\frac{2}{9}$，

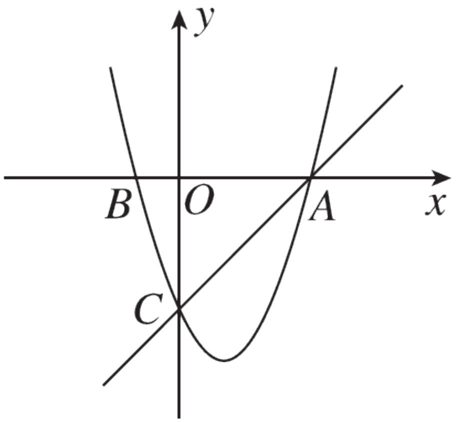


$\therefore$当 $b=\frac{2}{9}$时，一次函数 $y=\frac{2}{3}x+b$ 的图象如图所示，与图象 G 有 3 个交点；

把(0，3)代入 $y=\frac{2}{3}x+b$，得 $b=3$，$\therefore$当 $b=3$ 时，一次函数 $y=\frac{2}{3}x+b$ 的图象如图所示，与图象 G 有 3 个交点．$\therefore$结合图象可知当一次函数 $y=\frac{2}{3}x+b$ 的图象与图象 G 有 4 个交点时，b 的取值范围是$\frac{2}{9}<b<3$.

返回

2. 如图，已知二次函数$y=x^2-2x-3$的图象与x轴交于A，B两点，与y轴交于点C，直线$y=kx+b(k\neq0)$经过A，C两点．



(1)直线AC的表达式为__$y=x-3$__．

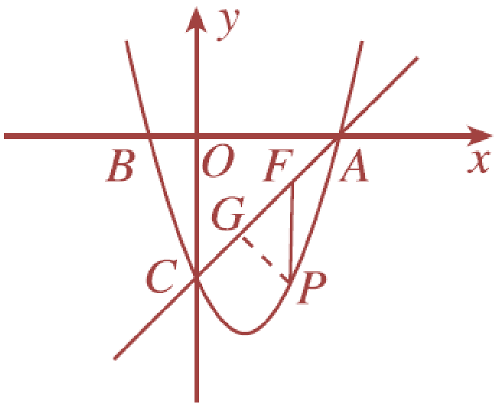
(2)点P为第四象限抛物线上的一个动点，过点P作$PF∥y$轴交直线AC于点F.

①线段PF的最大长度是多少？

【解】设点P的坐标为$(m，m^2-2m-3)$，则点F的坐标为$(m，m-3)$．所以$PF=m-3-(m^2-2m-3)=-m^2+3m=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}(0<m<3)$，所以当$m=\frac{3}{2}$时，$PF$的长度最大，为$\frac{9}{4}$.

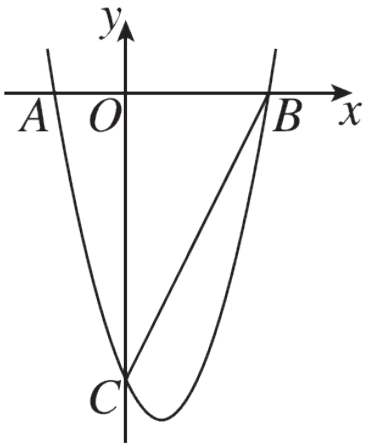
②点P到直线AC的最大距离是多少？

【解】如图，过点P作$PG\perp AC$于点G.易知$OC=OA=3$，所以$\angle ACO=45°$.因为$PF// y$轴，所以$\angle PFG=\angle ACO=45°$.所以$PG=\frac{\sqrt{2}}{2}PF$.由①可知$PF$的最大长度为$\frac{9}{4}$，所以点$P$到直线$AC$的最大距离是$\frac{9}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$.



3．如图，抛物线C_1：$y=x^2-2x-8$交x轴于A，B两点(A在B的左边)，交y轴于点C.

(1)直接写出A，B，C三点的坐标；



【解】$A(-2，0)$，$B(4，0)$，$C(0，-8)$．

(2)作直线$x=t(0<t<4)$，分别交x轴、线段BC、抛物线C_1于D，E，F三点，连接CF.若$\triangle BDE$与$\triangle CEF$相似，求t的值.

【解】∵F是直线$x=t(0<t<4)$与抛物线C_1的交点，

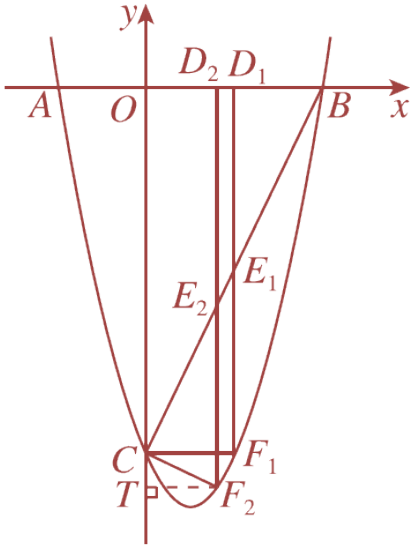
∴$F(t, t^2-2t-8)$.

①如图，当$\triangle BE_1D_1 \backsim \triangle CE_1F_1$时，

$\angle BCF_1=\angle CBO$.∴$CF_1 /\!/ OB$.

∵$C(0, -8)$，∴$t^2-2t-8=-8$，

解得$t=0$(舍去)或$t=2$；



如图，当$\triangle BE_2D_2 \backsim \triangle F_2E_2C$时，$\angle BCF_2=\angle BD_2E_2=\angle BOC=90°$. 过$F_2$作$F_2T\perp y$轴于点$T$.

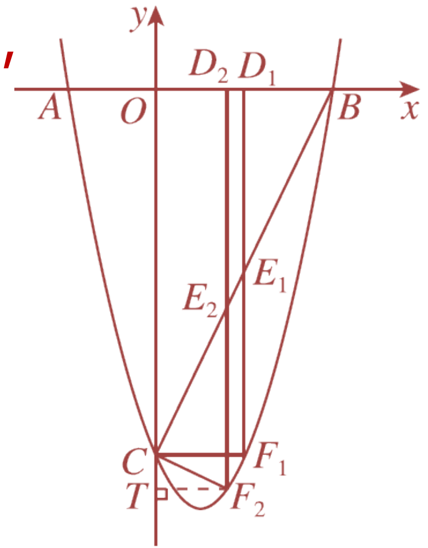
$\because \angle OCB+\angle OBC=\angle OCB+\angle TCF_2=90°$，

$\therefore \angle TCF_2=\angle OBC$.

又$\because \angle CTF_2=\angle BOC=90°$，

$\therefore \triangle BCO \backsim \triangle CF_2T$.

$\therefore \dfrac{F_2T}{CO}=\dfrac{CT}{BO}$.



$\because B(4,0)$，$C(0,-8)$，$\therefore OB=4$，$OC=8$.

$\because F_2T=t$，$CT=-8-(t^2-2t-8)=2t-t^2$，

$\therefore \frac{t}{8}=\frac{2t-t^2}{4}$，解得 $t=0$(舍去)或 $t=\frac{3}{2}$.

综上，t 的值为 2 或$\frac{3}{2}$.